(α) $x_0=p_0=0 \rightarrow \Psi=\left(\frac{4\lambda^3}{\pi}\right)^{1/4} x\cdot e^{-\lambda x^2/2}$, συμμετρική οπότε $\langle x\rangle=0$ και πραγματική οπότε $\langle p\rangle=0$.

$\langle x^2\rangle=\left(\frac{4\lambda^3}{\pi}\right)^{1/2}\int x^4 e^{-\lambda x^2}dx=\left(\frac{4\lambda^3}{\pi}\right)^{1/2}\frac{1\cdot 3}{(2\lambda)^2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}=\frac{3}{2\lambda}$. $\langle p^2\rangle=-\hbar^2\left(\frac{4\lambda^3}{\pi}\right)^{1/2}\int x e^{-\lambda x^2/2}\left[\frac{d^2}{dx^2}\left(xe^{-\lambda x^2/2}\right)\right]dx = ⊛$

1η πρόοδος «Κβαντικής Φυσικής Ι» ακ. έτους 2024-2025. Πάτρα, 4/11/2024, διδ. Ανδρέας Φ. Τερζής. **Εξατομικευμένα** θέματα, θα χρειαστούν, **Α**, ο τελευταίος, **Β**, ο προτελευταίος και **Γ**, ο προπροτελευταίος αριθμός του Α.Μ. σας.

Θ1[2.5:1+1+0.5] Θεωρούμε κυματοσυνάρτηση $\Psi=\underbrace{\left(\frac{4\lambda^3}{\pi\cdot(1+2\cdot\lambda\cdot x_0^2)^2}\right)^{1/4}}_{N}\cdot x\cdot e^{-\lambda\cdot(x-x_0)^2/2}\cdot e^{i\cdot(B+3)\cdot p_0\cdot x/\hbar}$. **(α)** Για $x_0=0$, $p_0=0$ να βρεθούν το $\Delta x\cdot\Delta p$, και **(β)** για $x_0\neq 0$, $p_0\neq 0$ η να βρεθεί η $\langle p\rangle$. **(γ)** Εξηγήστε με φυσικά επιχειρήματα, κάνοντας τις γραφικές παραστάσεις της $|\Psi|^2$, ότι η παραπάνω κυματοσυνάρτηση για $x_0=0$, έχει μεγαλύτερη Δx από το Δx της $\tilde{\Psi}=\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/4}\cdot e^{-\lambda\cdot x^2/2}$.

⊛ $=-\hbar^2\left(\frac{4\lambda^3}{\pi}\right)^{1/2}\int x e^{-\lambda x^2/2}(-3\lambda x+\lambda^2x^3)e^{-\lambda x^2/2}dx=-\hbar^2\left(\frac{4\lambda^3}{\pi}\right)^{1/2}\int(\lambda^2x^4-3\lambda x^2)e^{-\lambda x^2}dx=-\hbar^2\left(\frac{4\lambda^3}{\pi}\right)^{1/2}\left[-3\lambda\frac{1}{2\lambda}+\lambda^2\frac{1\cdot 3}{(2\lambda)^2}\right]\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}=\frac{3\hbar^2\lambda}{2}$

Άρα $(\Delta x)=\sqrt{\frac{3}{2\lambda}}$, $(\Delta p)=\sqrt{\frac{3\lambda}{2}}\hbar \rightarrow \boxed{(\Delta x)\cdot(\Delta p)=\frac{3}{2}}$.

(β) $\boxed{\langle p\rangle}=N^2\int xe^{-\lambda(x-x_0)^2/2}e^{-i(B+3)p_0x/\hbar}(-i\hbar)\frac{d}{dx}\left(xe^{-\lambda(x-x_0)^2/2}e^{i(B+3)p_0x/\hbar}\right)dx=$

$=(-i\hbar)N^2\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda(x-x_0)^2}\left[x-x^2(x-x_0)\lambda+x^2\frac{i(B+3)p_0}{\hbar}\right]dx$ (θέτουμε $y=x-x_0\rightarrow x=y+x_0$) $=$

