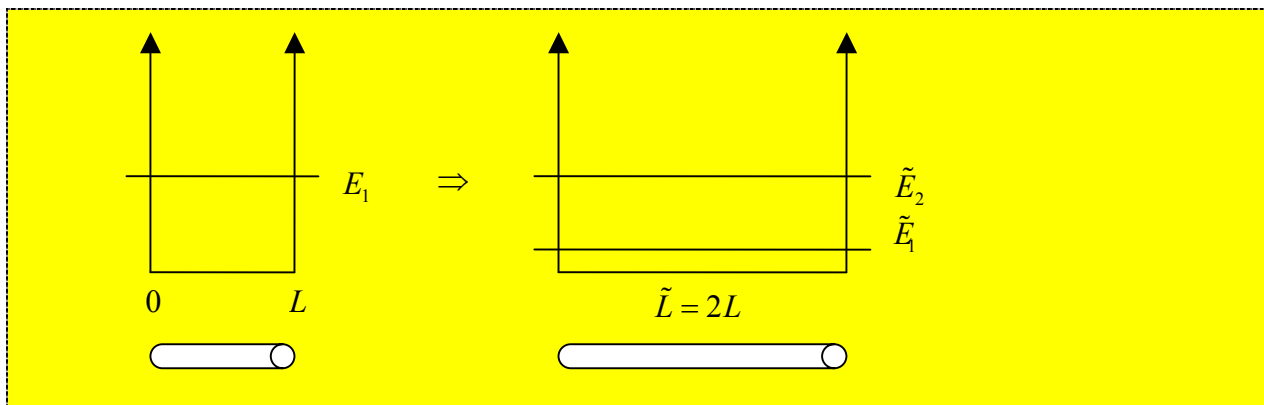


### Πρόβλημα Απειρόβαθο Κβαντικό Πηγάδι 1α (ΑΚΠ1α)

Θεωρούμε απειρόβαθο κβαντικό πηγάδι πάχους  $L$ , στο οποίο βρίσκεται εγκλωβισμένο ηλεκτρόνιο στην θεμελιώδη κατάσταση  $E_1$ . Διπλασιάζουμε το πάχος του σωλήνα πολύ απότομα. Να βρεθεί η πιθανότητα να βρεθεί το σωματίδιο στην θεμελιώδη κατάσταση του νέου πηγαδιού.



**Σχήμα ΑΚΠ1α.1.** Σχηματική αναπαράσταση των δύο κβαντικών πηγαδιών του προβλήματος. Ουσιαστικά μπορούμε να φανταστούμε το ηλεκτρόνιο εγκλωβισμένο σε ένα μονοδιάστατο σωλήνα του οποίου το ένα άκρο είναι σταθερό ενώ το άλλο μπορεί να μεταβάλλεται (π.χ. με ένα έμβολο). Στο πρόβλημά μας η μεταβολή της θέσης του εμβόλου είναι πολύ απότομη.

Οι ενεργειακές καταστάσεις του αρχικού πηγαδιού υπολογίζονται από την σχέση  $E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} n^2$

(όπου  $n=1,2,\dots$ ). Η θεμελιώδης κατάσταση του συστήματος αντιστοιχεί στο  $n=1$ , δηλαδή  $E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$

( $m$ , η μάζα του ηλεκτρονίου).

Οι ενεργειακές καταστάσεις του τελικού πηγαδιού (του οποίου όλα τα χρήσιμα φυσικά μεγέθη έχουν ένα επιπλέον συμβολισμό, μια περισπωμένη) υπολογίζονται από την ίδια σχέση με  $\tilde{L} = 2L$ ,

δηλαδή  $\tilde{E}_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m(2L)^2} n^2 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8mL^2} n^2$  (όπου πάλι  $n=1,2,\dots$ ). Η πρώτη διεγερμένη κατάσταση του

συστήματος αντιστοιχεί στο  $n=2$ , δηλαδή  $\tilde{E}_2 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} (= E_1)$ . Είναι δηλαδή ίση με την θεμελιώδη του

αρχικού πηγαδιού. Η τελευταία παρατήρηση, δημιουργεί την εντύπωση ότι το ηλεκτρόνιο στο νέο πηγάδι θα βρεθεί στην πρώτη διεγερμένη κατάσταση του και πουθενά αλλού (ιδιοκατάσταση του νέου συστήματος). Όπως θα γίνει φανερό από την παρακάτω ανάλυση αυτό δεν ισχύει.

