

ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΣΤΡΟΦΟΡΜΗΣ

Εκφράζουμε τους τελεστές των συνιστωσών της στροφορμής,  $l_x, l_y, l_z$  σε σφαιρικές συντεταγμένες.

Βρίσκουμε  $l_x = i\hbar (\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\theta}{\tan\theta} \frac{\partial}{\partial\phi})$ ,  $l_y = i\hbar (-\cos\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\sin\theta}{\tan\theta} \frac{\partial}{\partial\phi})$ , και  $l_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial\phi}$ .

Μεταίς από αρκετές πράξεις βρίσκουμε ότι  $l^2 (= l_x^2 + l_y^2 + l_z^2)$  δίνεται από

$$l^2 = -\hbar^2 \left[ \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right] \quad \textcircled{+}$$

Το πρόβλημα ιδιοτεριών του  $l_z$  έχει λύση σε προηγούμενο μάθημα  $l_z \Phi(\phi) = m\hbar \Phi(\phi)$  ή  $\Phi(\phi) = e^{im\phi}$  (μικτεράτος). Τότε η  $\textcircled{+}$  παίρνει την μορφή  $-\hbar^2 \left[ \frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \sin\theta \frac{d}{d\theta} \right] - \frac{m^2}{\sin^2\theta} (\equiv \Lambda \text{ ένας νέος τελεστής})$

Πρακτικά και του  $\Lambda$  έχουμε λύσει το πρόβλημα ιδιοτεριών καθώς είναι το μέρος της χαμιλιτονιανής στην διαδικασία κυριζορμής μετεβλητών του ατόμου του H (βλέπε σε μάθημα) που εταρτάται από θ.

Από την σχέση  $\textcircled{A}$  (σε μάθημα) βρίσκουμε  $\Lambda \Theta(\theta) = l(l+1) \Theta(\theta)$ .

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι οι κοινές ιδιοσυναρτήσεις των  $l^2$  και  $l_z$  είναι

$$l^2 Y_{lm}(\theta, \phi) = \hbar^2 l(l+1) Y_{lm} \text{ και } l_z Y_{lm}(\theta, \phi) = \hbar m Y_{lm}, \quad m: \text{ακέραιο}, |m| \leq l$$

ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΣΤΡΟΦΟΡΜΗΣ

Από την ΚΒΑΝΤΟ I έχουμε βρει ότι  $[l_i, l_j] = i\epsilon_{ijk} l_k$ , όπου ο  $\epsilon_{ijk}$  είναι ο πλήρως αντισυμμετρικός τανυστής με μη μηδενικά στοιχεία τα  $\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1$  και  $\epsilon_{132} = \epsilon_{321} = \epsilon_{213} = -1$ . Δηλαδή πρακτικά έχουμε

$[l_x, l_y] = i l_z$ ,  $[l_y, l_z] = i l_x$ , και  $[l_z, l_x] = i l_y$  (Στις παραπάνω σχέσεις έχουμε θεωρήσει ότι  $\hbar = 1$ , δια να είναι οι εκφράσεις κομψότερες και καθώς η επαναφορά στις συνήθεις μονάδες είναι πολύ απλή για και το  $\hbar$  έχει μονάδες στροφορμής).

Η 'λογική' στην αλγεβρική θεωρία είναι ανάλοχη με αυτή που αληπεζε γαρ στην ΚΒΑΝΤΟ I στην αντιστοιχία θεωρία (αλγεβρική) για του αρμονικού ταλαντωτή. και εδώ ξεκινάμε από την παρατήρηση ότι  $l^2 = l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 = (l_x + i l_y)(l_x - i l_y) + l_z^2$  αν τα  $l_x, l_y, l_z$  ήταν πραγματικοί αριθμοί. Τώρα που είναι τελεστές, οι οποίοι δεν ήταν τίθεται, πρέπει να είμαστε λίγο πιο προσεκτικοί.

