

Σωπαίετο σε δύο διαστάσεις και στροφορμή.

Προφανώς έχουμε μόνο z-συνιστώσα της στροφορμής, $L_z = x p_y - y p_x = i\hbar (y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y})$
 Σε πολικές συντεταγμένες έχουμε $L_z = i\hbar (r \sin\phi (\cos\phi \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{\sin\phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}) - r \cos\phi (\sin\phi \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\cos\phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}))$
 $= i\hbar (r \sin\phi \cos\phi \frac{\partial}{\partial \phi} - \sin^2\phi \frac{\partial}{\partial \phi} - r \sin\phi \cos\phi \frac{\partial}{\partial \phi} - \cos^2\phi \frac{\partial}{\partial \phi}) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}$

Οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυνάρτησες εκτιμώνται από την εξίσωση

$$\hat{L}_z \Phi(\phi) = -i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} = \lambda \Phi \rightarrow \frac{1}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} = \frac{\lambda}{-i\hbar} \rightarrow \ln \Phi = \frac{i\lambda}{\hbar} \phi \rightarrow \Phi(\phi) = e^{i\lambda \phi / \hbar}$$

ιδιοτιμές στροφορμής L_z και ιδιοσυνάρτησες

Στις πολικές συντεταγμένες βρίσκουμε ότι η Χαμιλτονιανή είναι:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) + V = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\hbar^2}{2mr^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

\uparrow $\frac{p_r^2}{2m}$ \uparrow $\frac{L_z^2}{2I}$ $(I = mr^2)$
 Κεντρική ενέργεια Αδριαστροχική
 Κεντρική ενέργεια Ενέργεια

Από προηγούμενο μάθημα έχουμε δείξει ότι $\Phi(\phi) = e^{i\lambda \phi}$ όπου το λ ακέραιος,

άρα $\frac{\lambda}{\hbar} = \nu \rightarrow \lambda = \nu \hbar$, δηλαδή η στροφορμή είναι κβαντισμένη, ακέραια πολλαπλάσιο.

ΑΣΚΗΣΗ Το επόμενο πρόβλημα με ένα σωμάτιο και δύο πολύ μικρά σωματίδια/χωματάκια είναι η σφαίρική κβαντική ταλάντωση. Να λυθεί για την περίπτωση που έχουμε σφαίρική συμμετρία (ανεξαρτησία από θ και ϕ).

ΣΥΣΤΗΜΑ ΔΥΟ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ ΧΩΡΙΣ ΕΞΩΤΕΡΙΚΗ ΔΗΜΙΕΠΙΡΑΣΗ

Περιγραφή στα πλαίσια της κλασικής μηχανικής.

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{12} \text{ και } m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{21}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \rightarrow \frac{d^2}{dt^2} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \vec{0} \Rightarrow (m_1 + m_2) \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \right) = \vec{0}$$

\uparrow \vec{R}_{CM} \uparrow \vec{r}
 Κέντρο μάζας (δράση-αντίδραση)

Το $\vec{R}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$ έχει μηδενική επιτάχυνση άρα κινείται με σταθερή ταχύτητα (\vec{R}_{CM} , διάνυσμα κέντρου μάζας).

$$\textcircled{1} \rightarrow \ddot{\vec{r}}_1 = \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} \text{ (I) και } \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{\vec{F}_{21}}{m_2} \text{ (II)} \quad \textcircled{2} - \textcircled{1} \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{\vec{F}_{21}}{m_2} - \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} \Rightarrow$$

$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

$$\text{αφού } \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{21} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \Rightarrow \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{21}$$

\uparrow \vec{r} \uparrow \vec{r}
 Διάνυσμα σχετικής θέσης Αντικείμενα

Δηλαδή το διάνυσμα της σχετικής θέσης (του z ως προς το d) κινείται υπό την επίδραση της εσωτερικής (κεντρικής) δύναμης και ισχύει ο 2ος νόμος του Νεύτωνα με μάζα του συστήματος μ .

Παρατηρούμε το πρόβλημά μας ανάγεται σε πρόβλημα ενός σωματίδιου.

Μπορούμε να λύσουμε τα ερωτήματα:

(Α) Άτομο του υδρογόνου, $V = \frac{e^2}{r}$, $\mu = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p} \sim m_e$

(Β) Υδρογονοειδή, π.χ. Li^{2+} , $V = \frac{Ze^2}{r}$, $\mu = \frac{m_e \cdot A \cdot m_p}{m_e + A m_p} \sim m_e$

(Γ) Άτομο positronium, e^+ και e^- , $V = \frac{e^2}{r}$, $\mu = \frac{m_e + m_e}{m_e + m_e} = \frac{m_e}{2}$.