Τις καταστάσεις του συστήματος τις καθορίζουν οι κυματοσυναρτήσεις. Με αυτές θα εργαστούμε.

Πρώτα, ας καταγράψουμε ποιες είναι οι ιδιοσυναρτήσεις των δύο συστημάτων.

Πηγάδι πάχους  $L$ :  $\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} \Theta(x) \Theta(L-x)$ , όπου  $n=1,2,\dots$

Πηγάδι πάχους  $\tilde{L} = 2L$ :  $\tilde{\Psi}_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\tilde{L}}} \sin \frac{n\pi x}{\tilde{L}} \Theta(x) \Theta(\tilde{L} - x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sin \frac{n\pi x}{2L} \Theta(x) \Theta(2L - x)$ , όπου  $n=1,2,\dots$ . Όπου  $\Theta(x)$  είναι η συνάρτηση Heaviside γνωστή και ως συνάρτηση βήματος  $(\Theta(x-x_0) = \begin{cases} 0, & x \leq x_0 \\ 1, & x > x_0 \end{cases})$ .

Η κυματοσυνάρτηση που περιγράφει το αρχικό πηγάδι, οποιαδήποτε χρονική στιγμή είναι προφανώς  $\psi(x,t) = \Psi_1(x)e^{-iE_1 t/\hbar}$  (στάσιμη κατάσταση, καθώς  $P(x,t)dx = |\Psi_1(x)|^2 dx$  είναι ανεξάρτητη του χρόνου).

Αφού η μετάβαση στο νέο πηγάδι με το διπλάσιο πάχος γίνεται 'στιγμιαία', θεωρούμε ότι η αρχική κατάσταση του ηλεκτρονίου στο νέο σύστημα περιγράφεται από την αντίστοιχη κυματοσυνάρτηση του αρχικού πηγαδιού την στιγμή της αλλαγής. Για ευκολία και προφανώς χωρίς βλάβη της γενικότητας αυτή η χρονική στιγμή καθορίζεται η  $t=0$ . Έτσι  $\tilde{\psi}(x,t=0) = \psi(x,t=0) = \Psi_1(x)e^{-iE_1 0/\hbar} = \Psi_1(x)$ . Όπως κάθε κυματοσυνάρτηση, έτσι και αυτή του νέου απειροβάθου πηγαδιού μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των ιδιοκαταστάσεων του νέου πηγαδιού την ίδια χρονική στιγμή ( $t=0$ )

$$\tilde{\psi}(x,t=0) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{c}_n \tilde{\Psi}_n(x) = \tilde{c}_1 \tilde{\Psi}_1(x) + \tilde{c}_2 \tilde{\Psi}_2(x) + \tilde{c}_3 \tilde{\Psi}_3(x) + \dots$$

Η πιθανότητα να βρísκεται το ηλεκτρόνιο στην ιδιοκατάσταση  $n$  δίνεται από την σχέση  $\tilde{P}_n = |\tilde{c}_n|^2 = \tilde{c}_n \tilde{c}_n^*$ . Όπου τα  $\tilde{c}_n$  υπολογίζονται από τις σχέσεις που προκύπτουν από τις σχέσεις ορθοκανονικότητας των ιδιοσυναρτήσεων, δηλαδή  $\tilde{c}_n = \int \tilde{\Psi}_n^*(x) \cdot \tilde{\psi}(x,t=0) dx$ .

Έτσι έχουμε

$$\tilde{c}_n = \int_0^{\tilde{L}} \tilde{\Psi}_n^*(x) \cdot \Psi_1(x) dx = \int_0^{2L} \frac{1}{\sqrt{L}} \sin \frac{n\pi x}{2L} \Theta(x) \Theta(2L - x) \cdot \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{\pi x}{L} \Theta(x) \Theta(L - x) dx =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{L} \int_0^L \sin \frac{n\pi x}{2L} \cdot \sin \frac{\pi x}{L} dx = \left\{ \omega \equiv \frac{\pi x}{2L} \right\} \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin n\omega \cdot \sin 2\omega d\omega$$

Χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα  $2 \sin a \cdot \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$ .

$$\tilde{c}_n = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\pi/2} [\cos(n-2)\omega - \cos(n+2)\omega] d\omega = \frac{\sqrt{2}}{\pi(n-2)} \sin(n-2) \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{2}}{\pi(n+2)} \sin(n+2) \frac{\pi}{2}$$

Έτσι  $\tilde{c}_1 = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} = 0.60021$  και η αντίστοιχη πιθανότητα είναι  $\tilde{P}_1 = |\tilde{c}_1|^2 = 36,025\%$ .

