

**Μάθημα 19<sup>ο</sup>, 25 Νοεμβρίου 2008 (9:00-11:00) & Συμπλήρωμα 7 Δεκεμβρίου 2010 (9:00-11:00).**

**ΑΣΚΗΣΗ 19-1**

Θεωρούμε φυσικά μεγέθη που περιγράφονται από τους τελεστές  $A$ ,  $B$ ,  $C$  και  $H$  (Χαμιλτονιανή). Γνωρίζουμε για τους τελεστές αυτούς ότι

$$A|1\rangle = \alpha_1|1\rangle \quad A|2\rangle = \alpha_2|2\rangle$$

$$B|+\rangle = \beta_1|+\rangle \quad B|-\rangle = \beta_2|-\rangle$$

$$C|1\rangle = \gamma_1|1\rangle \quad C|2\rangle = \gamma_2|2\rangle$$

$$\hat{H} = \varepsilon|1\rangle\langle 1| + \varepsilon|2\rangle\langle 2| + \delta|1\rangle\langle 2| + \delta|2\rangle\langle 1|,$$

όπου  $|+\rangle = (|1\rangle + |2\rangle)/\sqrt{2}$  και  $|-\rangle = (|1\rangle - |2\rangle)/\sqrt{2}$ .

Την χρονική στιγμή  $t=0$ , μετράμε την ενέργεια του συστήματος και την βρίσκουμε  $\varepsilon + \delta$ .

(α) Να γραφεί η κυματοσυνάρτηση για  $t=0$ . Αν την ίδια χρονική στιγμή μετρήσω τα φυσικά μεγέθη που περιγράφονται από τους τελεστές  $A$ ,  $B$  και  $C$  ποιες τιμές θα πάρω και με ποιες πιθανότητες;

(β) Να γραφεί η κυματοσυνάρτηση για τυχαίο  $t$ .

(γ) Αν την χρονική στιγμή  $t$  μετρήσω τα φυσικά μεγέθη που περιγράφονται από τους τελεστές  $A$ ,  $B$ ,  $C$  και  $H$  ποιες τιμές θα πάρω και με ποιες πιθανότητες;

**ΛΥΣΗ**

(α) Από το πρόβλημα του προηγούμενου μαθήματος γνωρίζουμε ότι η Χαμιλτονιανή έχει ιδιοτιμές και ιδιοκαταστάσεις της μορφής

$$H|+\rangle = (\varepsilon + \delta)|+\rangle \quad \text{και} \quad H|-\rangle = (\varepsilon - \delta)|-\rangle.$$

Καθώς μετράμε για την ενέργεια  $\varepsilon + \delta$  η κυματοσυνάρτηση είναι  $|\Psi(x, t=0)\rangle = |+\rangle$ .

Οπότε προφανώς και στην μέτρηση του  $B$  βρίσκουμε ιδιοτιμή  $\beta_1$  (καθώς  $B|+\rangle = \beta_1|+\rangle$ ).

Ενώ για τα φυσικά μεγέθη που περιγράφονται από τους τελεστές  $A$  και  $C$ , έχουμε ίσες πιθανότητες (50%) για μέτρηση των ιδιοτιμών  $\alpha_1, \gamma_1$  και  $\alpha_2, \gamma_2$  αντίστοιχα.

Καθώς  $|\Psi(x, t=0)\rangle = |+\rangle = (|1\rangle + |2\rangle)/\sqrt{2}$  (συντελεστές ιδιοκαταστάσεων  $|1\rangle, |2\rangle$  είναι  $1/\sqrt{2}$ ).

(β) Καθώς η αρχική κατάσταση,  $|\Psi(x, t=0)\rangle = |+\rangle$ , είναι ιδιοκατάσταση της ενέργειας έχουμε στάσιμη κατάσταση. Δηλαδή η κυματοσυνάρτηση για τυχαίο  $t$  είναι  $|\Psi(x, t)\rangle = e^{-i(\varepsilon+\delta)t/\hbar} |\Psi(x, t=0)\rangle = e^{-i(\varepsilon+\delta)t/\hbar} |+\rangle$  που είναι φυσικά ισοδύναμη με την αρχική κατάσταση.

