

Μάθημα 12^ο, 29 Οκτωβρίου 2008 (9:00-10:00).

ΦΥΣΙΚΗ ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ ΣΤΟ ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ ΤΗΣ ΚΥΜΑΤΟΣΥΝΑΡΤΗΣ.

$$\Psi(x, t) = \sum_n c_n \Psi_n(x) e^{-iE_n t / \hbar}.$$

Παράδειγμα. **Άσκηση 8**

Έστω ένα κβαντικό σύστημα που χαρακτηρίζεται από δύο ιδιοκαταστάσεις ενέργειας E_1 και E_2 . Να βρεθεί η μέση ενέργεια του συστήματος.

Έχουμε $\Psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \psi_n(x) e^{-i \frac{E_n}{\hbar} t} = C_1 \psi_1(x) e^{-i \frac{E_1}{\hbar} t} + C_2 \psi_2(x) e^{-i \frac{E_2}{\hbar} t}$. Οπότε η μέση

ενέργεια υπολογίζεται από την σχέση

$$\begin{aligned} \langle \hat{E} \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x, t) \hat{H} \Psi(x, t) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[C_1 \psi_1 e^{-i \frac{E_1 t}{\hbar}} + C_2 \psi_2 e^{-i \frac{E_2 t}{\hbar}} \right]^* \hat{H} \left[C_1 \psi_1 e^{-i \frac{E_1 t}{\hbar}} + C_2 \psi_2 e^{-i \frac{E_2 t}{\hbar}} \right] dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[C_1^* \psi_1^* e^{+i \frac{E_1 t}{\hbar}} + C_2^* \psi_2^* e^{+i \frac{E_2 t}{\hbar}} \right] \left[C_1 e^{-i \frac{E_1 t}{\hbar}} \hat{H} \psi_1 + C_2 e^{-i \frac{E_2 t}{\hbar}} \hat{H} \psi_2 \right] dx = \end{aligned}$$

Ξέρω πως $\hat{H} \psi_1(x) = E_1 \psi_1(x)$, $\hat{H} \psi_2(x) = E_2 \psi_2(x)$ οπότε

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[C_1^* \psi_1^* e^{+i \frac{E_1 t}{\hbar}} + C_2^* \psi_2^* e^{+i \frac{E_2 t}{\hbar}} \right] \left[C_1 e^{-i \frac{E_1 t}{\hbar}} E_1 \psi_1 + C_2 e^{-i \frac{E_2 t}{\hbar}} E_2 \psi_2 \right] dx$$

Δηλαδή

$$\begin{aligned} \langle \hat{E} \rangle &= E_1 C_1^* C_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^* \psi_1 dx + E_2 C_1^* C_2 e^{+i \frac{(E_1 - E_2)t}{\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^* \psi_2 dx + \\ &+ E_1 C_2^* C_1 e^{+i \frac{(E_2 - E_1)t}{\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_2^* \psi_1 dx + E_2 C_2^* C_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_2^* \psi_2 dx \end{aligned}$$

$$\text{Ξέρω πως } \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^* \psi_m dx = \delta_{nm} \rightarrow \text{σχέση ορθογωνιότητας ιδιοσυναρτήσεων}$$

$$\text{Και έτσι καταλήγω πως } \langle \hat{E} \rangle = E_1 |C_1|^2 + E_2 |C_2|^2$$

Ποια η **Φυσική σημασία των συντελεστών;**

$$\text{Καθώς } \langle \hat{E} \rangle = P_1 E_1 + P_2 E_2.$$

$|C_i|^2 = P_i$, δηλαδή οι συντελεστές σχετίζονται με την πιθανότητα να έχω την ιδιοκατάσταση του συστήματος.

ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ, ΦΥΣΙΚΩΝ ΠΟΣΟΤΗΤΩΝ.

Από τον ορισμό της μέσης τιμής έχω

$$\begin{aligned}\langle A \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, t) \hat{A} \psi(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} C_n \psi_n(x) e^{-i \frac{E_n}{\hbar} t} \right]^* \hat{A} \sum_{m=1}^{\infty} C_m \psi_m(x) e^{-i \frac{E_m}{\hbar} t} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \psi_n^*(x) e^{i \frac{E_n}{\hbar} t} \right] \left[\sum_{m=1}^{\infty} C_m e^{-i \frac{E_m}{\hbar} t} (\hat{A} \psi_m(x)) \right] dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_n^* C_m e^{i \frac{(E_n - E_m)}{\hbar} t} \psi_n^*(x) (\hat{A} \psi_m(x)) dx = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_n^* C_m e^{i \frac{(E_n - E_m)}{\hbar} t} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x) (\hat{A} \psi_m(x)) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_n^* C_m e^{i \frac{(E_n - E_m)}{\hbar} t} A_{nm}\end{aligned}$$

όπου

$$A_{nm} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x) (\hat{A} \psi_m(x)) dx.$$

Η σχέση αυτή είναι πολύ σημαντική γιατί και την ξαναγράφουμε

$$\langle A \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_n^* C_m e^{i \frac{(E_n - E_m)}{\hbar} t} A_{nm}$$

ΑΠΟ ΑΥΤΗ ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΥΜΕ ΤΗΝ ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΟΠΟΙΟΔΗΠΟΤΕ ΦΥΣΙΚΟΥ ΜΕΓΕΘΟΥΣ(A) ΠΟΥ ΠΕΡΙΓΡΑΦΕΤΑΙ ΑΠΟ ΤΟΝ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΟ ΕΡΜΙΤΙΑΝΟ ΤΕΛΕΣΤΗ (\hat{A}), ΑΝ ΕΧΟΥΜΕ ΛΥΣΗ ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΚΑΙ ΓΝΩΡΙΖΟΥΜΕ ΤΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΣΤΟ ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ ΤΗΣ ΚΥΜΑΤΟΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ.