

Μάθημα 15°, 5 Νοεμβρίου 2008 (9:00-10:00).

Άσκηση 12 ((εφαρμογή των παραπάνω))

Ηλεκτρόνιο βρίσκεται στις δύο πρώτες ενεργειακές του καταστάσεις σε δυναμικό απειρόβαθου πηγαδιού εύρους a . (α) Προσδιορίστε πλήρως αυτή την κατάσταση αν δίνεται ότι έχει μέση θέση $a/2$ και η μέση ορμή του είναι $8\hbar/3a$. (β) Να υπολογιστεί η μέση ενέργεια του συστήματος.

Υπόδειξη:

Χρήσιμες τριγωνομετρικές σχέσεις

$$2 \sin A \sin B = \cos(A - B) - \cos(A + B)$$

$$2 \sin A \cos B = \sin(A + B) + \sin(A - B)$$

$$2 \cos A \cos B = \cos(A + B) + \cos(A - B)$$

Χρήσιμες τριγωνομετρικές σχέσεις, ειδικές περιπτώσεις των προηγούμενων

$$2(\sin A)^2 = 1 - \cos(2A)$$

$$2 \sin A \cos A = \sin(2A)$$

$$2(\cos A)^2 = 1 + \cos(2A)$$

Λύση

Αφού έχουμε πραγματικές ιδιοσυναρτήσεις, έχουμε από την προηγούμενη άσκηση

$$\langle x \rangle(t) = |c_1|^2 x_{11} + |c_2|^2 x_{22} + 2|c_1||c_2|x_{12} \cos(\omega_{12}t + \varphi_{21}),$$

$$\langle p \rangle(t) = 2\hbar|c_1||c_2||p_{12}| \cos(\omega_{12}t + \varphi_{21} + \tilde{\varphi}).$$

Οι πληροφορίες που μας δίνει η άσκηση αναφέρονται σε μια χρονική στιγμή. Για ευκολία και προφανώς (γιατί;) χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε $t=0$. Έτσι οι παραπάνω εκφράσεις παίρνουν τις τιμές

$$\langle x \rangle(t=0) = |c_1|^2 x_{11} + |c_2|^2 x_{22} + 2|c_1||c_2|x_{12} \cos(\varphi_{21}),$$

$$\langle p \rangle(t=0) = 2\hbar|c_1||c_2||\tilde{p}_{12}| \cos(\varphi_{21} + \tilde{\varphi}).$$

Χρειάζεται να υπολογίσουμε τα

$$x_{11} = \int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi_1|^2 x, \quad x_{22} = \int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi_2|^2 x, \quad x_{12} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_1 x \psi_2, \quad \tilde{p}_{12} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1 d\psi_2.$$

Αφού $\psi_1 = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi x}{a} \Theta(x) \Theta(a-x)$, $\psi_2 = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{2\pi x}{a} \Theta(x) \Theta(a-x)$, έχουμε

$$\begin{aligned} x_{11} &= \int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi_1|^2 x = \frac{2}{a} \int_0^a x \sin^2 \left(\frac{\pi x}{a} \right) dx = \frac{2}{a} \int_0^a x \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi x}{a} \right) \right) dx \\ &= \frac{1}{a} \int_0^a x dx - \frac{1}{a} \int_0^a x \cos \left(\frac{2\pi x}{a} \right) dx = \frac{1}{a} \frac{a^2}{2} = \frac{a}{2} \end{aligned}$$

καθώς

$$\int_0^a x \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) dx = \frac{a}{2\pi} \int_0^a x d\left(\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right) = \frac{a}{2\pi} \left(x \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \right) \Big|_0^a - \frac{a}{2\pi} \int_0^a \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) dx$$

$$= -\left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \Big|_0^a = 0$$

ανάλογα βρίσκουμε ότι $x_{22} = \frac{a}{2}$, και

$$x_{12} = \int_{-\infty}^{\infty} x dx \psi_1 \chi \psi_2 = \frac{2}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) dx = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x \left(\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) - \cos\left(\frac{3\pi x}{a}\right) \right) dx = -\frac{16a}{9\pi^2}$$

καθώς

$$\int_0^a x \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = \frac{a}{n\pi} \int_0^a x d\left(\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\right) = \frac{a}{n\pi} \left(x \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \right) \Big|_0^a - \frac{a}{n\pi} \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx$$

$$= \left(\frac{a}{n\pi}\right)^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \Big|_0^a = \begin{cases} -2\left(\frac{a}{n\pi}\right)^2, & n=1,3,5,\dots \\ 0, & n=2,4,6,\dots \end{cases}$$

Έτσι από το δεδομένο ότι

$$\langle x \rangle(t=0) = a/2 = |c_1|^2 x_{11} + |c_2|^2 x_{22} - 2|c_1||c_2||x_{12}|\cos(\varphi_{21}) = |c_1|^2 a/2 + |c_2|^2 a/2 - 2|c_1||c_2||x_{12}|\cos(\varphi_{21})$$

$$= a/2(|c_1|^2 + |c_2|^2) - 2|c_1||c_2||x_{12}|\cos(\varphi_{21}) = a/2 - 2|c_1||c_2||x_{12}|\cos(\varphi_{21}) \Rightarrow |c_1||c_2||x_{12}|\cos(\varphi_{21}) = 0$$

$$\Rightarrow \cos(\varphi_{21}) = 0 \Rightarrow \varphi_{21} = \pm\pi/2.$$

Ακόμα έχουμε

$$p_{12} = \int_0^a \psi_1 \hat{p} \psi_2 dx = \int_0^a \psi_1 \left(-i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right) dx = -i\hbar \int_0^a \psi_1 d\psi_2 = -\frac{2i\hbar}{a} \int_0^a \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) d \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) =$$

$$= -\frac{4\pi\hbar i}{a^2} \int_0^a \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) dx = -\frac{2\pi\hbar i}{a^2} \left(\int_0^a \sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right) dx + \int_0^a \sin\left(-\frac{\pi x}{a}\right) dx \right) =$$

$$= -\frac{2\pi\hbar i}{a^2} \left(\frac{2a}{3\pi} - \frac{2a}{\pi} \right) = \frac{8\hbar i}{3a} = \frac{8\hbar}{3a} e^{\pi/2}.$$

καθώς

$$\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = -\frac{a}{n\pi} \int_0^a d\left(\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\right) = -\frac{a}{n\pi} \left(\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \right) \Big|_0^a = \begin{cases} +\frac{2a}{n\pi}, & n=1,3,5,\dots \\ 0, & n=2,4,6,\dots \end{cases}$$

Δηλαδή, βρήκαμε ότι, $p_{12} = \frac{8\hbar}{3a} e^{\pi/2} \Rightarrow |p_{12}| = p_{12}, \tilde{\varphi} = \pi/2$ και αφού έχουμε ότι

$$\langle p \rangle(t=0) = 2\hbar|c_1||c_2||p_{12}|\cos(\varphi_{12} + \tilde{\varphi}) = 2\hbar|c_1||c_2|\left(\frac{8}{3a}\right)\cos(\varphi_{21} + \pi/2), \text{ και μέση ορμή}$$

$$\text{ίση με } 8\hbar/3a, \text{ έχουμε } 2\hbar|c_1||c_2|\left(-\frac{8}{3a}\right)\sin(\varphi_{21} = \pm\pi/2) = \frac{8\hbar}{3a} \Rightarrow \varphi_{21} = -\pi/2 \text{ και}$$

$$|c_1||c_2| = 1/2.$$

$$\text{Άρα } \sqrt{P_1(1-P_1)} = \frac{1}{2} \rightarrow P_1 = \frac{1}{2} \text{ και } P_2 = \frac{1}{2}$$

$$c_1 = |c_1| = |c_1| = 1/\sqrt{2},$$

$$\text{Δηλαδή } c_2 = |c_2| e^{i\varphi_{21}} = |c_2| e^{-i\pi/2} = -i/\sqrt{2}.$$

$$(\alpha) \text{ Άρα } \psi(x,t) = |c_1| \psi_1(x) e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} + |c_2| e^{i\varphi_{21}} \psi_2(x) e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t}, \text{ δηλαδή}$$

$$\psi(x,t=0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi x}{a} + \frac{-i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2}{a}} e^{i\delta} \sin \frac{2\pi x}{a} = \frac{1}{\sqrt{a}} \sin \frac{\pi x}{a} \left[1 - 2i \sin \frac{\pi x}{a} \right].$$

$$(\beta) \langle E \rangle = P_1 E_1 + P_2 E_2 = \frac{1}{2} E_0 1^2 + \frac{1}{2} E_0 2^2 = \frac{5}{2} E_0 = \frac{5\pi^2 \hbar^2}{4ma^2}$$

Άσκηση για το σπίτι

Ηλεκτρόνιο βρίσκεται στις δύο πρώτες ενεργειακές του καταστάσεις σε δυναμικό απειρόβαθου πηγαδιού που εκτείνεται στην περιοχή $[-a/2, +a/2]$. (α) Προσδιορίστε πλήρως αυτή την κατάσταση αν δίνεται ότι έχει μηδενική μέση θέση και η μέση ορμή του είναι $8\hbar/3a$. (β) Να υπολογιστεί η μέση ενέργεια του συστήματος.