(γ) Βασιζόμενοι στην απάντηση του ερωτήματος (β) καταλαβαίνουμε ότι τη χρονική στιγμή  $t$  αν μετρήσω τα φυσικά μεγέθη που περιγράφονται από τους τελεστές  $A$ ,  $B$ ,  $C$  και  $H$  οι τιμές και οι πιθανότητες που θα πάρω θα είναι ίδιες με του ερωτήματος (α), δηλαδή της αρχικής κατάστασης.

### ΑΣΚΗΣΗ 19-2

Θεωρούμε φυσικά μεγέθη που περιγράφονται από τους τελεστές  $A$ ,  $B$ ,  $C$  και  $H$  (Χαμιλτονιανή). Γνωρίζουμε για τους τελεστές αυτούς ότι

$$A|I\rangle = \alpha_1|I\rangle \quad A|2\rangle = \alpha_2|2\rangle$$

$$B|+\rangle = \beta_1|+\rangle \quad B|-\rangle = \beta_2|-\rangle$$

$$C|I\rangle = \gamma_1|I\rangle \quad C|2\rangle = \gamma_2|2\rangle$$

$$H|+\rangle = (\varepsilon + \delta)|+\rangle \quad \text{και} \quad H|-\rangle = (\varepsilon - \delta)|-\rangle.$$

όπου  $|+\rangle = (|I\rangle + |2\rangle)/\sqrt{2}$  και  $|-\rangle = (|I\rangle - |2\rangle)/\sqrt{2}$ .

Την χρονική στιγμή  $t=0$ , μετράμε την φυσική ποσότητα του συστήματος που σχετίζεται με τον τελεστή  $A$  και την βρίσκουμε  $\alpha_1$ .

(α) Να γραφεί η κυματοσυνάρτηση για  $t=0$ . Αν την ίδια χρονική στιγμή μετρήσω τα φυσικά μεγέθη που περιγράφονται από τους τελεστές  $H$ ,  $B$  και  $C$  ποιες τιμές θα πάρω και με ποιες πιθανότητες;

(β) Να γραφεί η κυματοσυνάρτηση για τυχαίο  $t$ .

(γ) Αν την χρονική στιγμή  $t$  μετρήσω τα φυσικά μεγέθη που περιγράφονται από τους τελεστές  $A$ ,  $B$ ,  $C$  και  $H$  ποιες τιμές θα πάρω και με ποιες πιθανότητες;

### ΛΥΣΗ

(α) Καθώς μετράμε για τελεστή  $A$  την τιμή  $\alpha_1$  η κυματοσυνάρτηση είναι

$$|\Psi(x, t=0)\rangle = |1\rangle.$$

Οπότε προφανώς και στην μέτρηση του  $C$  βρίσκουμε ιδιοτιμή  $\gamma_1$  (καθώς  $B|+\rangle = \beta_1|+\rangle$ ).

Ενώ για τα φυσικά μεγέθη που περιγράφονται από τους τελεστές  $H$  και  $B$ , έχουμε ίσες πιθανότητες (50%) για μέτρηση των ιδιοτιμών  $\beta_1, \varepsilon + \delta$  και  $\beta_2, \varepsilon - \delta$  αντίστοιχα. Καθώς  $|\Psi(x, t=0)\rangle = |I\rangle = (|+\rangle + |-\rangle)/\sqrt{2}$  (συντελεστές ιδοκαταστάσεων  $|+\rangle, |-\rangle$  είναι  $1/\sqrt{2}$ ).

