

Μάθημα 3^ο, 2 Οκτωβρίου 2008 (9:00-11:00).

ΑΤΟΜΟ ΥΔΡΟΓΟΝΟΥ. ΜΟΝΤΕΛΟ ΒΟΗΡ.

Φάσμα του υδρογόνου (1913)

Γραμμικό φάσμα

Bohr: εξήγησε την ακτινοβολία του ατόμου H_2 .

Rutherford: πυρήνας συγκεντρωμένος σε μικρή περιοχή ($D \sim 10^{-15} \text{m}$)

Απόσπαση e^- πυρήνα: ($\text{\AA} = 10^{-10} \text{m}$).

Άτομο: e^- και e^+ (ποζιτρόνιο).

Η στροφορμή των κυκλικών τροχιών πρέπει να είναι κβαντισμένη.

$$L = n\hbar, n=1,2,3,\dots$$

(ακέραιο πολλαπλάσιο της σταθεράς του Planck).

Η συνολική
ενέργεια του
συστήματος:

$$E = \frac{P_p^2}{2m_p} + \frac{P_e^2}{2m_e} + V$$

Αλλά: $\frac{P_p^2}{2m_p} = 0$, γιατί m_p

$\gg m_e$

και $P_e = mv$

και $V = -K_c \frac{e^2}{r}$

Άρα $E = \frac{1}{2}mv^2 - K_c \frac{e^2}{r}$

$$K_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{r}$$

Το αρνητικό πρόσημο στη δυναμική ενέργεια υπάρχει διότι πρέπει να δοθεί έργο στο ηλεκτρόνιο (e^-) με σκοπό να πάει στο άπειρο, όπου εκεί η δυναμική ενέργεια είναι μηδέν. Δηλαδή, όταν $r \rightarrow \infty$, τότε $V=0$.

Ηλεκτροστατική δύναμη = Κεντρομόλος δύναμη (για να έχω κυκλική κίνηση)

$$\frac{e^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow \frac{e^2}{r} = mv^2$$

$$\text{Στροφορμή: } \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$mvr = n\hbar$$

$$\text{Άρα: } \left. \begin{array}{l} m v = \frac{n \hbar}{r} \\ m v^2 = \frac{e^2}{r} \end{array} \right\} \Rightarrow v = \frac{e^2}{\hbar n} \xrightarrow{(\div c)} \frac{v}{c} = \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right) \frac{1}{n}$$

Άρα η ταχύτητα μειώνεται όταν το n αυξάνεται

$$n=1: \frac{v}{c} = \frac{e^2}{\hbar c}$$

$$n=2: \frac{v}{c} = \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right) \frac{1}{2}$$

$$n=3: \frac{v}{c} = \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right) \frac{1}{3}$$

$v \ll c \rightarrow$ Δεν ισχύουν οι εκφράσεις στην σχετικιστική κίνηση, γιατί εκεί ισχύει ότι $v \approx c$.

$$\frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137} \quad \text{ΣΤΑΘΕΡΑ ΛΕΠΤΗΣ ΥΦΗΣ}$$

$$mvr = n\hbar \Rightarrow r = \frac{n\hbar}{mv} \Rightarrow r = \frac{n\hbar}{m \left(\frac{e^2}{\hbar} \right) \frac{1}{n}} = \frac{\hbar^2}{me^2} n^2 \Rightarrow r = \left(\frac{\hbar^2}{me^2} \right) n^2 \Rightarrow r = r_0 \cdot n^2$$

$$\Rightarrow r_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} = 0,529 \text{ \AA} \quad \text{ΑΚΤΙΝΑ BOHR}$$

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{e^2}{r} \xrightarrow{\frac{e^2}{r} = m v^2} E = \frac{1}{2} \frac{e^2}{r} - \frac{e^2}{r} \Rightarrow E = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{r}$$

$$\xrightarrow{r = \left(\frac{\hbar^2}{me^2} \right) n^2} E = -\frac{me^4}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2}$$

Όπου $E_0 = -\frac{me^4}{2\hbar^2} = 13,6 \text{ eV}$: ενέργεια ιονισμού (η ελάχιστη ενέργεια που πρέπει να δοθεί στο ηλεκτρόνιο για να πάει στο άπειρο).

Άρα εξήγησε το φάσμα του ατόμου του H₂.

$$\text{ΣΥΝΕΠΩΣ, } r = \left(\frac{\hbar^2}{me^2} \right) n^2$$

$$\frac{v}{c} = \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right) \frac{1}{n}$$

$$E = -\frac{me^4}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2}$$

Υδρογονοειδές άτομο (H-like Bohr Atom)

Μπορούμε να εξηγήσουμε το φάσμα των **υδρογονοειδών**, δηλαδή ιόντα που έχουν χάσει όλα τα e⁻, εκτός από 1e⁻ (π.χ. το άτομο του He που έχει χάσει ένα ηλεκτρόνιο).

ΔΙΑΦΟΡΑ

Το φορτίο του πυρήνα (έχουμε τόσα πρωτόνια όσα και τα ηλεκτρόνια, ο αριθμός τους είναι ίσος με τον ατομικό αριθμό).

