

Μάθημα 10^ο, 22 Οκτωβρίου 2008 (9:00-10:00).

ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ SCHRÖDINGER.

ΧΡΟΝΟΕΞΑΡΤΩΜΕΝΗ ΕΞΙΣΩΣΗ SCHRÖDINGER: $\hat{H}\Psi(x,t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t}$

Τελεστής της Χαμιλτονιανής (Hamiltonian), $\hat{H} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right]$

ΜΕΘΟΔΟ ΧΩΡΙΖΟΜΕΝΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ:

$$\Psi(x,t) = \psi(x)T(t) \Rightarrow \frac{\hat{H}\Psi(x)}{\Psi(x)} = \frac{i\hbar \frac{dT}{dt}}{T(t)}$$

ΙΣΟΔΥΝΑΜΗ ΜΕ ΔΥΟ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

$$\text{Άρα } \frac{\hat{H}\Psi}{\Psi} = i\hbar \frac{\frac{dT}{dt}}{T} = E \rightarrow \boxed{\hat{H}\Psi = E\Psi} \quad (2)$$

$$\rightarrow \boxed{i\hbar \frac{dT}{dt} = ET} \quad (1)$$

(1) έχει προφανή λύση

$$\boxed{T(t) = T(0) \cdot e^{-i\frac{E}{\hbar}t}} \quad \text{Λύση ως προς τον χρόνο.}$$

(2) $\hat{H}\Psi(x) = E\Psi(x) \rightarrow$ χρονοανεξάρτητη εξίσωση Schrödinger

Η ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΕΠΙΚΕΝΤΡΩΝΕΤΑΙ ΣΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΑΥΤΗΣ.

Η ΧΡΟΝΟΑΝΕΞΑΡΤΗΤΗ ΕΞΙΣΩΣΗ SCHRÖDINGER, ΕΙΝΑΙ ΟΥΣΙΑΣΤΙΚΑ Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ.

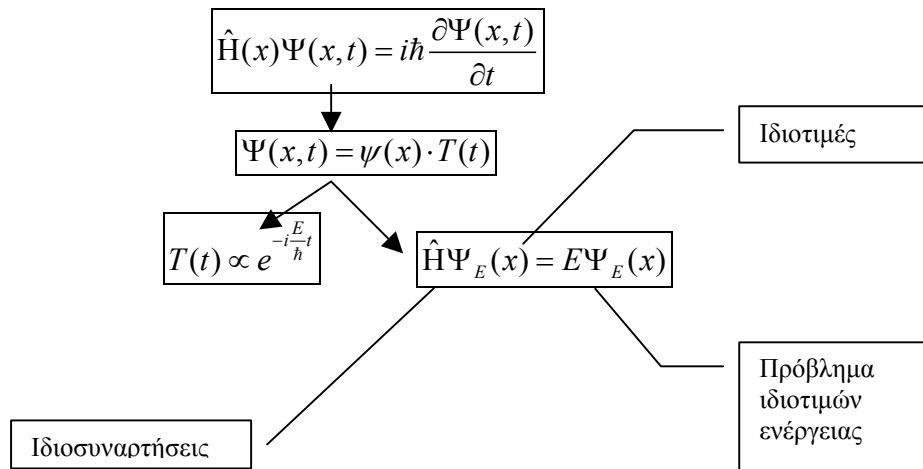
$$\boxed{\hat{H}\Psi_E(x) = E\Psi_E(x)} \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ}$$

E , ΙΔΙΟΤΙΜΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

$\Psi_E(x)$, ΙΔΙΟΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ.