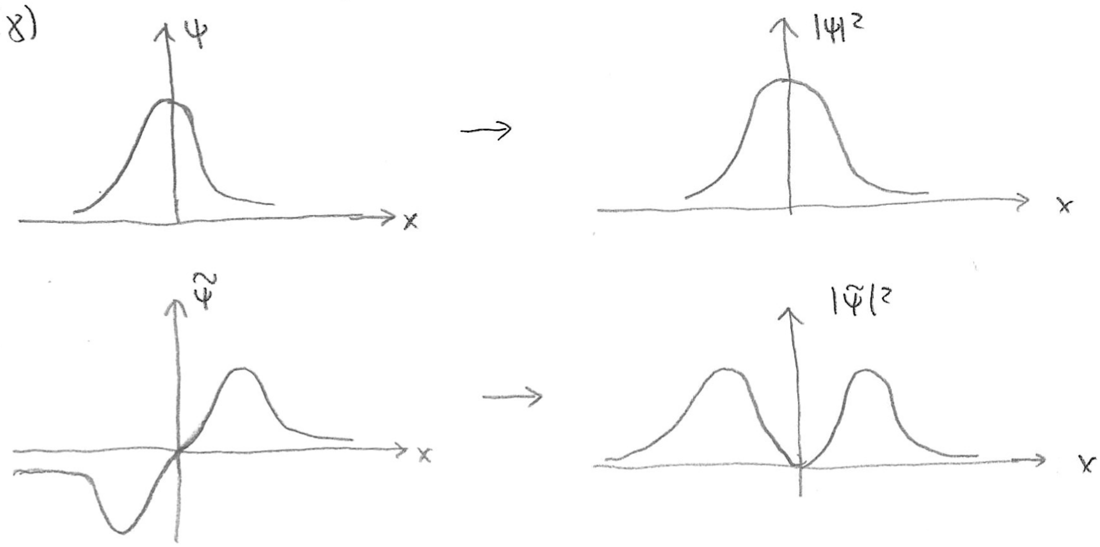
$=(-i\hbar)N^2\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda y^2}\left[y+x_0-\lambda(y+x_0)^2y+(y+x_0)^2\frac{i(B+3)p_0}{\hbar}\right]dy=$ το ονομάζω $A\left(=\frac{i(B+3)p_0}{\hbar}\right)$

$=(-i\hbar)N^2\int e^{-\lambda y^2}\left[y+x_0-\lambda y^3-2\lambda x_0y^2-x_0^2y+Ay^2+2x_0yA+x_0^2A\right]dy=$ {τα ολοκληρώματα με περιττές δυνάμεις είναι μηδέν}

$=(-i\hbar)N^2\int e^{-\lambda y^2}\left[x_0-2\lambda x_0y^2+Ay^2+x_0^2A\right]dy=(-i\hbar)N^2\left(x_0-2\lambda x_0\frac{1}{2\lambda}\right)\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}+(-i\hbar)N^2\left(A\frac{1}{2\lambda}+x_0^2A\right)\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}=$

$=(-i\hbar)\left(\frac{4\lambda^3}{\pi(1+2\lambda x_0^2)^2}\right)^{1/2}\left(\frac{1+2\lambda x_0^2}{2\lambda}\right)A\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}=-i\hbar\cdot A=-i\hbar\frac{i(B+3)p_0}{\hbar}=\boxed{(B+3)p_0}$

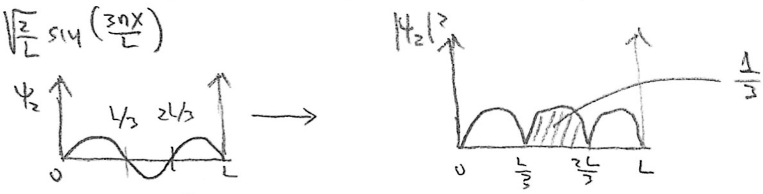
(γ)



προφανώς, πιο εκτεταμένη η πιθανότητα $|\tilde{\Psi}|^2$. Άρα μεγαλύτερη (Δx).

Θ2[0.5] Α.Π.Δ. στην 2η διεγερμένη κατάσταση του. Να βρεθεί η πιθανότητα να βρεθεί το σωμάτιο στην περιοχή $[L/3,2L/3]$.

$\Psi_2=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)$



$\frac{1}{3}$ Πιθανότητα $1/3$ ή $33,\bar{3}\%$

Θ3[0.5+0.5] Έστω $\widehat{W}\,\Psi=-\Psi^*$. **(α)** Να αποδείξετε ότι δεν είναι ερμιτιανός και **(β)** να βρεθεί <u>μια</u> φανταστική ιδιοτιμή του.

(α) $(\psi,\hat{W}\phi)=\int\psi^*\hat{W}\phi\,dx=\int\psi^*(-\phi^*)dx=-\int\psi^*\phi^*dx$

$(\hat{W}\psi,\phi)=\int(\hat{W}\psi)^*\phi\,dx=\int(-\psi^*)^*\phi\,dx=-\int\psi\phi\,dx\neq-\int\psi^*\phi^*dx=(\psi,\hat{W}\phi)$, άρα όχι ερμιτιανός.

(β) $\hat{W}^4\Psi=\hat{W}^3(\hat{W}\Psi)=\hat{W}^3(-\Psi^*)=\hat{W}^2(-\hat{W}\Psi^*)=\hat{W}^2(-(-(\Psi^*)^*))=\hat{W}^2\Psi=\hat{W}\hat{W}\Psi=\hat{W}(-\Psi^*)=-\hat{W}\Psi^*=-(-(\Psi^*)^*)=\Psi$

Ιδιοτιμές από $\hat{W}\Psi=\lambda\Psi\rightarrow\hat{W}^4\Psi=\hat{W}^3(\hat{W}\Psi)=\hat{W}^3(\lambda\Psi)=\lambda\hat{W}^2(\hat{W}\Psi)=\dots=\lambda^4\Psi$

Άρα $\lambda^4=1=e^{i2\pi}\rightarrow\lambda=e^{i2\pi/4}=e^{i\frac{\pi}{2}}=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=i$ $\boxed{\lambda=i}$ μία φανταστική ιδιοτιμή του.

(α) $\hat{W}^{+} = (x \cdot p_y \cdot x)^{+} = (p_y x)^{+} x^{+} = x^{+} p_y^{+} x^{+} = x p_y x = \hat{W}$, άρα ερμιτιανός

καθώς x, p_y ερμιτιανοί

Θ4[1.5:0.5+1]. **(α)** Να αποδείξετε, χρησιμοποιώντας τον συζυγή τελεστή, ότι ο τελεστής $\widehat{W} = x \cdot p_y \cdot x$ είναι ερμιτιανός. **(β)** Να βρεθεί το ελάχιστο γινόμενο των αβεβαιοτήτων του $\widehat{W}$ με τον τελεστή $(A+1)y^2 - (\Gamma+2)x \cdot p_y. = \hat{R}$

$[(\Delta\hat{W})(\Delta\hat{R})]_{min} = \frac{1}{2}|\langle[\hat{W},\hat{R}]\rangle|$. Έχουμε $[\hat{R},\hat{W}] = (A+1)[y^2, x p_y x] - (\Gamma+2)[x p_y, x p_y x]$

Προφανώς $[x p_y, x p_y x] = 0$ μια και εμφανίζονται $[x,x]$, $[x,p_y]$, $[p_y,p_y]$ όλα μηδέν

Ενώ $[y^2, x p_y x] = y[y, x p_y x] + [y, x p_y x]y$. Άρα υπολογίζω τον $[y, x p_y x] = x[y, p_y x] + \underbrace{[y,x]}_{0} p_y x =$

$= x p_y \underbrace{[y,x]}_{0} + x[y,p_y]x = x i\hbar x = i\hbar x^2$ έτσι $[y^2, x p_y x] = i\hbar y x^2 + i\hbar x^2 y$

Οπότε $((\Delta\hat{W})(\Delta\hat{R}))_{min} = \frac{1}{2}|\langle i\hbar(yx^2 + x^2y)\rangle| = \hbar|\langle yx^2\rangle|$.

Θ5[0.5]. Κυματοσυναρτήσεις $|N|\sqrt{\frac{2}{L}}sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\left(1 + 2cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right)$ και $|N|\sqrt{\frac{2}{L}}cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\left(1 + 2sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right)$ σε ΑΠΔ μήκους L. Αν το Α του ΑΜ σας είναι άρτιο κυκλώστε αυτή που είναι σε περιοχή $[0, L]$, αλλιώς κυκλώστε αυτή που είναι σε περιοχή $[-L/2, L/2]$.

$\underbrace{|N|\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)}_{\psi_1} + \overbrace{|N|\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)}^{\psi_2}$ άρα

$\overbrace{|N|\sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)}^{\psi_1} + \overbrace{|N|\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)}^{\psi_2}$ άρα

Θ6[3:1x3]. Α.Π.Δ. σε υπέρθεση δυο καταστάσεων με $(4A+4)P_1E_1 + (B+1)P_2E_2 = (A+B+2)\frac{\hbar^2\pi^2}{mL^2}$ και $\langle x\rangle(0) = \frac{L}{2}$. Να βρεθούν **(α)** η $\Psi(x,t)$, **(β)** η μέση ενέργεια και **(γ)** η $\langle x\rangle(t)$. Δίνεται $x_{21} = -\frac{16L}{9\pi^2}$ και $p_{21} = -\frac{8\hbar}{3L}i$.

Έχουμε $4(A+1)|c_1|^2E_1 + (B+1)|c_2|^2 4E_1 = (4(A+1)|c_1|^2 + 4(B+1)|c_2|^2)\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2} = (A+B+2)\frac{\hbar^2\pi^2}{mL^2} \to (A+1)|c_1|^2 + (B+1)|c_2|^2 = \frac{A+B+2}{2}$

αλλά $|c_1|^2 = 1 - |c_2|^2 \to (A+1)(1-|c_2|^2) + (B+1)|c_2|^2 = (A+1) + (B-A)|c_2|^2 = \frac{A+B+2}{2} \to (B-A)|c_2|^2 = \frac{A+B+2-2A-2}{2} = \frac{B-A}{2} \to |c_2|^2 = \frac{1}{2}$

Οπότε $|c_1|^2 = |c_2|^2 = \frac{1}{2} \to |c_1| = |c_2| = 1/\sqrt{2}$.

Επίσης $\langle x\rangle(0) = \frac{L}{2} + 2|c_1||c_2||x_{21}|\cos(\varphi_{12} + \delta^x_{21}) = \frac{L}{2} + 2|c_1||c_2|\frac{16L}{9\pi^2}\cos(\varphi_{12} + \pi)$ $\left\{ \text{καθώς } x_{21} = -\frac{16L}{9\pi^2} = \overbrace{\frac{16L}{9\pi^2}}^{|x_{21}|} e^{i\pi \leftarrow \delta^x_{21}} \right\}$

$\langle x\rangle(0) = \frac{L}{2} = \frac{L}{2} - 2|c_1||c_2|\cos(\varphi_{12}) \to -2|c_1||c_2|\cos(\varphi_{12}) = 0 \to \cos(\varphi_{12}) = 0 \to \varphi_{12} = \frac{\pi}{2}$

Άρα (α) $\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{2}}\psi_1 e^{-iE_1t/\hbar} + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2 e^{-iE_2t/\hbar} = \frac{i\psi_1 e^{-iE_1t/\hbar} + \psi_2 e^{iE_2t/\hbar}}{\sqrt{2}}$

(β) $\langle E\rangle = P_1E_1 + P_2E_2 = \frac{1}{2}E_1 + \frac{1}{2}E_2 = \frac{1}{2}E_1 + \frac{1}{2}4E_1 = \frac{5}{2}E_1 = \frac{5}{2}\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2} = \frac{5\hbar^2\pi^2}{4mL^2}$

(γ) $\langle x\rangle(t) = \frac{L}{2} + 2\underbrace{|c_1|}_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\underbrace{|c_2|}_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{16L}{9\pi^2}\cos(\omega t + \overbrace{\varphi_{12}}^{\pi/2} + \pi) = \frac{L}{2} - \frac{16L}{9\pi^2}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{L}{2} + \frac{16L}{9\pi^2}\sin(\omega t)$

όπου $\omega = \frac{E_2 - E_1}{\hbar} = \frac{4E_1 - E_1}{\hbar} = \frac{3E_1}{\hbar} = \frac{3\hbar^2\pi^2}{\hbar 2mL^2} = \frac{3\hbar\pi^2}{2mL^2}$.

Θ7 Κυκλώστε τις σωστές προτάσεις. Βαθμολογία: Σωστές απαντήσεις +0.25, αν κυκλώστε λάθος πρόταση -0.25.

1. Οι ερμιτιανοί τελεστές μπορεί να έχουν και μιγαδικές ιδιοτιμές.
2. Ο συζυγής του τελεστή $\frac{d}{dx}$ είναι ο τελεστής $-\frac{d}{dx}$.
3. Η μέση τιμή της αρτιότητας σε υπέρθεση των δυο πρώτων καταστάσεων σε συμμετρικό Α.Π.Δ., με $|c_1| = |c_2|$, είναι 0.
4. Ένα πλήρες σύνολο εναλλασσόμενων παρατηρησίμων αποτελείτε από τελεστές που έχουν κοινές ιδιοσυναρτήσεις.
5. Το κυματοπακέτο της μορφής $\frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{\infty} c(k) \cdot e^{ikx} \cdot e^{-\frac{i\hbar k^2}{2m}t}dk$, περιγράφει ελεύθερο σωμάτιο.
6. Οι διάσημες σχέσεις του Ehrenfest, είναι απλή εφαρμογή της σχέσης $i\hbar\frac{d}{dt}\langle\widehat{W}\rangle = \langle[\widehat{W}, \widehat{H}]\rangle$.
7. Σε Α.Π.Δ. αρχικά στην θεμελιώδη κατάσταση, που διπλασιάζω το μήκος του, η πιθανότητα «εμφάνισης» της θεμελιώδους κατάστασης στο νέο Α.Π.Δ. είναι $\frac{2}{L^2}\left|\int_0^L sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cdot sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \cdot dx\right|^2$.