

Μάθημα 9^ο, 16 Οκτωβρίου 2008 (9:00-11:00).

ΛΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ.

$$I(t) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x,t) \psi(x,t) dx$$

Αν $I(t_0) = I$, συνθήκη Κανονικοποίησης την χρονική στιγμή t_0 , θα είναι πάντα

κανονικοποιημένη η κυματοσυνάρτηση αν οπότε $\frac{dI(t)}{dt} = 0$

Ελέγχουμε αν ισχύει η $\frac{dI(t)}{dt} = 0$

$$\begin{aligned} \frac{dI(t)}{dt} &= \frac{\partial I(t)}{\partial t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} (\psi^* \psi) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} dx \end{aligned}$$

Ξέρω από την εξίσωση Schrödinger $\hat{H}\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\hat{H}\psi}{i\hbar}$

Και $\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^* = \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = -\frac{\hat{H}\psi^*}{i\hbar}$ οπότε έχουμε $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} dx =$
 $-\int_{-\infty}^{+\infty} \psi \frac{(\hat{H}\psi)^*}{i\hbar} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \frac{(\hat{H}\psi)}{i\hbar} dx$ και καθώς ο H (χαμιλτονιανή) είναι ερμητιανός

(δηλαδή) $\int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{H}\psi)^* \psi dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* (\hat{H}\psi) dx$

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} \psi \frac{(\hat{H}\psi)^*}{i\hbar} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \frac{(\hat{H}\psi)}{i\hbar} dx = \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{H}\psi)^* \psi dx - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* (\hat{H}\psi) dx = 0.$$

ΣΥΖΥΓΗΣ ΤΕΛΕΣΤΗΣ.

A^+ : ΣΥΖΥΓΗΣ ΤΕΛΕΣΤΗΣ \hat{A}

$$(A^+\Psi, \Phi) \equiv (\Psi, A\Phi)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{A}^+\Psi)^* \Phi dx \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* (\hat{A}\Phi) dx$$

Παράδειγμα

Άρα **ερμιτιανός** είναι ο τελεστής για τον οποίο ισχύει ότι: $A^+ = A$

Ιδιότητες

$$(A+B)^+ = A^+ + B^+$$

$$(A \cdot B)^+ = B^+ \cdot A^+$$

$$\begin{aligned} \text{γιατί } \int_{-\infty}^{+\infty} ((A \cdot B)^+ \Psi)^* \Phi dx &\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* (AB) \Phi dx = \\ &= \int (A^+ \Psi)^* B \Phi = \int (B^+ A^+ \Psi)^* \Phi dx \end{aligned}$$

Άσκηση 7

Να ελεγχθεί αν οι τελεστές (α) $l_z = xp_y - yp_x$ και (β) $xp_x + yp_z$, είναι ερμιτιανοί;

(α) $(l_z)^+ = (xp_y - yp_x)^+ = (xp_y)^+ - (yp_x)^+ = p_y^+ x^+ - p_x^+ y^+ =$ (αφού οι τελεστές θέσης και ορμής είναι ερμιτιανοί, ισχύει $x^+ = x, p_x^+ = p_x, y^+ = y, p_y^+ = p_y$) $= p_y x - p_x y =$ (τώρα ισχύει ακόμα $p_y x = xp_y$, γιατί

$$xp_y \psi = x \left(-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = -i\hbar x \frac{\partial \psi}{\partial y} = -i\hbar \frac{\partial x\psi}{\partial y} = p_y x \psi = xp_y - yp_x = l_z.$$

Άρα είναι ερμιτιανός.

$$(β) \text{ Δεν είναι καθώς } xp_x \psi = x \left(-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = -i\hbar x \frac{\partial \psi}{\partial x} = -i\hbar \frac{\partial x\psi}{\partial x} + i\hbar \psi \neq p_x x \psi.$$

Και $(xp_x + yp_z)^+ \neq xp_x + yp_z$.

ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ SCHRÖDINGER.

Αν θέλουμε να περιγράψουμε ένα σωματίο μάζας m και είναι σε δυναμικό $V_{(x)}$ τότε η εξίσωση Schrödinger για μια διάσταση είναι:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi_{(x,t)}}{\partial x^2} + V_{(x)} \Psi_{(x,t)} \right] = i\hbar \frac{\partial \Psi_{(x,t)}}{\partial t}$$

ΧΡΟΝΟΕΞΑΡΤΩΜΕΝΗ ΕΞΙΣΩΣΗ SCHRÖDINGER:

$$\hat{H}\Psi(x,t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t}$$

Τελεστής της Χαμιλτονιανής (Hamiltonian)

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hat{H}(\hat{x}, \hat{p}) \\ &= \hat{T} + \hat{V} \\ \hat{H} &= \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_{(x)} \right] \end{aligned}$$

Δεν εξαρτάται από το t .

Θέλω να λύσω Δ.Ε. με μερικές παραγώγους, άρα θα χρησιμοποιήσω τη ΜΕΘΟΔΟ ΧΩΡΙΖΟΜΕΝΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ:

$$\Psi(x,t) = \psi(x)T(t)$$

$$\hat{H}\Psi(x,t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} \xrightarrow{\Psi = \psi T} \hat{H}(\psi \cdot T) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}(\psi \cdot T) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow T \cdot [\hat{H}\psi] = i\hbar \psi \frac{dT}{dt} \xrightarrow{(\div) \Psi = \psi T}$$

$$\longrightarrow \frac{T \cdot [\hat{H}\Psi]}{\Psi T} = \frac{i\hbar \psi \frac{dT}{dt}}{\Psi T} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\hat{H}\Psi(x)}{\Psi(x)} = \frac{i\hbar \frac{dT}{dt}}{T(t)}$$

$$\uparrow \quad \uparrow$$

$$f(x) = g(t) = C = \text{σταθερό.}$$

$$\text{Άρα } \frac{\hat{H}\Psi}{\Psi} = i\hbar \frac{dT}{T} = E \rightarrow \boxed{\hat{H}\Psi = E\Psi} \quad (2)$$

$$\rightarrow \boxed{i\hbar \frac{dT}{dt} = ET} \quad (1)$$

$$(1) \quad i\hbar \frac{dT}{dt} = E \cdot T$$

$$\frac{dT}{T} = -i \frac{E}{\hbar} dt$$

$$\int \frac{dT}{T} = -i \frac{E}{\hbar} \int_0^t dt$$

$$\ln T - \ln T_{(0)} = -i \frac{E}{\hbar} t$$

$$\ln T = \ln T_0 - i \frac{E}{\hbar} t$$

$$\boxed{T(t) = T(0) \cdot e^{-i \frac{E}{\hbar} t}} \quad \text{Λύση ως προς τον χρόνο.}$$

(2) $\hat{H}\Psi(x) = E\Psi(x) \rightarrow$ χρονoανεξάρτητη εξίσωση Schrödinger