

Μάθημα 8^ο, 15 Οκτωβρίου 2008 (9:00-10:00).

Ένας ακόμα τελεστής, Τελεστής Στροφορμής

Στροφορμή: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{L}(\vec{r}, \vec{p})$ όπου

$$\vec{r} = (x, y, z) = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k} \quad \text{και} \quad \vec{p} = (p_x, p_y, p_z).$$

$$\vec{L} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \hat{p}_x & \hat{p}_y & \hat{p}_z \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{L} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} & -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} & -i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} = \hat{L}_x \vec{i} + \hat{L}_y \vec{j} + \hat{L}_z \vec{k}$$

όπου

$$L_x = y \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \right) - z \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \right) = i\hbar \left[z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z} \right]$$

Ομοίως για τα L_y και L_z .

Άσκηση για το σπίτι

Να αποδειχθεί, ότι η μέση τιμή της στροφορμής είναι μηδέν, όταν η $\psi(x, y, z)$ είναι πραγματική.

Ερμητιανός τελεστής

$$\text{Έχω } \langle \hat{A} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x, t) \left(\hat{A} \psi(x, t) \right) dx$$

Η μέση τιμή ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ είναι ένας πραγματικός αριθμός.

Δηλαδή πρέπει $\langle \hat{A} \rangle = \langle \hat{A} \rangle^*$.

$$\langle \hat{A} \rangle^* = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* (\hat{A} \psi) dx \right]^* = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi (\hat{A} \psi)^* dx$$

$$\text{Οπότε } \langle \hat{A} \rangle = \langle \hat{A} \rangle^* \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{A}\psi)^* \psi dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* (\hat{A}\psi) dx \quad (1).$$

Οι τελεστές για τους οποίους ισχύει η παραπάνω ιδιότητα ονομάζονται ερμητιανοί.

ΠΙΟ ΓΕΝΙΚΑ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΡΜΗΤΙΑΝΟΥΣ ΙΣΧΥΕΙ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{A}\varphi)^* \psi dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^* (\hat{A}\psi) dx$$

Παράδειγμα

Ελέγχω αν οι παρακάτω τελεστές είναι ερμητιανοί:

Τελεστής θέσης.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^* (\hat{x}\psi) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^* x\psi dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x\varphi)^* \psi dx$$

Τελεστής ορμής

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad \rightarrow \rightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \left(-i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* (\hat{p}\Phi) dx = -i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx$$

↓

Λύνω κατά παράγοντες

Και έχω

$$= i\hbar \psi^* \left[(\psi^*(\infty)\Phi(\infty)) - (\psi^*(-\infty)\Phi(-\infty)) \right] + i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} dx$$

↓

Ισο με 0

$$\text{Άρα είναι ερμητιανός καθώς ισχύει } \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi (\hat{p}\Psi)^* dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{p}\Phi)^* \Psi dx$$

Άσκηση για το σπίτι

Ο d/dx είναι ερμητιανός;