Άρα το $\frac{mv^2}{r} = \frac{e \cdot e}{r^2}$ θα γίνει: $\frac{mv^2}{r} = \frac{Ze^2}{r^2}$

το $E = \frac{mv^2}{2} - \frac{e^2}{r}$ θα γίνει: $E = \frac{mv^2}{2} - \frac{Ze^2}{r}$

αλλά η στροφορμή θα μείνει ίδια: $mvr = n\hbar \Rightarrow mv = \frac{n\hbar}{r}$

άρα $v = \frac{Ze^2}{\hbar n} \Rightarrow \frac{v}{c} = Z \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right) \frac{1}{n}$

- Αν $Z \gg 1$ τότε $v \approx c$

$$r = \frac{n\hbar}{mv} = \frac{n\hbar}{Zm \frac{1}{\hbar n}} \Rightarrow r = \frac{1}{Z} \left(\frac{\hbar^2}{me^2} \right) n^2$$

Άρα όσο μεγάλο είναι το άτομο η ακτίνα θα γίνει μικρότερη.

$$E = -\left(\frac{me^2}{2\hbar^2} \right) Z \cdot \frac{1}{n^2}$$

Άτομο Positronium (ζεύγος Ηλεκτρονίου-Ποζιτρονίου)

Όταν ΥΛΗ και ΑΝΤΙΥΛΗ έρθουν σε επαφή \rightarrow ακτινοβολία.

$m_p \gg m_e \rightarrow$ θεωρώ ότι είναι ακίνητες.

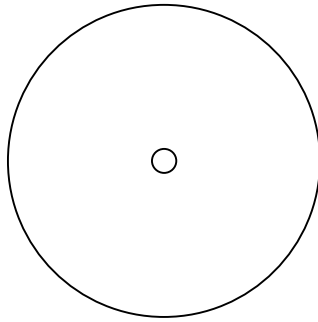
$m_e^+ \approx m_e^- \rightarrow$ άρα δεν αρκεί η θεωρία που είπαμε πριν.

\rightarrow άρα **Ανηγγμμένη μάζα**.

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m} = \frac{2}{m}$$

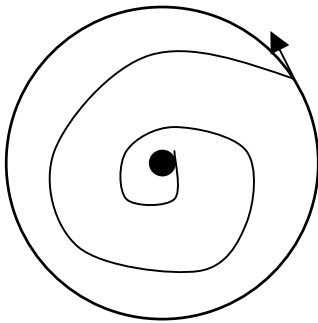
άρα $\mu = \frac{m}{2}$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \rightarrow \mu = \frac{m_e \cdot m_p}{(m_e + m_p)}$$



Positronium atom

Άτομο Η



Για να έχω ακτινοβολία θα πρέπει να επιταχύνεται, αλλά αφού η ταχύτητα (μέτρο) είναι σταθερό αλλά αλλάζει η διεύθυνση \rightarrow άρα **επιτάχυνση**.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Ιδιοτροπία του μικρόκοσμου, το φορτίο ακτινοβολεί χωρίς να χάνει ενέργεια και δεν πέφτει στον πυρήνα. ΑΛΛΑ ΠΑΡΑΜΕΝΕΙ ΣΕ ΣΤΑΘΕΡΕΣ ΚΥΚΛΙΚΕΣ, ΜΕ ΚΑΘΟΡΙΣΜΕΝΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ.

Στροφορμή: κβαντισμένη

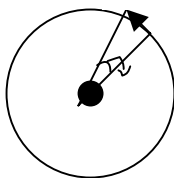
$$\mathbf{L} = \mathbf{n} \cdot \hbar$$

\hbar = διαστάσεις στροφορμής.

Bohr-Sommerfeld (γενίκευση και σε μη κυκλικές τροχιές)

$$\oint \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} = n \cdot h$$

ΠΡΟΤΥΠΟ BOHR



Άτομο Η

κυκλική κίνηση

$$p = m \cdot v = m r \omega \quad (v = \omega \cdot r)$$

$$\text{άρα} \quad \oint m r \omega \cdot r d\phi = n h$$

$$m r^2 \omega \oint d\phi = 2\pi \cdot m r^2 \omega = n h$$

$$m r^2 \omega = L = n \hbar$$

$$E = \frac{p^2}{2m} + V_{(x)} \Rightarrow \frac{p^2}{2m} = E - V_{(x)} \Rightarrow \boxed{p = \sqrt{2m(E - V_{(x)})}}$$

ΑΤΟΜΟ ΥΔΡΟΓΟΝΟΥ. ΜΟΝΤΕΛΟ ΒΟΗΡ.