Ανάλογα βρίσκουμε ότι  $\tilde{P}_2 = |\tilde{c}_2|^2 = 50\%$ ,  $\tilde{P}_3 = |\tilde{c}_3|^2 = 12,97\%$ ,  $\tilde{P}_4 = |\tilde{c}_4|^2 = 0$ ,  $\tilde{P}_5 = |\tilde{c}_5|^2 = 0,735\% \dots$

Οι τρεις πρώτες ενεργειακές καταστάσεις συγκεντρώνουν το 98.995% της πιθανότητας.

Γενικά παρατηρούμε ότι όταν το  $n$  είναι άρτιος, τα  $(n+2)/2$  και  $(n-2)/2$  είναι ακέραιοι αριθμοί και προφανώς τα αντίστοιχα ημίτονα στην έκφραση για το  $\tilde{c}_n$  μηδενίζονται. Μοναδική εξαίρεση η

περίπτωση  $n=2$ , όπου το  $\frac{\sin(n-2)\frac{\pi}{2}}{\pi(n-2)}$  είναι  $1/2$  (κάνοντας L'Hospital για όρια σε κλάσματα  $0/0$ )\* και το  $\tilde{c}_2 = 1/\sqrt{2}$  ( $\tilde{P}_2 = |\tilde{c}_2|^2 = 50\%$ ).

Τελικά οι πιθανότητες μπορούν να γραφούν ως

---

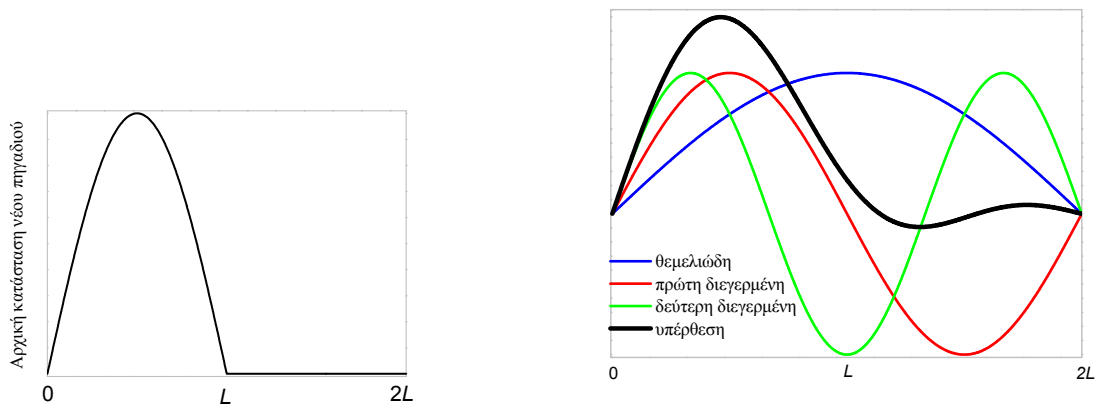
\* για  $n=2$  το δεύτερο ολοκλήρωμα στην έκφραση των  $\tilde{c}_n$  δίνει  $\int_0^{\pi/2} \cos(n-2)\omega d\omega = \int_0^{\pi/2} \cos(0\omega) d\omega = \int_0^{\pi/2} d\omega = \frac{\pi}{2}$

$$\tilde{P}_n = \begin{cases} 1/2, & n=2 \\ 0, & n=2k(k>1) \\ 32\pi^{-2}(2k-1)^{-2}(2k+3)^{-2}, & n=2k+1(k\geq 0) \end{cases} \quad **$$

Η μέση ενέργεια του συστήματος παραμένει σταθερή και ίση με την αρχική, καθώς το σύστημα που μελετάμε είναι απομονωμένο. Χρησιμοποιώντας το πληροφορία αυτή μπορούμε να βρούμε άλλη μία μαθηματική ταυτότητα. Έχουμε  $\langle E \rangle = E_1 = \sum_n \tilde{P}_n \tilde{E}_n = \sum_n \tilde{P}_n E_n / 4 = \sum_n \tilde{P}_n E_1 n^2 / 4 \Rightarrow \sum_n \tilde{P}_n n^2 = 4$ , ή ισοδύναμα  $\sum_{k \geq 0} 32\pi^{-2}(2k+1)^2(2k-1)^{-2}(2k+3)^{-2} = 2$  ( $k$ , θετικός ακέραιος).

