

## Μάθημα 6<sup>ο</sup>, 9 Οκτωβρίου 2008 (9:00-11:00).

### **ΧΡΗΣΗ ΚΥΜΑΤΟΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ.**

Αφού η κυματοσυνάρτηση δίνει την πιθανότητα εύρεσης του σωματιδίου  $m$  στην θέση  $x$  έως  $x+dx$  για μια οποιαδήποτε χρονική στιγμή  $t$

$$\text{Πρέπει } \int_{-\infty}^{+\infty} P(x,t)dx = 1, \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x,t)\psi(x,t)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x,t)|^2 dx.$$

Αν  $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x,t)|^2 dx \neq 1$ , λέμε ότι δεν είναι νορμαλισμένη.

*ΚΑΝΟΝΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΚΥΜΑΤΟΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ Ή ΝΟΡΜΑΛΙΣΜΟΣ.*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x,t)\psi(x,t)dx = C (\neq 1) \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\psi(x,t)}{\sqrt{C}} \right)^* \left( \frac{\psi(x,t)}{\sqrt{C}} \right) dx = 1$$

Δηλαδή η νορμαλισμένη κυματοσυνάρτηση είναι η  $\left( \frac{\psi(x,t)}{\sqrt{C}} \right)$ .

Για να υπάρχει η συνάρτηση αυτή πρέπει  $C$  να είναι πεπερασμένο (όχι άπειρο).

ΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΟΠΟΙΕΣ  $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x,t)\psi(x,t)dx = C (\neq \infty)$  ΛΕΓΟΝΤΑΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΜΕΣ, ΚΑΙ ΕΙΝΑΙ ΑΥΤΕΣ ΠΟΥ ΧΡΕΙΑΖΟΜΑΣΤΕ ΣΤΗΝ ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ.

ΠΡΟΦΑΝΩΣ ΓΙΑ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΜΙΑ (ΚΥΜΑΤΟ)ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ. ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΜΗ ΠΡΕΠΕΙ  $\psi(x \rightarrow \pm\infty, t) = 0$  (εξαίρεση το ελεύθερο σωματίο).

### **ΜΕΣΕΣ ΤΙΜΕΣ.**

#### Μέση θέση.

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} xP(x,t)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x\psi^*(x,t)\psi(x,t)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x|\psi(x,t)|^2 dx.$$

#### Άσκηση 6.

Έστω ότι η κυματοσυνάρτηση ενός συστήματος είναι  $\psi(x) = Ne^{-\frac{\lambda x^2}{2}}$ .

Να βρεθεί η μέση θέση του σωματιδίου.

Δεν είναι πρόβλημα που η κυματοσυνάρτηση είναι πραγματική, το μιγαδικό μέρος είναι κάπου κρυμμένο στην χρονική εξάρτηση (θα τα πούμε για αυτό σύντομα, σε μελλοντικό μάθημα, π.χ. μπορεί  $\psi(x,t) = \psi(x)e^{i\omega t}$  (μιγαδική) και  $\psi(x)$  η κυματοσυνάρτηση όταν  $t=0$ ).

Αφού  $e^{-\frac{\lambda x^2}{2}} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$  η κυματοσυνάρτηση είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη.

Ελέγχουμε αν είναι νορμαλισμένη η  $\psi(x)$

Για να είναι νορμαλισμένη θα πρέπει  $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x)\psi(x)dx = 1$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} N^2 e^{-\lambda x^2} dx = 1 \rightarrow \text{συνθήκη για να είναι νορμαλισμένη}$$

$$\text{αφού } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x^2} dx = 1 = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$$

$$\text{Οπότε έχω } N^2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}} \Rightarrow N = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/4}$$

Συμπεραίνουμε πως για να είναι νορμαλισμένη πρέπει  $N = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/4}$

$$\text{Έτσι καταλήγουμε πως } \langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \psi x dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^2 x dx = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x^2} x dx$$

Τώρα το ολοκλήρωμα το λύνουμε κατά παράγοντες ή χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες από περιττές και άρτιες συναρτήσεις, δηλαδή

$$g(-x) = -g(x) \Rightarrow \text{περιττή συνάρτηση}$$

$$g(-x) = g(x) \Rightarrow \text{άρτια συνάρτηση}$$

Και βρίσκουμε  $\langle x \rangle = 0$ .

Αναμενόμενο και από φυσικής άποψης, καθώς έχω εμφάνιση θετικών και αρνητικών αποστάσεων με ίση πιθανότητα.

### Προαιρετική άσκηση (homework)

### ΚΑΝΤΕ ΟΛΕΣ ΤΙΣ ΠΡΑΞΕΙΣ, ΜΟΝΟΙ ΣΑΣ ΚΑΙ ΛΕΠΤΟΜΕΡΩΣ

#### Μέση τιμή τετραγώνου θέσης.

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 P(x,t) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \psi^*(x,t) \psi(x,t) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |\psi(x,t)|^2 dx.$$

(α) για προηγούμενο πρόβλημα.

(β)

$$\text{Έστω } \psi(x,t) = e^{\frac{-\lambda(x-x_0)^2}{2}} \text{ αναμένουμε ότι } \langle x \rangle = x_0$$

$$\text{Απέδειξε το από την σχέση } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-\lambda(x-x_0)^2}{2}} x dx.$$

(γ) Πόσο είναι το  $\langle x^2 \rangle$ ;