(β) Καθώς η αρχική κατάσταση είναι  $|\Psi(x, t=0)\rangle = |I\rangle = (|+\rangle + |-\rangle)/\sqrt{2}$ , η κυματοσυνάρτηση για τυχαίο  $t$  γίνεται  $|\Psi(x, t)\rangle = (e^{-i(\varepsilon+\delta)t/\hbar}|+\rangle + e^{-i(\varepsilon-\delta)t/\hbar}|-\rangle)/\sqrt{2}$ , που είναι ισοδύναμη με την  $|\Psi(x, t)\rangle = (|+\rangle + e^{-2i\delta t/\hbar}|-\rangle)/\sqrt{2}$ .

Ισοδύναμη γραφή έχουμε με τις ιδοσυναρτήσεις  $|I\rangle, |2\rangle$ ,

$$\begin{aligned}
|\Psi(x,t)\rangle &= \left( e^{-i(\varepsilon+\delta)t/\hbar} |+\rangle + e^{-i(\varepsilon-\delta)t/\hbar} |-\rangle \right) / \sqrt{2} = \\
&= \left( e^{-i\delta t/\hbar} \left( (|1\rangle + |2\rangle) / \sqrt{2} \right) + e^{i\delta t/\hbar} \left( (|1\rangle - |2\rangle) / \sqrt{2} \right) \right) / \sqrt{2} = \\
&= \left( \left( \frac{e^{-i\delta t/\hbar} + e^{i\delta t/\hbar}}{2} \right) |1\rangle + \left( \frac{e^{-i\delta t/\hbar} - e^{i\delta t/\hbar}}{2} \right) |2\rangle \right) = \\
&= \cos(\delta t/\hbar) |1\rangle - i \sin(\delta t/\hbar) |2\rangle
\end{aligned}$$

(γ) Βασιζόμενοι στην απάντηση του ερωτήματος (β) καταλαβαίνουμε ότι τη χρονική στιγμή  $t$  αν μετρήσω τα φυσικά μεγέθη που περιγράφονται από τους τελεστές  $A$ ,  $B$ ,  $C$  και  $H$  οι τιμές και οι πιθανότητες που θα πάρω θα είναι για τα μεγέθη  $H$  και  $B$ , όπως και στην αρχική κατάσταση και για τα φυσικά μεγέθη που περιγράφονται από τους τελεστές  $A$  και  $C$ , θα έχουμε πιθανότητες  $(\cos(\delta t/\hbar))^2$  και  $(\sin(\delta t/\hbar))^2$  για μέτρηση των ιδιοτιμών  $\alpha_1, \gamma_1$  και  $\alpha_2, \gamma_2$  αντίστοιχα.

### Συμβιβαστά φυσικά μεγέθη.

Τελεστής  $A$ : περιγράφει ένα φυσικό μέγεθος.

$$\hat{A}\Psi_n = \alpha_n \Psi_n$$

Έστω  $\Psi = c_1 \Psi_1 + c_2 \Psi_2 + c_3 \Psi_3 \xrightarrow{\text{μέτρηση-παίρουμε}}$  'ΚΑΤΑΡΕΥΣΗ' της  $\Psi \rightarrow$  αποτέλεσμα ή

$\Psi_1$  ή  $\Psi_2$  ή  $\Psi_3$

Αν βρω δηλαδή την ιδιοτιμή  $\alpha_1$ , η κυματοσυνάρτηση που θα περιγράφει το σύστημα θα είναι η  $\Psi_1$ . Ομοίως για την  $\alpha_2$  η  $\Psi_2$  και για την  $\alpha_3$  η  $\Psi_3$ .