Αντιθέτως, αν η μεταβολή γίνει αδιαβατικά, δηλαδή πάρα πολύ αργά το σύστημα που θα προκύπτει σε κάθε μεταβολή θα αντιστοιχεί στην θεμελιώδη κατάσταση του καινούργιου πηγαδιού. Έτσι τελικά η αρχική κατάσταση του νέου πηγαδιού θα είναι η θεμελιώδης κατάσταση του νέου πηγαδιού. Προφανώς καθώς το πάχος του πηγαδιού μεγαλώνει και η θεμελιώδης ενέργειά του μικραίνει έχουμε σε κάθε βήμα της αδιαβατικής αυτής μεταβολής απώλεια ενέργειας (δεν έχουμε δηλαδή κλειστό σύστημα). Από την αρχή της αβεβαιότητας αναμένουμε ο χαρακτηριστικός χρόνος μετάβασης σε κάθε βήμα της αδιαβατικής μεταβολής, να

Ας συζητήσουμε τα αποτελέσματά μας που βρήκαμε με την βοήθεια γραφικών αναπαραστάσεων των ιδιοκαταστάσεων του υπό μελέτη συστήματος. Η αρχική κατάσταση περιγράφεται από μία κυματοσυνάρτηση που εκτείνεται από 0 έως  $2L$ , η οποία είναι η θεμελιώδης κατάσταση του απεοροβάθου πηγαδιού με πάχος  $L$  ενώ στην περιοχή  $L$  έως  $2L$  μηδενίζεται..



**Σχήμα AKΠ1a.2.** Γραφική αναπαράσταση της αρχικής κυματοσυνάρτησης και των τριών πρώτων ιδιοσυναρτήσεων του νέου πηγαδιού (πάχους  $2L$ ). Η μαύρη καμπύλη αναπαριστά την υπέρθεση των τριών καταστάσεων ( $\tilde{c}_1\tilde{\Psi}_1(x) + \tilde{c}_2\tilde{\Psi}_2(x) + \tilde{c}_3\tilde{\Psi}_3(x)$ ). Γίνεται φανερό ότι οι τρεις πρώτες καταστάσεις συνεισφέρουν περισσότερο, το οποίο είναι αναμενόμενο καθώς η πιθανότητα το σύστημα να βρίσκεται στις τρεις πρώτες ιδιοκαταστάσεις του είναι 98.995%.

\*\* Από την σχέση  $\sum_n P_n = 1$ , προκύπτει ότι η απειροσειρά  $\sum_{k \geq 0} 32\pi^{-2}(2k-1)^{-2}(2k+3)^{-2}$  δίνει 1/2. Δηλαδή η λύση ενός κβαντικού προβλήματος δίνει απάντηση σε ένα μαθηματικό πρόβλημα.

**Πρόβλημα Απειρόβαθο Κβαντικό Πηγάδι 1β (ΑΚΠ1β)**

Θεωρούμε απειρόβαθο κβαντικό πηγάδι πάχους  $L$ , στο οποίο βρίσκεται εγκλωβισμένο ηλεκτρόνιο μάζας  $m$  στην κατάσταση  $E_k$  ( $k=1,2,\dots$ ). Αλλάζουμε το πάχος του σωλήνα πολύ απότομα σε  $\lambda L$  ( $\lambda > 1$ ). Να βρεθεί η πιθανότητα να βρεθεί το σωματίδιο στην  $n$ -στη κατάσταση του νέου πηγαδιού, ενέργειας  $E_n$ .

