

ΑΚΤΙΝΙΚΗ ΕΙΣΕΓΕΣΗ SCHRODINGER ΣΕ ΚΕΝΤΡΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ

Αυτή δεν είναι άλλη από την εξίσωση (B) του βιβλίου μας. -  
 Δηλαδή  $\frac{1}{rR} \frac{d^2(rR)}{dr^2} - \frac{Z\mu}{\hbar^2} V(r) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} = -\frac{Z\mu}{\hbar^2} E$  (όπου τώρα θεωρούμε  $\lambda = \ell(\ell+1)$ )  
 Θέτουμε  $u(r) = rR(r)$  και πολλαπλασιάζουμε με  $-\frac{\hbar^2}{2\mu}$  παντού, οπότε παίρνουμε:  

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} u'' + \left( V(r) + \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2\mu r^2} \right) u = E u \Rightarrow \boxed{-\frac{\hbar^2}{2\mu} u'' + \left[ -\frac{e^2}{r} + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2\mu r^2} \right] u = E u}$$

Για να έχουμε πιο βολικά εκφράσεις εισάγουμε στην παραπάνω αυτή διαφορική εξίσωση το ατομικό σύστημα μονάδων, ένα σύστημα αυτόλογον με το φυσικό σύστημα μονάδων του αρμονικού ταλαντωτή.  
 Όταν έχουμε δώσει και τον αρμονικό ταλαντωτή η σωστή μεθοδολογία είναι η ακόλουθη (και όχι οι "μνήμες" του εθνικού  $\hbar = \mu = e = 1$ !!)  
 Ουσιαστικά κάνουμε την ενέργεια και την απόσταση αδιάστατα μετέθιν διαίρωντάς με κάποια (άγνωστα αρχικά)  $E_0$  και  $r_0$  (χαρακτηρίζεται ενέργεια και απόσταση).  
 Έτσι γράφουμε  $-\frac{\hbar^2}{2\mu E_0 r_0^2} \frac{d^2 u}{d(\frac{r}{r_0})^2} + \left[ -\frac{e^2}{E_0 r_0 (\frac{r}{r_0})} + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2\mu E_0 r_0^2 (\frac{r}{r_0})^2} \right] u = \frac{E}{E_0} u$

Για να κάνουμε την γωνία μας εύκολη  
 θέτουμε ως ενδοχρήστες συντελεστές ίσους με μονάδα  $\Rightarrow$   
 $\frac{\hbar^2}{2\mu E_0 r_0^2} = 1$  και  $\frac{e^2}{E_0 r_0} = 1$ .  
 Διαίρωντας την δεύτερη με την πρώτη βρίσκουμε  $\frac{e^2}{E_0 r_0} = \frac{e^2 r_0}{\hbar^2} = 1 \Rightarrow \boxed{r_0 = \frac{\hbar^2}{\mu e^2}}$   
 και από την δεύτερη με γνωστο  $r_0$  βρίσκουμε  $\boxed{E_0 = \frac{\mu e^4}{\hbar^2}}$   
 Όταν το  $\mu = m_e$  (μάζα ηλεκτρονίου)  $r_0 = 0,529 \text{ \AA}$  (ακτίνα Βόλφ) και  $E_0 = 27,2 \text{ eV}$ .  
 Οπότε η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την  $u(r) = rR(r)$  είναι  

$$-u'' - \frac{Z}{r} u + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} u = Z E u \Rightarrow \boxed{u'' + \left( Z E + \frac{Z}{r} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) u = 0}$$

Όπου πρέπει να είμαστε προσεκτικοί και να καταλαβαίνουμε ότι το  $E$  και  $r$  είναι εδώ αριθμοί και αν θέλουμε να βρούμε αντιστοιχία φυσικά μεγέθη πρέπει να πολλαπλασιάσουμε με  $E_0$  και  $r_0$  αντίστοιχα.  
 Για να έχουμε βέβαια κατάσταση (άτομο H) θα πρέπει να ισχύει  $V_{\text{ολ}}(r \rightarrow \infty) > E$  (βλ. σχ. I)  
 και καθώς  $V(\infty) = 0$  ή  $\boxed{E < 0}$   
 Οι συνοριακές συνθήκες είναι  
 (α)  $u(r \rightarrow 0) = 0$  καθώς  $u = rR$  και  $R(r \rightarrow 0)$  πεπεσμένο για να μην έχουμε "άπειρη πυκνότητα"  
 (β)  $u(r \rightarrow \infty) = 0$ , καθώς το σωματίδιο δεν πρέπει να μπορεί να διαφύγει στο άπειρο  
 Το καταλαβαίνουμε και με όρους τετραγωνικών ολοκληρώσεων συνάρτησης καθώς  
 $\int_0^\infty u^2 dr = \int_0^\infty R^2 r^2 dr < \infty$  αν  $rR = u \rightarrow 0$  για  $r \rightarrow \infty$  (βλ. σχ. I)

