Κλασική Ηλεκτροδυναμική

Ενότητα 1: Εισαγωγή

Ανδρέας Τερζής
Σχολή Θετικών επιστημών
Τμήμα Φυσικής

Σκοποί ενότητας

- Σκοπός της ενότητας είναι μια σύντομη επανάληψη στις βασικές έννοιες της ηλεκτροστατικής.

Περιεχόμενα ενότητας

- Νόμος Coulomb
- Ορισμός έντασης ηλεκτρικού πεδίου
- Συνάρτηση δέλτα
- Νόμος Gauss
- Ορισμός δυναμικού
- Εξισώσεις Laplace και Poisson

Νόμος Coulomb

- Ο Coulomb έδειξε πειραματικά ότι η δύναμη μεταξύ δύο φορτισμένων σωμάτων σε απόσταση μεγάλη σχετικά με τις διαστάσεις τους έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Έχει σχέση αναλογίας με το μέγεθος κάθε φορτίου.
2. Μεταβάλλεται αντιστρόφως ανάλογα με το τετράγωνο της απόστασης των δύο φορτίων.
3. Έχει την διεύθυνση της ευθείας που ενώνει τα φορτία.

Δύναμη Coulomb

- Τέλος και μια τέταρτη ιδιότητα της δύναμης Coulomb, είναι ότι είναι ελκτική για ετερόσημα φορτία και απωστική για ομόσημα.

- Αν q_1, q_2 είναι δύο φορτία και $\mathbf{x_1}, \boldsymbol{x_2}$ τα αντίστοιχα διανύσματα θέσης τους, τότε η δύναμη Coulomb που ασκεί το φορτίο q_2 στο q_1 θα είναι:

$$\boldsymbol{F_{21}} = \frac{q_1 q_2}{|\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1}|^2}\hat{\boldsymbol{r}} = \frac{q_1 q_2}{|\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1}|^2}\frac{(\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1})}{|\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1}|} = \frac{q_1 q_2(\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1})}{|\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1}|^3}.$$

- Χρησιμοποιούμε το σύστημα μονάδων C.G.S στο οποίο $\mathrm{k}_{\eta\lambda} = 1$. Για το SI έχουμε $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ στην περίπτωση του κενού.

Ένταση ηλεκτρικού πεδίου (Ι)

- Το ηλεκτρικό πεδίο ορίζεται ως η δύναμη ανά μονάδα φορτίου, δηλαδή θα ισχύει

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E},$$

όπου $\boldsymbol{F}$ η δύναμη, $\boldsymbol{E}$ το πεδίο και q το φορτίο.

- Γράφουμε τον νόμο Coulomb ως $\boldsymbol{F} = q_1 \left[\frac{q_2(\boldsymbol{x_2}-\boldsymbol{x_1})}{|\boldsymbol{x_2}-\boldsymbol{x_1}|^3}\right]$

- Άρα το πεδίο στην τυχαία θέση $\boldsymbol{x}$ εξ' αιτίας φορτίου q_1 που βρίσκεται στην θέση $\boldsymbol{x_1}$ είναι

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \frac{q(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_1})}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_1}|^3}.$$

Ένταση ηλεκτρικού πεδίου (II)

- Παρουσία n φορτίων η ένταση θα δίνεται από την σχέση

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_i})}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_i}|^3}.$$

- Στο όριο όπου το μέγεθος των φορτίων ελαττώνεται σημαντικά και ουσιαστικά χάνεται η διακριτότητα των φορτίων, αντικαθιστούμε το άθροισμα με ολοκλήρωμα:
- Για συνεχή λοιπόν κατανομή φορτίων ισχύει

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \int \frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^3} dq = \int \frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^3} \rho(\boldsymbol{x}') \mathrm{d}\mathbf{x}'$$

Συνάρτηση δέλτα

- Σε μια διάσταση η συνάρτηση δέλτα έχει τις ιδιότητες

1. $\delta(x-\alpha)=0\,, \gamma\iota\alpha\ x \neq a\ \kappa\alpha\iota$
2. $\int \delta(x-\alpha)dx=1$, αν η περιοχή ολοκλήρωσης περιέχει το $x=a$, και μηδέν στην αντίθετη περίπτωση.
3. $\int f(x)\delta(x-\alpha)dx=f(a)$.

- Σε περισσότερες από μια διαστάσεις η συνάρτηση δέλτα είναι το γινόμενο των συναρτήσεων δέλτα κάθε διάστασης. Για παράδειγμα στις τρεις διαστάσεις και σε καρτεσιανές συντεταγμένες θα έχουμε

$$\delta(\boldsymbol{x}-\mathbf{X})=\delta(x_1-X_1)\delta(x_2-X_2)\delta(x_3-X_3).$$

Συνάρτηση δέλτα(συνέχεια..)

- Γενικά, σε κάθε ορθογώνιο σύστημα (u, v, w) με στοιχεία μήκους $(\frac{du}{U}, \frac{dv}{V}, \frac{dw}{W})$ η συνάρτηση δέλτα δίνεται ως
$$\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') = \delta(u-u')\delta(v-v')\delta(w-w')UVW$$

Για παράδειγμα στην περίπτωση των σφαιρικών συντεταγμένων (r, θ, φ) με στοιχεία μήκους $(dr, rd\theta, rsin\theta d\varphi)$ έχουμε
$$\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') = \delta(r-r')\delta(\theta-\theta')\delta(\varphi-\varphi')\frac{1}{r^2 sin\theta}$$

- Σε αναλογία με τα παραπάνω θα ισχύει

$\int \delta(\mathbf{x}-\mathbf{X})d^3x = 1$, αν η περιοχή ολοκλήρωσης (ο όγκος V) περιέχει το $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X}$. Στην αντίθετη περίπτωση το ολοκλήρωμα μηδενίζεται.