Οι ενεργειακές καταστάσεις του αρχικού πηγαδιού υπολογίζονται από την σχέση  $E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} n^2$  (όπου  $n=1,2,\dots$ ). Οι ενεργειακές καταστάσεις του τελικού πηγαδιού (του οποίου όλα τα χρήσιμα φυσικά μεγέθη έχουν ένα επιπλέον συμβολισμό, μια περισπωμένη) υπολογίζονται από την ίδια σχέση με  $\tilde{L} = \lambda L$ , δηλαδή  $\tilde{E}_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m(\lambda L)^2} n^2 = \tilde{E}_n / \lambda^2$  (όπου πάλι  $n=1,2,\dots$ ).

Οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις των δύο συστημάτων είναι

Πηγάδι πάχους  $L$ :  $\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} \Theta(x) \Theta(L-x)$ , όπου  $n=1,2,\dots$

Πηγάδι πάχους  $\tilde{L} = \lambda L$ :  $\tilde{\Psi}_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\tilde{L}}} \sin \frac{n\pi x}{\tilde{L}} \Theta(x) \Theta(\tilde{L}-x) = \sqrt{\frac{2}{\lambda L}} \sin \frac{n\pi x}{\lambda L} \Theta(x) \Theta(\lambda L-x)$ , όπου  $n=1,2,\dots$

Ακολουθώντας την μεθοδολογία της προηγούμενης άσκησης (ΑΚΠ1α), γράφουμε για την αρχική συνθήκη της κυματοσυναρτησης  $\tilde{\psi}(x, t=0) = \psi(x, t=0) = \Psi_k(x) e^{-iE_k 0/\hbar} = \Psi_k(x)$ . Όπως κάθε κυματοσυνάρτηση, έτσι και αυτή του νέου απειρόβαθου πηγαδιού μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των ιδιοκαταστάσεων του νέου πηγαδιού την ίδια χρονική στιγμή ( $t=0$ )

$$\tilde{\psi}(x, t=0) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{c}_n \tilde{\Psi}_n(x) = \tilde{c}_1 \tilde{\Psi}_1(x) + \tilde{c}_2 \tilde{\Psi}_2(x) + \tilde{c}_3 \tilde{\Psi}_3(x) + \dots$$

Η πιθανότητα να βρίσκεται το ηλεκτρόνιο στην ιδιοκατάσταση  $n$  δίνεται από την σχέση  $\tilde{P}_n = |\tilde{c}_n|^2 = \tilde{c}_n \tilde{c}_n^*$ . Όπου τα  $\tilde{c}_n$  υπολογίζονται από τις σχέσεις που προκύπτουν από τις σχέσεις ορθοκανονικότητας των ιδιοσυναρτήσεων, δηλαδή  $\tilde{c}_n = \int \tilde{\Psi}_n^*(x) \cdot \tilde{\psi}(x, t=0) dx$

Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} \tilde{c}_n &= \int_0^{\tilde{L}} \tilde{\Psi}_n^*(x) \cdot \Psi_k(x) dx = \int_0^{\lambda L} \sqrt{\frac{2}{\lambda L}} \sin \frac{n\pi x}{\lambda L} \Theta(x) \Theta(\lambda L-x) \cdot \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{k\pi x}{L} \Theta(x) \Theta(L-x) dx = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\lambda L}} \int_0^L \sin \frac{n\pi x}{\lambda L} \cdot \sin \frac{k\pi x}{L} dx = \left\{ \omega \equiv \frac{\pi x}{L} \right\} \frac{1}{\pi \sqrt{\lambda}} \int_0^{\pi} 2 \sin \frac{n\omega}{\lambda} \cdot \sin k\omega d\omega \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα  $2 \sin a \cdot \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$ .

$$\tilde{c}_n = \frac{1}{\pi \sqrt{\lambda}} \int_0^{\pi} \left[ \cos\left(\frac{n}{\lambda} - k\right)\omega - \cos\left(\frac{n}{\lambda} + k\right)\omega \right] d\omega = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi(k\lambda - n)} \sin \frac{(k\lambda - n)\pi}{\lambda} - \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi(k\lambda + n)} \sin \frac{(k\lambda + n)\pi}{\lambda}$$

Προσοχή χρειάζεται η περίπτωση όπου ο παρονομαστής ( $k\lambda - n$ ) μηδενίζεται (π.χ.  $k = \lambda = 2$  και  $n=4$ , ή  $k=2$ ,  $\lambda=1.5$  και  $n=3$ ).