Αν έχω μόνο μια ιδιοκατάσταση

$$\Delta A = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 = 0$$

Απόδειξη:

$$\langle A^2 \rangle = \int \Psi_n^* \hat{A}^2 \Psi_n dx = \int \Psi_n^* \hat{A}(\hat{A} \Psi_n) dx = \alpha_n \int \Psi_n^* \hat{A} \Psi_n dx = \alpha_n^2 \int \Psi_n^* \Psi_n dx = \alpha_n^2$$

$$\text{Για } \Psi = \Psi_n: \langle A \rangle = \int \Psi_n^* \hat{A} \Psi_n dx = \int \Psi_n^* \alpha_n \Psi_n dx =$$

$$= \alpha_n \int \Psi_n^* \Psi_n dx = \alpha_n \Rightarrow \langle A \rangle^2 = \alpha_n^2$$

Μόνο όταν έχω μία μόνο ιδιοκατάσταση προκύπτει  $(\Delta A) = 0$ .

Έστω ένας άλλος τελεστής  $\tilde{B}$ :

Για να έχω ταυτόχρονα την αβεβαιότητα του τελεστή  $\tilde{A}$  και του τελεστή  $\tilde{B}$  ίσες με 0 θα πρέπει οι ιδιοκαταστάσεις ( $\Psi_n$ ) να είναι ίδιες για τους  $\tilde{A}$  και  $\tilde{B}$ .

$$\text{Δηλαδή: } \tilde{A} \Psi_n = \alpha_n \Psi_n \quad \text{και} \quad \tilde{B} \Psi_n = \beta_n \Psi_n$$

Θα έχω όμως διαφορετικές ιδιοτιμές.

Εξασκώ το  $\tilde{A}\tilde{B}$  στην  $\Psi_n$

$$\tilde{A}\tilde{B} \Psi_n = \tilde{A}(\tilde{B} \Psi_n) = \tilde{A}(\beta_n \Psi_n) = \beta_n(\tilde{A} \Psi_n) = \alpha_n \beta_n \Psi_n \quad (1)$$

$$\tilde{B}\tilde{A} \Psi_n = \tilde{B}(\tilde{A} \Psi_n) = \tilde{B}(\alpha_n \Psi_n) = \alpha_n(\tilde{B} \Psi_n) = \alpha_n \beta_n \Psi_n \quad (2)$$

$$\text{Από (1), (2)} \Rightarrow \tilde{A}\tilde{B} \Psi_n = \tilde{B}\tilde{A} \Psi_n \Rightarrow \tilde{A}\tilde{B} - \tilde{B}\tilde{A} = 0 \Rightarrow \tilde{A}\tilde{B} = \tilde{B}\tilde{A}$$

Η διαφορά  $\tilde{A}\tilde{B} - \tilde{B}\tilde{A}$  ορίζεται σαν ΜΕΤΑΘΕΤΗΣ ή ΕΝΑΛΛΑΚΤΗΣ.

$$[\tilde{A}, \tilde{B}] = \tilde{A}\tilde{B} - \tilde{B}\tilde{A} \rightarrow [\tilde{A}, \tilde{B}] = 0 \quad \text{Συμβιβαστά.}$$

Αν  $[\tilde{A}, \tilde{B}] \neq 0$  δεν μπορώ να τα μετρήσω ταυτόχρονα.

Δχ και Δρ:

$$[\hat{x}, \hat{p}] \Psi = (\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x})\Psi = \hat{x}\hat{p}\Psi - \hat{p}\hat{x}\Psi = \quad \left( \hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \quad \hat{x} = x \right)$$

$$= \hat{x}(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}) - \hat{p}(x\psi) =$$

$$= -i\hbar x \frac{\partial \psi}{\partial x} + i\hbar \frac{\partial}{\partial x}(x\psi) = -i\hbar x \frac{\partial \psi}{\partial x} + i\hbar \psi + i\hbar x \frac{\partial \psi}{\partial x} = i\hbar \psi$$

$$\text{Άρα } [\hat{x}, \hat{p}] \psi = i\hbar \psi$$

$$\text{Άρα } [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

$$(\Delta \hat{A})(\Delta \hat{B}) \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle| \quad \text{ΙΣΧΥΕΙ}$$