Έτσι ορίζουμε (όπως πρακτικά 'αναχωρούμε') η  $\textcircled{+}$  τους τελεστές  $l_+$  και  $l_-$  οι οποίοι δεν είναι ερμιτιανοί,  $l_+ = l_x + i l_y$ ,  $l_- = l_x - i l_y$ .

Βρίσκουμε εύκολα ότι  $[l_z, l_+] = [l_z, l_x + i l_y] = [l_z, l_x] + i [l_z, l_y] = i l_y + l_x = l_+ \textcircled{1}$  και ανάλοχα  $[l_z, l_-] = -l_- \textcircled{2}$ . Ενώ  $l_+ l_- = (l_x + i l_y)(l_x - i l_y) = l_x^2 + l_y^2 - i(l_x l_y - l_y l_x) = l_x^2 + l_y^2 - i[l_x, l_y] = l_x^2 + l_y^2 - i(i l_z) = l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 = l^2 - l_z(l_z - 1) \textcircled{3}$ . Από τις  $\textcircled{1}, \textcircled{2}$  και  $\textcircled{3}$  βρίσκουμε τις ιδιοτιμές των  $l_+$  και  $l_-$ .

Π.χ. (προσοχή! όπως και στον αρμονικό ταλαντωτή, θυμηθείτε τον φορμ. Δινασλ) Έτσι  $l^2 Y_{lm} = l(l+1) Y_{lm}$  γράφεται  $l^2 |l, m\rangle = l(l+1) |l, m\rangle$  και  $l_z |l, m\rangle = m |l, m\rangle$   $\{Y_{lm} = |l, m\rangle\}$

Από  $\textcircled{1}$   $l_+ |l, m\rangle = [l_z, l_+] |l, m\rangle = l_z l_+ |l, m\rangle - l_+ l_z |l, m\rangle \Rightarrow l_z [l_+ |l, m\rangle] = (m+1) [l_+ |l, m\rangle]$ . Άρα

$$l_+ |l, m\rangle = C_{lm} |l, m+1\rangle \text{ Τελεστής αναβιβασμού (αυξάνει το } m \text{ κατά } 1)$$

$$\text{Ανάλοχα (από } \textcircled{2}) \quad l_- |l, m\rangle = C'_{lm} |l, m-1\rangle, \text{ τελεστής υποβιβασμού (μείωση } m \text{ κατά } 1)$$

Για να βρούμε τα  $C_{lm}$  και  $C'_{lm}$  χρησιμοποιούμε την  $\textcircled{3}$ , δηλαδή  $\langle l, m | l_+ l_- | l, m \rangle = \langle l, m | l^2 - l_z(l_z - 1) | l, m \rangle = l(l+1) - m(m-1) \Rightarrow C'_{lm} = \sqrt{l(l+1) - m(m-1)}$  καθώς  $\langle l, m | l_- = (l_- | l, m \rangle)^*$  και από  $\textcircled{3}$   $\langle l, m | l^2 - l_z(l_z - 1) | l, m \rangle = l(l+1) - m(m-1) \Rightarrow C'_{lm} = \sqrt{l(l+1) - m(m-1)}$

Ανάλοχα για  $C_{lm}$  βρίσκουμε  $C_{lm} = (l(l+1) - m(m+1))^{1/2}$ . Ο φυσικός αριθμός αυτός είναι ποσότητα που μπορούμε (όπως είπαμε και στον αρμονικό ταλαντωτή) να βρούμε από τις  $Y_{lm}$  ξεκινώντας από την  $Y_{l0}$  ή την  $Y_{l,l}$  διαδοχικά  $l_+$  ή  $l_-$ . Η  $|l, l\rangle$  και  $|l, -l\rangle$  εκτείνονται από τις  $l_+$  και  $l_-$  στο  $l=0$ . Με  $l_{\pm} = e^{\pm i\phi} \left( \pm \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cot\theta}{2} \frac{\partial}{\partial\phi} \right)$ . Για αλγεβρικές ταχνικές υπολογισμούς μέσω των  $Y_{lm}$ , βλέπε βιβλίο Τραχανιζ (σελ. 225)