Στην περίπτωση αυτή βλέπουμε ότι το πρώτο ολοκλήρωμα από τα ολοκληρώματα με τα συνημίτονα απλοποιείται και έχουμε  $\frac{1}{\pi \sqrt{\lambda}} \int_0^{\pi} \cos\left(\frac{n}{\lambda} - k\right)\omega d\omega = \frac{1}{\pi \sqrt{\lambda}} \int_0^{\pi} d\omega = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ . Ενώ το  $\tilde{c}_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ , καθώς

$$\sin \frac{(k\lambda + n)\pi}{\lambda} = \sin \frac{2k\lambda\pi}{\lambda} = \sin 2k\pi = 0 \text{ και ο δεύτερος όρος μηδενίζεται.}$$

Βρήκαμε ένα γενικό κανόνα, αν η αρχική κατάσταση είναι η  $k$ -στη και το πηγάδι αυξηθεί κατά  $\lambda$  φορές, αν ο αριθμός  $k\lambda$  είναι ακέραιος η πιθανότητα  $\tilde{P}_{k\lambda}$  ( $k \cdot \lambda$ -στη κατάσταση) είναι  $1/\lambda$ .

Παράδειγμα εφαρμογής της γενικής έκφρασης που βρήκαμε. Σωματίο μάζας  $m$  στην θεμελιώδη κατάσταση σε πηγάδι που τετραπλασιάζεται το πάχος του. Να βρούμε τις πιθανότητες των δύο πρώτων ενεργειακών καταστάσεων. Έχουμε  $k=1$ ,  $\lambda=4$  και  $n=1,2$ .

$$\tilde{c}_n = \frac{\sqrt{4}}{\pi(1 \cdot 4 - n)} \sin \frac{(1 \cdot 4 - n)\pi}{4} - \frac{\sqrt{4}}{\pi(1 \cdot 4 + n)} \sin \frac{(1 \cdot 4 + n)\pi}{4} = \begin{cases} \frac{2}{3\pi} \sin \frac{3\pi}{4} - \frac{2}{5\pi} \sin \frac{5\pi}{4} = \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) \sin \frac{\pi}{4} = \frac{8\sqrt{2}}{15\pi} \\ \frac{2}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{4} - \frac{2}{6\pi} \sin \frac{6\pi}{4} = \frac{1}{\pi} \left( 1 + \frac{1}{3} \right) \sin \frac{\pi}{2} = \frac{4}{3\pi} \end{cases}$$

Έτσι η αντίστοιχες πιθανότητες είναι  $\tilde{P}_1 = |\tilde{c}_1|^2 = \frac{128}{15^2 \pi^2} \approx 5.8\%$  και  $\tilde{P}_2 = |c_2|^2 = \frac{16}{9\pi^2} \approx 18\%$ .

Ακολουθώντας την μεθοδολογία αυτή μπορούμε να βρούμε την αρχική κατάσταση στο νέο πηγάδι για οποιαδήποτε αρχική κατάσταση στο αρχικό πηγάδι. Έτσι αν η αρχική κατάσταση στο πηγάδι πριν την ξαφνική αλλαγή του πάχους του είναι  $\psi(x, t=0) = \sum_k c_k \Psi_k(x)$ , η καινούργια κατάσταση θα έχει

συντελεστές που θα υπολογίζονται από την σχέση

$$\tilde{c}_n = \int_0^{\tilde{L}} \tilde{\Psi}_n^*(x) \cdot \psi(x, t=0) dx = \int_0^{\tilde{L}} \tilde{\Psi}_n^*(x) \cdot \sum_k c_k \Psi_k(x) dx = \sum_k c_k \int_0^{\tilde{L}} \tilde{\Psi}_n^*(x) \cdot \Psi_k(x) dx.$$

Δηλαδή ένας γραμμικός συνδυασμός

$$\tilde{c}_n = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} \sum_k c_k \left[ \frac{1}{(k\lambda - n)} \sin \frac{(k\lambda - n)\pi}{\lambda} - \frac{1}{(k\lambda + n)} \sin \frac{(k\lambda + n)\pi}{\lambda} \right].$$

