

Μάθημα 16^ο, 11 Νοεμβρίου 2008 (9:00-10:00).

ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι

Πρόχειρο Διαγώνισμα: 11 Νοεμβρίου 2008 (Διδάσκων: Α.Φ. Τερζής)

Διάρκεια εξέτασης 1 ώρα.

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

ΑΡΙΘΜΟΣ ΜΗΤΡΩΟΥ:

ΕΤΟΣ ΣΠΟΥΔΩΝ:

ΘΕΜΑ 1[4]

Σωματίο περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση $\psi(x,t) = Nxe^{-\lambda x^2/2}e^{-iEt/\hbar}$. (α)

Προσδιορίστε την μέση θέση και την αβεβαιότητα θέσης του σωματιδίου. (β) Να υπολογιστεί η μέση ενέργεια του συστήματος. (γ) Να εκτιμηθούν οι πιθανότητες

$P(x=0, t=0)$, $P(x=0, t=\hbar/E)$ και $P(x=\sqrt{1/\lambda}, t=3\hbar/E)$.

Θα σας χρειαστεί η ταυτότητα $I_{2n} = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\lambda x^2} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{(2\lambda)^n} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$, όπου

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2/2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}.$$

ΘΕΜΑ 2[3]

Ηλεκτρόνιο βρίσκεται στις δύο πρώτες ενεργειακές του καταστάσεις σε δυναμικό απειρόβαθου πηγαδιού εύρους a . (α) Προσδιορίστε πλήρως αυτή την κατάσταση αν δίνεται ότι έχει μέση θέση στο μέσο του πηγαδιού και η μέση ενεργεία του είναι $5\hbar^2/16ma^2$. (β) Να υπολογιστεί η μέση ορμή του συστήματος.

ΘΕΜΑ 3[3]

Για ηλεκτρόνιο που βρίσκεται σε δυναμικό απειρόβαθου πηγαδιού που εκτείνεται στην περιοχή $[-L/2, +L/2]$, να βρεθούν οι ιδιοκαταστάσεις του τελεστή της Χαμιλτονιανής (δηλαδή οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις της ενέργειας).

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1[4]

Σωματίο περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση $\psi(x, t) = Nxe^{-\lambda x^2/2}e^{-iEt/\hbar}$. (α) Προσδιορίστε την μέση θέση και την αβεβαιότητα θέσης του σωματιδίου. (β) Να υπολογιστεί η μέση ενέργεια του συστήματος. (γ) Να εκτιμηθούν οι πιθανότητες $P(x=0, t=0)$, $P(x=0, t=\hbar/E)$ και $P(x=\sqrt{1/\lambda}, t=3\hbar/E)$.

Θα σας χρειαστεί η ταυτότητα $I_{2n} = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\lambda x^2} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{(2\lambda)^n} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$, όπου

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2/2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}.$$

ΛΥΣΗ

Εργαζόμαστε όπως στην Άσκηση 6 του 6^{ου} κεφαλαίου, καθώς έχουμε μια στάσιμη κατάσταση καθώς η πιθανότητα δεν εξαρτάται από τον χρόνο,

$$P(x, t)dx = (\psi(x, t))^* \psi(x, t)dx = \left(Nxe^{-\lambda x^2/2}e^{-iEt/\hbar}\right)^* Nxe^{-\lambda x^2/2}e^{-iEt/\hbar}dx = \left(Nxe^{-\lambda x^2/2}\right)^2 e^{iEt/\hbar}e^{-iEt/\hbar}dx$$

$$\Rightarrow P(x, t)dx = (\psi(x))^* \psi(x)dx,$$

$$\text{όπου } \psi(x) = Nxe^{-\lambda x^2/2}$$

$$\text{Αρχικά κανονικοποιούμε την κυματοσυνάρτηση, δηλαδή } \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x)\psi(x)dx = 1$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} N^2 x^2 e^{-\lambda x^2} dx = 1 \Rightarrow \frac{N^2}{2\lambda} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} = 1 \Rightarrow N = \frac{2^{1/2} \lambda^{3/4}}{\pi^{1/4}}.$$

(α) Προφανώς $\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \psi x dx = \int_{-\infty}^{+\infty} N^2 x^3 e^{-\lambda x^2} dx = 0$, ως ολοκλήρωμα περιττής συνάρτησης.