Την εφαρμόζω για τα x,p:

$$(\Delta \hat{x})(\Delta \hat{p}) \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{x}, \hat{p}] \rangle| \geq |\langle i\hbar \rangle| \geq \frac{1}{2} |i\hbar| \geq \frac{1}{2} \hbar \quad (|i|=1)$$

«ΣΚΙΑΓΡΑΦΗΣΗ»

$$(\Delta A)^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 \Rightarrow (\Delta A)^2 = \langle A^2 \rangle$$

$$\langle \hat{A}^2 \rangle = \int \Psi^* \hat{A}^2 \Psi dx = \int \Psi^* \hat{A} (\hat{A} \Psi) dx = \quad (\hat{A}: \text{ερμιτιανός})$$

$$= \int (\hat{A} \Psi)^* (\hat{A} \Psi) dx = ||\hat{A} \Psi||$$

$$\text{Ανάλογα } (\Delta \hat{B}) = ||\hat{B} \Psi||$$

Ανισότητα Schwartz

$$(\Delta \hat{A})(\Delta \hat{B}) = ||\hat{A} \Psi|| ||\hat{B} \Psi|| \xrightarrow{\text{εσωτερικό γινόμενο}} \geq (A \Psi, B \Psi) = (\Psi, AB \Psi) \geq ||AB \Psi||$$

$$\text{Με } AB = \frac{AB+BA+AB-AB}{2} = \left( \frac{AB+BA}{2} \right) + i \frac{[A,B]}{2i}$$

“Σχέσεις αβεβαιότητας υπάρχουν για τις ποσότητες που δεν είναι συμβιβαστές.”

«Συμβιβαστά φυσικά μεγέθη.»

$$\hat{A} \psi_n = a_n \psi_n$$

$$\hat{B} \psi_n = \beta_n \psi_n \quad \text{ταυτόχρονα} \Rightarrow (\Delta A) = (\Delta B) = 0$$

$$\text{Μεταθέτης : } [A, B] = AB - BA = 0 = \text{Εναλλάκτης}$$

$$[x, p_x] = i\hbar \neq 0 \quad \text{μη συμβιβαστά. Άρα μπορώ να}$$

προσδιορίσω μια σχέση Heisenberg.

$$\text{Ενώ αν } [x, p_x] = i\hbar \neq 0 \rightarrow \text{όχι συμβιβαστά!}$$

$$\text{π.χ. } [x, y] = ?$$

$$[x, y] \Psi = (xy - yx) \Psi = xy \Psi - yx \Psi = 0 \rightarrow \text{συμβιβαστά φυσικά μεγέθη.}$$

$$\text{π.χ. } [x, p_y] = ?$$

$$[x, p_y] \Psi_{(x,y,z)} = (x p_y - p_y x) \Psi = x \left( -i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) - \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial y} (x \Psi) \right) =$$

$$= i\hbar x \frac{\partial \Psi}{\partial y} + i\hbar x \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0 \rightarrow \text{συμβιβαστά φυσικά μεγέθη.}$$

**Ιδιότητες μεταθέτη**

1.

$$[\hat{A}, \hat{B} + C] = [A, B] + [A, C] \quad (2)$$

$$A(B + C) - (B + C)A = AB + AC - BA - CA =$$

$$= (AB - BA) + (AC - CA) = [A, B] + [A, C]$$

$$[A + B, C] = [A, C] + [B, C]$$

Γενίκευση

$$[A + B, C + D] = [A, C] + [A, D] + [B, C] + [B, D]$$

2.