ΣΚΙΑΓΡΑΦΗΣΗ

Χρονοεξαρτώμενη εξίσωση Schrödinger



Παραδείγματα

ΕΛΕΥΘΕΡΟ ΣΩΜΑΤΙΟ

$$E = \frac{p^2}{2m} > 0 \text{ (πάντα θετική, μόνο κινητική ενέργεια).}$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{H}\Psi(x) = E\Psi(x) \\ V(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} = E\Psi(x)$$

$$\left[\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \Psi = 0 \right] \text{ θέτουμε } \frac{2mE}{\hbar^2} = K^2, \text{ οπότε}$$
$$\left[\frac{d^2\Psi}{dx^2} + K^2 \Psi = 0 \right]$$

$$\frac{2mE}{\hbar^2} = K^2 \Rightarrow E = \frac{\hbar^2 K^2}{2m}$$

ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ ΕΙΝΑΙ ΓΝΩΣΤΕΣ (εκθετικά με φανταστικό εκθέτη)

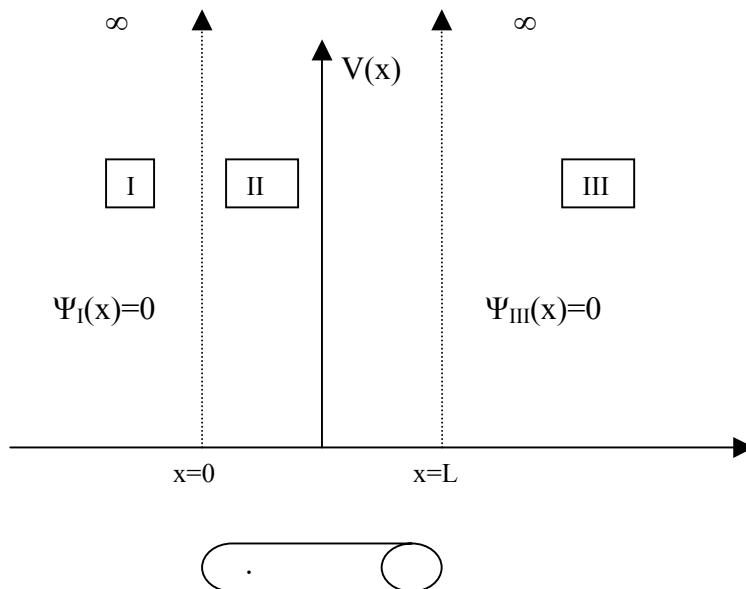
$$\Psi(x) = e^{\pm iKx}, \text{ με } K > 0$$

$$\text{ή } \Psi(x) = e^{iKx}, K \in [-\infty, +\infty]$$

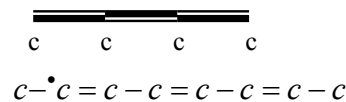
- Οι κυματοσυναρτήσεις **ελεύθερου σωματιδίου** με $[p]$ (ορμή) και ενέργεια $E(=\frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 K^2}{2m})$ δεν είναι ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΜΕΣ και είναι οι μόνες χρήσιμες στην κβαντομηχανική που δεν είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες και έτσι προφανώς δεν νορμαλίζονται.
- ΦΥΣΙΚΗ ΣΗΜΑΣΙΑ, ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ για εύρεση σωματιδίου από $x \rightarrow x + dx$, με κυματοσυνάρτηση του ελεύθερου σωματίου ($\Psi(x) = Ce^{\pm iKx}$), $P(x)dx = \Psi^*(x)\Psi(x)dx = (Ce^{\pm iKx})^* (Ce^{\pm iKx}) = C^*C = |C|^2 = \text{σταθερά}$.
Δηλαδή, το ελεύθερο σωματίο μπορεί να βρίσκεται οπουδήποτε ($x \in [-\infty, +\infty]$) με ίση πιθανότητα.

ΣΩΜΑΤΙΟ ΣΕ ΑΠΕΙΡΟΒΑΘΟ ΠΗΓΑΔΙ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ

Ουσιαστικά, ένας μονοδιάστατος σωλήνας όπου υπάρχει ένα σωματίο εγκλωβισμένο.



π.χ. Μονοδιάστατη αλυσίδα ανθράκων, όπου ‘κυκλοφορεί’ ένα e^- .



Ένα ηλεκτρόνιο εγκλωβισμένο μέσα σε ένα μόριο περιγράφεται στην κβαντομηχανική, ως απειρόβαθο πηγάδι.

....