Ενώ για την εκτίμηση της αβεβαιότητας χρειαζόμαστε την μέση τετραγωνική απόσταση,

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \psi^*(x)\psi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 N^2 x^2 e^{-\lambda x^2} dx = \left(\frac{2^{1/2} \lambda^{3/4}}{\pi^{1/4}}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-\lambda x^2} dx = \frac{3}{2\lambda}.$$

$$\text{Άρα } \Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2\lambda}\right)}$$

(β) Στάσιμη κατάσταση, έχω μια ενεργειακή στάθμη, δηλαδή η μέση ενέργεια ίση με E .

$$(γ) \text{ Έχουμε } P(x, t)dx = \left(Nxe^{-\lambda x^2/2}\right)^2 dx = \begin{cases} 0, & x=0, t=0 \\ 0, & x=0, t=\hbar/E \\ 2e^{-1}\sqrt{\lambda/\pi}dx, & x=\sqrt{1/\lambda}, t=\hbar/E \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 2[3]

Ηλεκτρόνιο βρίσκεται στις δύο πρώτες ενεργειακές του καταστάσεις σε δυναμικό απειρόβαθου πηγαδιού εύρους a . (α) Προσδιορίστε πλήρως αυτή την κατάσταση αν δίνεται ότι έχει μέση θέση στο μέσο του πηγαδιού και η μέση ενεργειά του είναι $5h^2/16ma^2$. (β) Να υπολογιστεί η μέση ορμή του συστήματος.

ΛΥΣΗ

Αντιγράφουμε από την άσκηση 12 του προηγούμενου μαθήματος (15°).

Έχουμε

$$\langle x \rangle(t=0) = |c_1|^2 x_{11} + |c_2|^2 x_{22} + 2|c_1||c_2||x_{12}|\cos(\varphi_{21}),$$

Όπου, καθώς

$$\psi_1 = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi x}{a} \Theta(x) \Theta(a-x), \psi_2 = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{2\pi x}{a} \Theta(x) \Theta(a-x), \text{ έχουμε}$$

$$\begin{aligned} x_{11} &= \int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi_1|^2 x = \frac{2}{a} \int_0^a x \sin^2 \left(\frac{\pi x}{a} \right) dx = \frac{2}{a} \int_0^a x \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi x}{a} \right) \right) dx \\ &= \frac{1}{a} \int_0^a x dx - \frac{1}{a} \int_0^a x \cos \left(\frac{2\pi x}{a} \right) dx = \frac{1}{a} \frac{a^2}{2} = \frac{a}{2} \end{aligned}$$

καθώς

$$\begin{aligned} \int_0^a x \cos \left(\frac{2\pi x}{a} \right) dx &= \frac{a}{2\pi} \int_0^a x d \left(\sin \left(\frac{2\pi x}{a} \right) \right) = \frac{a}{2\pi} \left(x \sin \left(\frac{2\pi x}{a} \right) \right) \Big|_0^a - \frac{a}{2\pi} \int_0^a \sin \left(\frac{2\pi x}{a} \right) dx \\ &= - \left(\frac{a}{2\pi} \right)^2 \cos \left(\frac{2\pi x}{a} \right) \Big|_0^a = 0 \end{aligned}$$

ανάλογα βρίσκουμε ότι $x_{22} = \frac{a}{2}$, και

$$x_{12} = \int_{-\infty}^{\infty} x dx \psi_1 x \psi_2 = \frac{2}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x \sin \left(\frac{\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{2\pi x}{a} \right) dx = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x \left(\cos \left(\frac{\pi x}{a} \right) - \cos \left(\frac{3\pi x}{a} \right) \right) dx = \frac{16a}{9\pi^2}$$