Αναπαράσταση κατανομών με την βοήθεια της δέλτα

- Μπορούμε να αναπαραστήσουμε ένα σύνολο διακριτών φορτίων σαν μια συνεχή κατανομή με την βοήθεια της συνάρτησης δέλτα ως

$$\rho(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} q_i \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_i).$$

Πράγματι, αν αντικαταστήσουμε αυτήν την σχέση στον ορισμό της έντασης για συνεχή κατανομή, το αποτέλεσμα θα είναι ο ορισμός της έντασης για διακριτά φορτία.

- **Σημείωση**: Ο νόμος Coulomb δεν περιλαμβάνει συνοριακές συνθήκες ή συνοριακές επιφάνειες. Γι’ αυτό ολοκληρώνουμε(ή αθροίζουμε) «σε όλο το σύμπαν». Προφανώς οι εφαρμογές του νόμου αυτού καθ’ αυτού είναι περιορισμένες.

Νόμος Gauss

- Έστω φορτίο q στο εσωτερικό κλειστής επιφάνειας S. Έστω r η απόσταση του φορτίου από ένα σημείο της επιφάνειας, $\boldsymbol{n}$ το κάθετο διάνυσμα σ' εκείνο το σημείο και da στοιχείο επιφάνειας.
- Παίρνουμε τον νόμο Coulomb για σημειακό φορτίο:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \frac{q(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_1})}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_1}|^3}$$

- Τοποθετούμε το φορτίο στην αρχή των αξόνων:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

- Παίρνουμε το εσωτερικό γινόμενο με το κάθετο διάνυσμα και στα δύο μέλη:

$$\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{n} = \frac{q}{r^2} cos\theta$$

Νόμος Gauss-Τελική μορφή

- Ολοκληρώνουμε πάνω στην επιφάνεια:

$$\oint \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{n}\, da = \oint \frac{q}{r^2} cos\theta da$$

- Κάνουμε χρήση της σχέσης $cos\theta da = r^2 d\Omega$ και καταλήγουμε:

$$\oint \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{n}\, da = 4\pi q$$

Νόμος Gauss-Επέκταση

- Για σύνολο διακριτών φορτίων εντός της επιφάνειας S ο νόμος Gauss λαμβάνει την μορφή

$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}\alpha = 4\pi \sum_i q_i.$$

- Για συνεχή κατανομή ο νόμος Gauss γίνεται

$$\oint \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{n}\, da = 4\pi \int \rho(\boldsymbol{x}) d^3\boldsymbol{x}$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα είναι στην επιφάνεια S, ενώ το δεύτερο πάνω στον όγκο που περικλείει η S.

Σημείωση: Ο νόμος Gauss μας επιτρέπει να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο σε οποιοδήποτε σημείο της επιφάνειας που περιλαμβάνει μια πεπερασμένη κατανομή φορτίου. Όμως τα επιφανειακά ολοκληρώματα μπορούν να υπολογιστούν αναλυτικά μόνο για απλές γεωμετρίες (πχ σφαιρική, κυλινδρική).

Νόμος Gauss σε διαφορική μορφή

- Να θυμίσουμε το θεώρημα της απόκλισης: Για ένα διανυσματικό πεδίο **A** έχουμε

$$\oint \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{n} da = \int \nabla \cdot \boldsymbol{A}\, d^3\boldsymbol{x}$$

- Εφαρμόζουμε το θεώρημα της απόκλισης στο αριστερό μέλος της ολοκληρωτικής μορφής του νόμου Gauss κι έχουμε: $\int \nabla \cdot \mathbf{E}\, d^3\boldsymbol{x} = 4\pi \int \rho(\boldsymbol{x}) d^3\boldsymbol{x}$

- Επειδή η παραπάνω ισότητα πρέπει να ισχύει για κάθε όγκο, μπορούμε να παραλείψουμε τα ολοκληρώματα και καταλήγουμε στην διαφορική μορφή του νόμου

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho(\mathbf{x}).$$

Βαθμωτό Δυναμικό

- Γενικά ένα διανυσματικό πεδίο περιγράφεται πλήρως αν είναι γνωστά ο στροβιλισμός και η απόκλισή του.
- Για τα ηλεκτροστατικά πεδία $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = 0$.
- Άρα υπάρχει βαθμωτή συνάρτηση Φ τέτοια ώστε $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$.
- Θα δούμε τώρα τι μορφή έχει η βαθμωτή συνάρτηση Φ, που καλείται **βαθμωτό δυναμικό**.
- Από τον νόμο Coulomb:

$$-\nabla\Phi = \int \frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^3} \rho(\boldsymbol{x}') d^3x'$$

- Ισχύει η ταυτότητα: $\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3} = -\nabla \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}$

Εξισώσεις Poisson και Laplace

- Επομένως $-\nabla\Phi = \int -\nabla \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\rho(\boldsymbol{x}')d\boldsymbol{x}'$
- Άρα $\Phi = \int \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\rho(\boldsymbol{x}')d\boldsymbol{x}' + C$
- Για ευκολία θεωρούμε $C = 0$. (Ορίζουμε το επίπεδο μηδενικού δυναμικού να είναι τέτοιο ώστε $C = 0$).
- Αν πάρουμε τώρα τον νόμο Gauss σε διαφορική μορφή και αντικαταστήσουμε $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$, παίρνουμε την **εξίσωση Poisson**:
$$\nabla^2\Phi = -4\pi\rho$$
- Όταν δεν υπάρχουν καθόλου φορτία στον χώρο, παίρνουμε την **εξίσωση Laplace** (ειδική περίπτωση της Poisson):
$$\nabla^2\Phi = 0.$$

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης