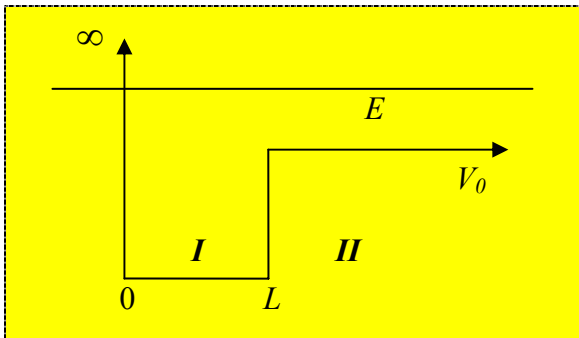


Πρόβλημα Απειρόβαθο Κβαντικό Πηγάδι 5α (ΑΚΠ5α)

Θεωρούμε κβαντικό πηγάδι με δυναμικό της μορφής $V(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0 \\ V_0 \Theta(x-L), & x \geq 0 \end{cases}$.

Να εκτιμηθούν οι ιδιοκαταστάσεις του συστήματος για τις καταστάσεις με $E > V_0$.



Σχήμα ΑΚΠ5α.1 Σχηματική αναπαράσταση του κβαντικού πηγαδιού με δυναμικό της μορφής $V(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0 \\ V_0 \Theta(x-L), & x \geq 0 \end{cases}$ με $V_0 > 0$, για καταστάσεις σκέδασης.

Η εξίσωση Schrödinger για την περιοχή I είναι

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_I(x)}{dx^2} = E \psi_I(x) \Rightarrow \psi_I''(x) + \left[k_I^2 \equiv \frac{2mE}{\hbar^2} \right] \psi_I(x) = 0,$$

ενώ για την περιοχή II είναι

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_{II}(x)}{dx^2} + V_0 \psi_{II}(x) = E \psi_{II}(x) \Rightarrow \psi_{II}''(x) + \left[k_{II}^2 \equiv \frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2} \right] \psi_{II}(x) = 0.$$

Οι λύσεις των διαφορικών εξισώσεων στις δύο περιοχές είναι

$$\psi_I(x) = A_I e^{ik_I x} + B_I e^{-ik_I x}, \quad \psi_{II}(x) = A_{II} e^{ik_{II} x} + B_{II} e^{-ik_{II} x}.$$

Για $E > V_0$ έχουμε καταστάσεις σκέδασης, οπότε η $\psi_{II}(x) = A_{II} e^{ik_{II} x} + e^{-ik_{II} x}$, που περιγράφει προσπίπτων σωματίο από δεξιά, το οποίο σκεδάζεται στα σημεία ασυνέχειας του δυναμικού. Ακόμα, από την συνοριακή συνθήκη της κυματοσυνάρτησης στο $x=0$, έχουμε $\psi_I(x=0) = 0$ ότι

$$\psi_I(x=0) = A_I e^{ik_I 0} + B_I e^{-ik_I 0} = 0 (B_I = -A_I) \Rightarrow \psi_I(x) = 2i A_I \sin k_I x = A_I' \sin k_I x.$$

Στην συνέχεια χρησιμοποιούμε τις συνοριακές συνθήκες στη θέση $x=L$ (συνέχεια συνάρτησης και παραγώγου).

$$\psi_I(x=L) = \psi_{II}(x=L) \Rightarrow A_I' \sin k_I L = A_{II} e^{ik_{II} L} + e^{-ik_{II} L}$$

$$\psi_I'(x=L) = \psi_{II}'(x=L) \Rightarrow k_I A_I' \cos k_I L = A_{II} k_{II} e^{ik_{II} L} - k_{II} e^{-ik_{II} L}$$

Έχουμε δύο εξισώσεις με δύο αγνώστους από τις οποίες εκτιμούμε τον συντελεστή A_{II} , από τον οποίο βρίσκουμε την συντελεστή ανάκλασης (πόσο αναμένουμε να είναι αυτός). Έχουμε δηλαδή το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{bmatrix} \sin k_I L & -e^{ik_{II}L} \\ k_I \cos k_I L & -k_{II} e^{ik_{II}L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_I' \\ A_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-ik_{II}L} \\ -k_{II} e^{-ik_{II}L} \end{bmatrix}$$

$$\text{Έτσι } A_{II} = \frac{\begin{vmatrix} \sin k_I L & e^{-ik_{II}L} \\ k_I \cos k_I L & -ik_{II} e^{-ik_{II}L} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sin k_I L & -e^{ik_{II}L} \\ k_I \cos k_I L & -ik_{II} e^{ik_{II}L} \end{vmatrix}} = \frac{(ik_{II} \sin k_I L + k_I \cos k_I L) e^{-ik_{II}L}}{(ik_{II} \sin k_I L - k_I \cos k_I L) e^{ik_{II}L}}.$$

Ο συντελεστής ανάκλασης υπολογίζεται ως $R = J_r / J_i = A_{II} A_{II}^* k_{II} / k_{II} = A_{II} A_{II}^* = 1$. Καθώς

$$A_{II} A_{II}^* = \frac{(ik_{II} \sin k_I L + k_I \cos k_I L) e^{-ik_{II}L}}{(ik_{II} \sin k_I L - k_I \cos k_I L) e^{ik_{II}L}} \frac{(-ik_{II} \sin k_I L + k_I \cos k_I L) e^{ik_{II}L}}{(-ik_{II} \sin k_I L - k_I \cos k_I L) e^{-ik_{II}L}} = 1.$$

Δηλαδή έχουμε πλήρη ανάκλαση του σωματιδίου, το οποίο είναι και αναμενόμενο.