καθώς

$$\begin{aligned} \int_0^a x \cos \left(\frac{n\pi x}{a} \right) dx &= \frac{a}{n\pi} \int_0^a x d \left(\sin \left(\frac{n\pi x}{a} \right) \right) = \frac{a}{n\pi} \left(x \sin \left(\frac{n\pi x}{a} \right) \right) \Big|_0^a - \frac{a}{n\pi} \int_0^a \sin \left(\frac{n\pi x}{a} \right) dx \\ &= \left(\frac{a}{n\pi} \right)^2 \cos \left(\frac{n\pi x}{a} \right) \Big|_0^a = \begin{cases} -2 \left(\frac{a}{n\pi} \right)^2, & n=1, 3, 5, \dots \\ 0, & n=2, 4, 6, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

Έτσι από το δεδομένο ότι

$$\begin{aligned} \langle x \rangle(t=0) &= a/2 = |c_1|^2 x_{11} + |c_2|^2 x_{22} + 2|c_1||c_2||x_{12}|\cos(\varphi_{21}) = |c_1|^2 a/2 + |c_2|^2 a/2 + 2|c_1||c_2||x_{12}|\cos(\varphi_{21}) \\ &= a/2(|c_1|^2 + |c_2|^2) + 2|c_1||c_2||x_{12}|\cos(\varphi_{21}) = a/2 + 2|c_1||c_2||x_{12}|\cos(\varphi_{21}) \Rightarrow |c_1||c_2||x_{12}|\cos(\varphi_{21}) = 0 \\ &\Rightarrow \cos(\varphi_{21}) = 0 \Rightarrow \varphi_{21} = \pm \pi/2. \end{aligned}$$

Ακόμα έχουμε

$$\langle E \rangle = |c_1|^2 E_1 + |c_2|^2 E_2 = |c_1|^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} 1^2 + |c_2|^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} 2^2 = (|c_1|^2 + 4|c_2|^2) \frac{\hbar^2}{8ma^2} = \frac{5\hbar^2}{16ma^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |c_1|^2 + 4|c_2|^2 = 5/2,$$

και καθώς $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$, βρίσκουμε ότι $|c_1| = |c_2| = 1/\sqrt{2}$.

(α) Άρα $\psi(x, t) = |c_1| \psi_1(x) e^{-i \frac{E_1}{\hbar} t} + |c_2| e^{i \varphi_{21}} \psi_2(x) e^{-i \frac{E_2}{\hbar} t}$, δηλαδή

$$\psi(x, t=0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi x}{a} \pm \frac{i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{2\pi x}{a} = \frac{1}{\sqrt{a}} \sin \frac{\pi x}{a} \left[1 \pm 2i \cos \frac{\pi x}{a} \right].$$

(β) Για την μέση ορμή χρησιμοποιούμε την σχέση

$$\langle p \rangle(t=0) = 2\hbar |c_1| |c_2| |p_{12}| \cos(\varphi_{21} + \tilde{\varphi}),$$

όπου

$$\begin{aligned} p_{12} &= \int_0^a \psi_1 \hat{p} \psi_2 dx = \int_0^a \psi_1 \left(-i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right) dx = -i\hbar \int_0^a \psi_1 d\psi_2 = -\frac{2i\hbar}{a} \int_0^a \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) d \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) = \\ &= -\frac{4\pi\hbar i}{a^2} \int_0^a \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) dx = -\frac{2\pi\hbar i}{a^2} \left(\int_0^a \sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right) dx + \int_0^a \sin\left(-\frac{\pi x}{a}\right) dx \right) = \\ &= -\frac{2\pi\hbar i}{a^2} \left(\frac{2a}{3\pi} - \frac{2a}{\pi} \right) = \frac{8\hbar i}{3a} = \frac{8\hbar}{3a} e^{i\pi/2}. \end{aligned}$$

καθώς

$$\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = -\frac{a}{n\pi} \int_0^a d\left(\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\right) = -\frac{a}{n\pi} \left(\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\right) \Big|_0^a = \begin{cases} +\frac{2a}{n\pi}, & n=1,3,5,\dots \\ 0, & n=2,4,6,\dots \end{cases}$$

