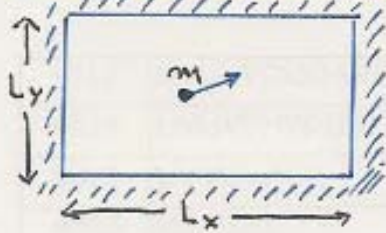
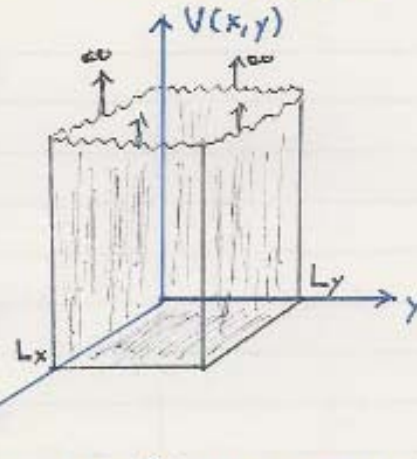


ΑΠΕΙΡΟΒΑΘΟ ΠΗΓΑΔΙ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝΣχηματική αναπαράσταση
στού πραγματικό χώρο

$$V(x,y) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq L_x; 0 \leq y \leq L_y \\ \infty & \text{εκτός παραπάνω περιοχής} \end{cases}$$

Σχηματική αναπαράσταση του
δυναμικού

Καθώς $V(x,y) = V_x(x) + V_y(y)$ όπου V_x και V_y μονοδιάστατα απείροβαθα πηγάδια.
Έχουμε δύο εξισώσεις Schrödinger: $-\frac{\hbar^2}{2m} X'' + V_x(x)X = E_x X$, $-\frac{\hbar^2}{2m} Y'' + V_y(y)Y = E_y Y$

Η λύση για κάθε διάσταση είναι $X(x) = \sqrt{\frac{2}{L_x}} \sin\left(\frac{n_x \pi x}{L_x}\right)$ $n_x = 1, 2, \dots$

$$\text{και } Y(y) = \sqrt{\frac{2}{L_y}} \sin\left(\frac{n_y \pi y}{L_y}\right) \quad n_y = 1, 2, \dots$$

με αντίστοιχες ενέργειες $E_x = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m L_x^2} n_x^2$ και $E_y = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m L_y^2} n_y^2$

Η συνολική λύση είναι της μορφής: $\Psi(x,y) = X \cdot Y = \frac{2}{\sqrt{L_x L_y}} \sin\left(\frac{n_x \pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n_y \pi y}{L_y}\right) = \Psi_{n_x, n_y}(x,y)$

$$\text{και } E_{n_x, n_y} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} \right)$$

Όπως στο μονοδιάστατο πρόβλημα οι ιδιοσυντεταγμένες είναι "αυτάλογες" με τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης σε χορδή πακτωμένη στα δύο άκρα, εδώ στο διδιάστατο πρόβλημα έχουμε ισομορφισμό με πακτωμένη σε όλη την περιφέρεια της.

Ειδική περίπτωση με $L_x = L_y = L$ τότε $E_{n_x, n_y} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m L^2} (n_x^2 + n_y^2)$

έχουμε **ΕΚΦΥΛΙΣΜΟ** δηλαδή διαφορετικές ιδιοσυντεταγμένες με **ΙΔΙΑ** ιδιοτιμή της ενέργειας.

$$\text{π.χ. } n_x = 1, n_y = 2 \rightarrow E_{1,2} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m L^2} (1^2 + 2^2) = \frac{5 \hbar^2 \pi^2}{2m L^2}, \quad \Psi_{1,2} = \frac{2}{L} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{L}\right)$$

$$n_x = 2, n_y = 1 \rightarrow E_{2,1} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m L^2} (2^2 + 1^2) = \frac{5 \hbar^2 \pi^2}{2m L^2}, \quad \Psi_{2,1} = \frac{2}{L} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right)$$

Ο εκφυλισμός εμφανίζεται εκεί που έχουμε φαινόμενα συμμετρίας. Στο παραδειγμα μας για $L_x = L_y$ το δυναμικό $V(x,y)$ έχει την συμμετρία να πακτωμένη ίδιο με την εναλλαγή $x \leftrightarrow y$.


* Το σύστημα αυτό μπορεί (υπόσυνθήκες) να 'προσμοιωθεί' ηλεκτρονίο περιορισμένο σε επίπεδο κβάνο

ΑΠΕΙΡΟΒΑΘΟ ΠΗΓΑΔΙ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΤΡΙΩΝ ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ

Η γενική είναι προφανής, με αποτελέσματα

$$\Psi_{n_x, n_y, n_z}(x, y, z) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{L_x L_y L_z}} \sin\left(\frac{n_x \pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n_y \pi y}{L_y}\right) \sin\left(\frac{n_z \pi z}{L_z}\right) \quad n_x, n_y, n_z = 1, 2, \dots$$

$$E_{n_x, n_y, n_z} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2} \right)$$