Αν πάρουμε τους τύπους της σχετικότητας, πού θα καταλήξουμε;

Συνολική ενέργεια συστήματος: $E = Mc^2 + \sqrt{m^2 c^4 + P^2 c^2} - \frac{Ze^2}{r}$

$$E = Mc^2 + \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{Ze^2}{r} \quad (1)$$

Κεντρομόλος δύναμη = δύναμη μεταξύ ηλεκτρονίου και πρωτονίου.

$$\vec{F}_\kappa = \vec{F}_{e-p} \Rightarrow \vec{F}_\kappa = \frac{d\vec{P}}{dt} \Rightarrow \vec{F}_\kappa = \frac{d}{dt} \left[\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right] \Rightarrow \vec{F}_\kappa = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\text{άρα } \frac{mv^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot r} = \frac{Ze^2}{r^2} \Rightarrow \frac{mv^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{Ze^2}{r} \quad (2)$$

$$\text{Στροφορμή: } L = n\hbar = rp = \frac{mr v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

e⁻-p: Όταν ένα από τα δύο φορτία είναι ακίνητο, τότε ισχύει η κλασική έκφραση. Άρα θεωρούμε ότι ο πυρήνας είναι ακίνητος.

$$\text{άρα } \frac{mr v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = n\hbar \quad (3)$$

$$\frac{(2)}{(3)} \Rightarrow v = \frac{Ze^2}{\hbar n} \rightarrow \frac{v}{c} = Z \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right) \frac{1}{n}$$

και με σχετικιστική προσέγγιση βρήκαμε το ίδιο αποτέλεσμα με την κλασική προσέγγιση!

$$\alpha = \frac{1}{137} \quad \text{Σταθερά λεπτής υφής}$$

Άρα τουλάχιστον για το άτομο του H ισχύει ότι η ταχύτητα του ηλεκτρονίου είναι πάντα μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός ($v_e \ll c$).

Αλλά πρέπει $Z \leq 137$ για να ισχύουν οι σχετικιστικές εκφράσεις.

$$\text{Άρα } \frac{v}{c} = \frac{Z\alpha}{n}$$

$$(3): r = n\hbar \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{cm\left(\frac{v}{c}\right)} = \frac{\hbar n}{mc} \frac{\sqrt{1 - \frac{Z^2 a^2}{n^2}}}{\frac{Za}{n}} = \frac{\hbar n^2}{mcZa} \sqrt{1 - \frac{Z^2 a^2}{n^2}}$$

Η ακτίνα εξαρτάται από το Z και το n .

$$\text{Για } n=1: \sqrt{1 - \frac{Z^2 a^2}{n^2}} \Rightarrow \sqrt{1 - Z^2 a^2} > 0$$

$$\boxed{Z > \frac{1}{a} = 137}$$

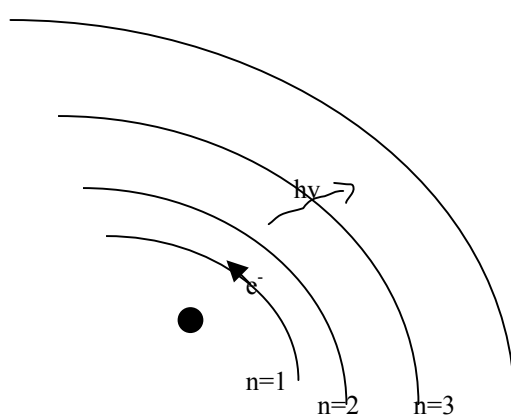
άρα \exists περιορισμός για το μαζικό αριθμό πρωτονίων που \exists σε ένα άτομο.

- Αν η συνολική ενέργεια του e^- είναι $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, τότε η κινητική ενέργεια είναι

$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - mc^2$$

- Στον H/M είχαμε δει ότι το φορτίο είναι *KBANTISMENO*.
- Στην *Κλασική* είχαμε δει παράδειγμα κβάντωσης στα ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ, π.χ. σε μια χορδή $\lambda n = L$.

Bohr



$$h\nu = E_2 - E_1$$

$$h\nu = E_3 - E_1$$

ΤΟ ΣΧΕΤΙΚΙΣΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ BOHR, ΥΠΑΡΧΕΙ ΩΣ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ ΘΕΩΡΙΑΣ (άρθρο διδάσκοντα στο EJP στην ιστοσελίδα του μαθήματος με το όνομα Σχετικιστικό_Μοντέλο_Bohr).

Άσκηση 2

Να συγκρίνετε τα μήκη κύματος De Broglie, για τις διάφορες τροχιές των ηλεκτρονίων με τις διαστάσεις της τροχιάς.

(α) Για το 'κλασικό' μοντέλο Bohr

(α) Για το 'σχετικιστικό' μοντέλο Bohr.

**ΝΑ ΓΙΝΟΥΝ ΟΛΕΣ ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΣΥΓΚΡΙΣΕΙΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ (π.χ.,
διαλέξτε την πρώτη στάθμη)
.....ΓΙΑ ΝΑ ΕΞΑΣΚΗΘΕΙΤΕ ΣΤΙΣ ΠΡΑΞΕΙΣ (ΜΗ ΤΙΣ ΑΠΟΦΕΥΓΕΤΕ!).**

Από τις σημειώσεις των Ε. Τακτικού, Δ. Γαβρέλα, (ακ. Έτος 2007-2008).