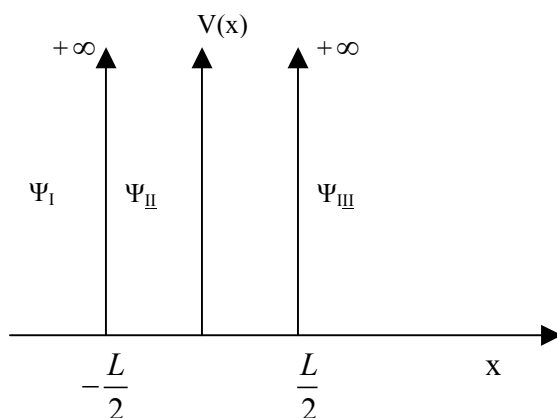
Δηλαδή

$$\langle p \rangle(t=0) = 2\hbar |c_1| |c_2| |p_{12}| \cos(\varphi_{21} + \tilde{\varphi}) = 2\hbar \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{8}{3a}\right) \cos(\pm\pi/2 + \pi/2) = \pm \frac{8\hbar}{3a}.$$

ΘΕΜΑ 3[3]

Για ηλεκτρόνιο που βρίσκεται σε δυναμικό απειρόβαθου πηγαδιού που εκτείνεται στην περιοχή $[-L/2, +L/2]$, να βρεθούν οι ιδιοκαταστάσεις του τελεστή της Χαμιλτονιανής (δηλαδή οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις της ενέργειας).

ΛΥΣΗ



A' Μέθοδος

Για την περιοχή II, θεωρώ λύση της μορφής, $\psi_{II}(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ (11^ο μάθημα).

Συνοριακές συνθήκες

$$x = -\frac{L}{2} : \Psi_I(-\frac{L}{2}) = \Psi_{II}(-\frac{L}{2}) \rightarrow 0 = Ae^{-ik\frac{L}{2}} + Be^{ik\frac{L}{2}}$$

$$x = +\frac{L}{2} : \Psi_{II}(+\frac{L}{2}) = \Psi_{III}(+\frac{L}{2}) \rightarrow Ae^{ik\frac{L}{2}} + Be^{-ik\frac{L}{2}} = 0$$

Δηλαδή υπό μορφή πίνακα

$$\begin{pmatrix} e^{-ik\frac{L}{2}} & e^{ik\frac{L}{2}} \\ e^{ik\frac{L}{2}} & e^{-ik\frac{L}{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Έχουμε ένα ομογενές σύστημα εξισώσεων με δύο αγνώστους, A και B . Για να έχει το σύστημα μη μηδενική λύση, πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών να είναι μηδέν,

$$\det \begin{pmatrix} e^{-ik\frac{L}{2}} & e^{ik\frac{L}{2}} \\ e^{ik\frac{L}{2}} & e^{-ik\frac{L}{2}} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (e^{-ik\frac{L}{2}})^2 - (e^{ik\frac{L}{2}})^2 = e^{-ikL} - e^{ikL} = 0 \Rightarrow -2i\sin kL = 0 \Rightarrow kL = n\pi \Rightarrow$$

$$\boxed{k = \frac{n\pi}{L}}. \text{ Όπου } n, \text{ είναι ένας θετικός ακέραιος.}$$

Δηλαδή βρίσκουμε την ίδια συνθήκη που βρήκαμε και στο μάθημα για το απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού. Από την οποία βρίσκω προφανώς τις ίδιες ιδιοτιμές ενέργειας,

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2mL^2}.$$

Τώρα ισχύει από τις συνοριακές συνθήκες ότι $A e^{-i\frac{n\pi}{2}} + B e^{i\frac{n\pi}{2}} = 0 \Rightarrow \boxed{A = -B e^{in\pi}}$
 Παρατηρούμε ότι η σχέση μεταξύ των A και B εξαρτάται από το n.

- Αν n=άρτιος $\rightarrow n=2m$
 τότε $\boxed{A = -B}$
- Αν n=περιττός $\rightarrow n=2m+1$
 τότε $\boxed{A = B}$

Συνεπώς,

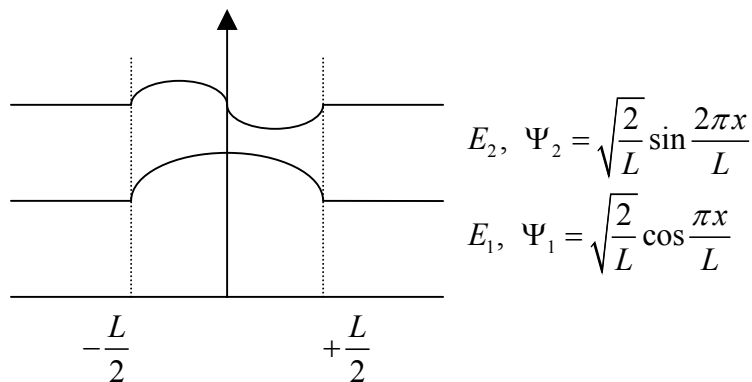
Αν $\boxed{n = 2m}$ (άρτιος)

$$\Rightarrow \Psi = A(e^{ikx} - e^{-ikx}) \Rightarrow \boxed{\Psi = 2iA \sin kx}$$

Αν $\boxed{n = 2m+1}$ (περιττός)

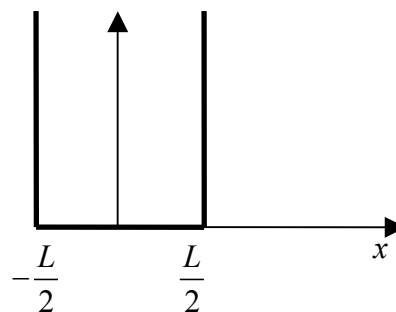
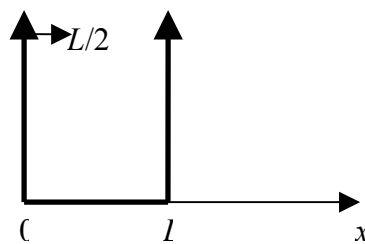
$$\Rightarrow \Psi = A(e^{ikx} + e^{-ikx}) \Rightarrow \boxed{\Psi = 2A \cos kx}$$

$$\text{Άρα η λύση είναι } \Psi_n(x) = \begin{cases} 0, & |x| > \frac{L}{2} \\ \sqrt{\frac{2}{L}} \cos \frac{n\pi x}{L}, & n = 1, 3, 5 \\ \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}, & n = 2, 4, 6 \end{cases}$$



B' Μέθοδος

Μπορώ από τα αποτελέσματα του πηγαδιού που εκτείνεται από 0 έως L να πάω στα αποτελέσματα για πηγάδι από $-\frac{L}{2}$ έως $\frac{L}{2}$, με πολύ γρήγορο τρόπο. Αρκεί να 'σπρώξω' το σύστημα κατά $\frac{L}{2}$, δηλαδή να μετακινήσω τον άξονα x κατά $\frac{L}{2}$.



Κάθε συνάρτηση στο καινούργιο σύστημα, μπορεί να προέρθει από την συνάρτηση στο παλιό σύστημα με την αντικατάσταση του x από το $x + L/2$.

Έτσι έχουμε τις ιδιοσυναρτήσεις να γίνονται,

$$\sin \frac{n\pi}{L} \left(x + \frac{L}{2} \right) = \sin \left(\frac{n\pi x}{L} + \frac{n\pi}{2} \right) = \begin{cases} \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right), n = 2m \\ \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right), n = 2m + 1 \end{cases}.$$

Δηλαδή οι λύσεις είναι τις μορφής

$$\Psi_n(x) = \begin{cases} 0, & |x| > \frac{L}{2} \\ \sqrt{\frac{2}{L}} \cos \frac{n\pi x}{L}, & n = 1, 3, 5 \\ \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}, & n = 2, 4, 6 \end{cases}$$

Με προφανώς ίδιες ιδιοτιμές της ενέργειας: $E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n^2$