επιχρυσισμός
σε
κubite 

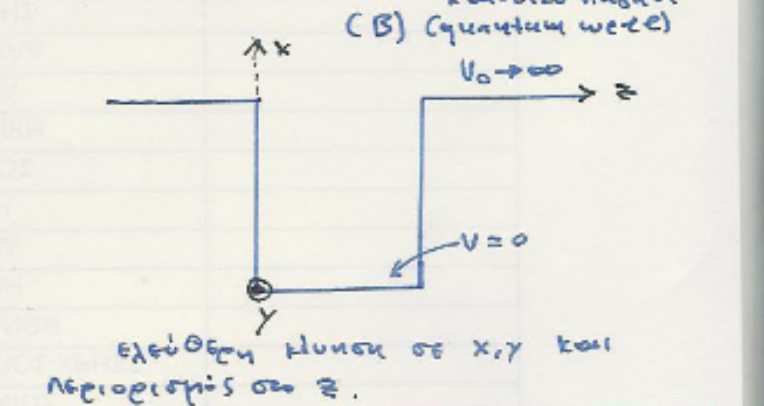
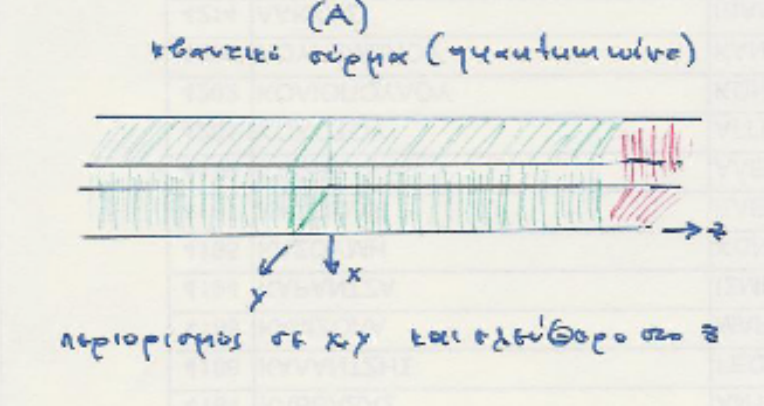
Το σύστημα αυτό αποτελεί ένα απειρά ικανοποιητικό μοντέλο για την προσομοίωση/περιγραφή LC σε κυβική κβαντική τελεία. Οι κβαντικές τελείες αποτελούν 'τεχνητά' άτομα (κατασκευασμένα δηλαδή στο εργαστήριο) με πολλές εφαρμογές.

Στη μονοδιάστατη συστήματα και για τις δέσμιες καταστάσεις δεν έχουμε εκφυλισμό.
 Εξίσωση Schrödinger: $-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$. Έστω δύο ιδιοκαταστάσεις $\psi_1, \psi_2 \rightarrow \psi_1'' = \frac{2m}{\hbar^2}(V(x)-E_1)\psi_1$ και $\psi_2'' = \frac{2m}{\hbar^2}(V(x)-E_2)\psi_2$. Μπορεί $E_1 = E_2$ και ψ_1 διαφέρει από το ψ_2 ?
 κατασκευάζουμε την συνάρτηση $W(x)$ (Βρουκίαν δύο λύσεων ψ_1, ψ_2), $W(x) = \begin{vmatrix} \psi_1(x) & \psi_2(x) \\ \psi_1'(x) & \psi_2'(x) \end{vmatrix}$
 $W(x) = \psi_1\psi_2' - \psi_2\psi_1' \Rightarrow W'(x) = \psi_1\psi_2'' - \psi_2\psi_1'' = \frac{2m}{\hbar^2}(E_1 - E_2)\psi_1\psi_2 = 0$ αν $E_1 = E_2$
 Άρα $W'(x) = 0 \rightarrow W(x) = \text{const}$. $\psi = W(\pm\infty) = \psi_1(\pm\infty)\psi_2'(\pm\infty) - \psi_2(\pm\infty)\psi_1'(\pm\infty)$
 $W(x) = 0 \Leftrightarrow \psi = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{για ΔΕΣΜΙΕΣ} \\ \text{καταστάσεις} \end{cases} \psi_1(\pm\infty) = \psi_2(\pm\infty) \rightarrow 0$ (απαιτείται να είναι μηδέν)
 $\psi_1\psi_2' - \psi_2\psi_1' = 0 \rightarrow \psi_1\psi_2' = \psi_2\psi_1' \rightarrow \frac{\psi_1}{\psi_1'} = \frac{\psi_2}{\psi_2'} \rightarrow \ln\psi_1 = \ln\psi_2 + k \rightarrow \psi_1 = \lambda\psi_2$
 «πραγματική» ιδιότητα κυματικών συνάρτησεων.

ΔΕΣΜΙΕΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ ΜΕ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΔΥΩΜΙΚΩΝ ΑΝΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗ

(Α) Απειρόβροχο στο x, y και ελεύθερο στο z . Προσέγγιση κβαντικού σύρματος.
 Προσφατ λύση $E_{k_x, k_y, k_z} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \left(\frac{k_x^2}{L_x^2} + \frac{k_y^2}{L_y^2} \right) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}$, $\psi_{k_x, k_y, k_z} = \frac{2}{\sqrt{L_x L_y}} \sin\left(\frac{k_x x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{k_y y}{L_y}\right) e^{ik_z z}$

(Β) Απειρόβροχο στο z και ελεύθερο στο x, y . Προσέγγιση κβαντικού πυλάδιου.
 Λύση: $E_{k_x, k_y, k_z} = \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m l_z^2}$, $\psi_{k_x, k_y, k_z}(x, y, z) = \sqrt{\frac{2}{L_z}} \sin\left(\frac{k_z z}{L_z}\right) e^{i(k_x x + k_y y)}$



ΑΣΚΗΣΗ 4
 Για zD απειρόβροχο πηγάδι δυναμικού με $L_x = L_y = 10 \text{ nm}$ να φέρεις τις 6 πρώτες ενεργειακές στάθμες, των εκφυλισμών τους και να σχεδιάσεις τις ιδιοσυναρτήσεις, δια ελεγχόμενου κλίμακας.

ΑΣΚΗΣΗ 5
 θεωρούμε κβαντική τράβια ισχύος 10^3 Å^2 . Να φεθού και να περιγράψουν οι δέκα πρώτες ενεργειακές στάθμες ηλεκτρονίου περιορισμένου στην κβαντική τράβια.