Αν η αρχική κατάσταση στο αρχικό πηγάδι είναι μια οποιαδήποτε τυχαία συνάρτηση  $\psi^0(x)$ , τότε το πρόβλημα μπορεί να αναχθεί στην ακριβώς προηγούμενη μεθοδολογία αρκεί να βρούμε τα  $c_k$ , δηλαδή αυτά που επαληθεύουν την σχέση  $\psi^0(x) = \sum_k c_k \Psi_k(x)$ , τα οποία δεν είναι παρά τα

$$c_k = \int_0^L \Psi_k^*(x) \cdot \psi^0(x) dx.$$

### Πρόβλημα Απειρόβαθο Κβαντικό Πηγάδι 1γ ΑΚΠ1γ

Θεωρούμε απειρόβαθο κβαντικό πηγάδι πάχους  $L$ , στο οποίο βρίσκεται εγκλωβισμένο ηλεκτρόνιο μάζας  $m$  στην κατάσταση  $E_k$  ( $k=1,2,\dots$ ). Αλλάζουμε το πάχος του σωλήνα πολύ απότομα σε  $\lambda L$  ( $\lambda < 1$ ). Να βρεθεί η πιθανότητα να βρεθεί το σωματίδιο στην  $n$ -στη κατάσταση του νέου πηγαδιού, ενέργειας  $E_n$ .

Η μεθοδολογία είναι ακριβώς η ίδια, διαφοροποιούνται όμως τα όρια στα ολοκληρώματα ( $\lambda < 1$ ). Έτσι έχουμε

$$\tilde{c}_n = \int_0^{\tilde{L}} \tilde{\Psi}_n^*(x) \cdot \Psi_k(x) dx = \int_0^{\lambda L} \sqrt{\frac{2}{\lambda L}} \sin \frac{n\pi x}{\lambda L} \Theta(x) \Theta(\lambda L - x) \cdot \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{k\pi x}{L} \Theta(x) \Theta(L - x) dx =$$
$$\frac{2}{\sqrt{\lambda L}} \int_0^{\lambda L} \sin \frac{n\pi x}{\lambda L} \cdot \sin \frac{\pi x}{L} dx = \{\omega \equiv \frac{\pi x}{\lambda L}\} \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} \int_0^\pi 2 \sin n\omega \cdot \sin k\lambda\omega d\omega$$

Χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα  $2 \sin a \cdot \sin b = \cos(a - b) - \cos(a + b)$ .

$$\tilde{c}_n = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} \int_0^\pi [\cos(k\lambda - n)\omega - \cos(k\lambda + n)\omega] d\omega = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi(k\lambda - n)} \sin(k\lambda - n)\pi - \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi(k\lambda + n)} \sin(k\lambda + n)\pi$$

Συγκρίνετε με το αποτέλεσμα στην προηγούμενη περίπτωση (ΑΚΠ1β), όπου έχουμε αύξηση του πάχους του πηγαδιού ( $\lambda > 1$ ). Είναι τα αποτελέσματα αναμενόμενα; Η περίπτωση  $\lambda = 1$  (αμετάβλητο πηγάδι) αποτελεί ειδική περίπτωση των δύο τελευταίων περιπτώσεων. Δηλαδή μπορούμε να γράφουμε ότι τα αποτελέσματά μας ισχύουν για  $\lambda \leq 1$  και  $\lambda \geq 1$ .

Ακόμα καθώς

$$\tilde{\psi}(x=L, t=0) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{c}_n \tilde{\Psi}_n(x=L) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{c}_n \frac{1}{\sqrt{L}} \sin \frac{n\pi L}{2L} \Theta(L) \Theta(2L-L) = \frac{1}{\sqrt{L}} \left[ \sum_{k=0,1,\dots}^{\infty} \tilde{c}_{4k+1} - \sum_{k=1,2,\dots}^{\infty} \tilde{c}_{4k-1} \right]$$

ενώ γνωρίζουμε ότι η κυματοσυνάρτηση μηδενίζεται στο μέσο του νέου πηγαδιού,  $\tilde{\psi}(x=L, t=0) = 0$ , βρίσκουμε ότι ισχύει η ταυτότητα

$$\sum_{k=0,1,\dots}^{\infty} \tilde{c}_{4k+1} = \sum_{k=1,2,\dots}^{\infty} \tilde{c}_{4k-1} \quad [\text{i.e. } \tilde{c}_1 + \tilde{c}_5 + \tilde{c}_9 + \dots = \tilde{c}_3 + \tilde{c}_7 + \tilde{c}_{11} + \dots].$$

Μπορείτε να βρείτε άλλες ταυτότητες η και ανισότητες;