$$[A, B \cdot C] = [A, B]C + B[A, C] \quad (3)$$

$$[A \cdot B, C] = A[B, C] + [A, C]B$$

$$[A, B \cdot C] = ABC - BCA = \xrightarrow{\pm BAC}$$

$$= ABC - BCA + BAC - BAC = (AB - BA)C + B(AC - CA) =$$

$$= [A, B]C + B[A, C]$$

Παραδείγματα

$$\boxed{[x, P] = i\hbar} \quad (1) = i\hbar \frac{\partial P}{\partial P}$$

$$\text{π.χ. } [x, P^2] \xrightarrow{(3)} [x, P \cdot P] = P[x, P] + [x, P]P \xrightarrow{(1)}$$

$$i\hbar P + i\hbar P = 2i\hbar P = i\hbar \frac{\partial P^2}{\partial P}$$

$$\neq 0 \rightarrow \text{όχι συμβιβαστά!}$$

$$\text{π.χ. } [x, P^3] = [x, P^2 \cdot P] = P^2[x, P] + [x, P^2]P \xrightarrow{(1)}$$

$$= i\hbar P^2 + 2i\hbar P^2 = 3i\hbar P^2 = i\hbar \frac{\partial P^3}{\partial P}$$

$$\neq 0 \rightarrow \text{όχι συμβιβαστά!}$$

$$\text{π.χ. } [x, P^4] = 4i\hbar P^3$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\bullet \quad [x, P] = i\hbar = i\hbar \frac{\partial P^1}{\partial P}$$

$$\bullet \quad [x, P^2] = i\hbar \frac{\partial P^2}{\partial P}$$

$$\bullet \quad [x, P^3] = i\hbar \frac{\partial P^3}{\partial P}$$

$$\text{Δηλαδή: } A(P) = C_0 + C_1 P^1 + C_2 P^2 + C_3 P^3$$

$$\xrightarrow{(2)} [x, A(P)] = [x, C_0] + [x, C_1 P] + [x, C_2 P^2] + \dots =$$

$$= 0 + i\hbar C_1 \frac{\partial P^1}{\partial P} + i\hbar C_2 \frac{\partial P^2}{\partial P} + i\hbar C_3 \frac{\partial P^3}{\partial P} + \dots =$$

$$= i\hbar \frac{\partial}{\partial P} (C_0 + C_1 P + C_2 P^2 + \dots) = i\hbar \frac{\partial}{\partial P} A(P)$$

3.

$$\text{Έστω } A(p) = c_0 + c_1 p^1 + c_2 p^2 + c_3 p^3 + \dots$$

$$[x, p^1] = i\hbar = i\hbar \frac{\partial p^1}{\partial p}$$

$$[x, p^2] = [x, pp] = [x, p]p + p[x, p] = (i\hbar)p + p(i\hbar) = 2i\hbar p = i\hbar \frac{\partial p^2}{\partial p}$$

$$[x, p^3] = [x, p^2 p] = [x, p^2]p + p^2[x, p] = 2i\hbar p^2 + p^2 i\hbar = 3i\hbar p^2$$

$$= i\hbar \frac{\partial p^4}{\partial p}$$

Ομοίως

$$[x, p^4] = i\hbar \frac{\partial p^4}{\partial p}$$

$$\text{Άρα } [x, A(p)] = [x, c_0 + c_1 p + c_2 p^2 + c_3 p^3 + \dots] =$$

$$= [x, c_0] + [x, c_1 p] + [x, c_2 p^2] + \dots =$$

$$([x, c_0] = xc_0 - c_0x = 0)$$

$$= [x, c_0] + c_1 [x, p] + c_2 [x, p^2] + \dots =$$

$$= c_1 i\hbar \frac{\partial p}{\partial p} + c_2 i\hbar \frac{\partial p^2}{\partial p} + \dots =$$

$$= i\hbar \frac{\partial}{\partial p} (c_1 p + c_2 p^2 + \dots) =$$

$$= i\hbar \frac{\partial A(p)}{\partial p}$$

$$[x, A(x, p)] = [x, A(p)] = i\hbar \frac{\partial A(x, p)}{\partial p}$$

$$4. [p, B(x, p)] = -i\hbar \frac{\partial B(x, p)}{\partial x}$$

### Άσκηση

Έχω τον τελεστή της στροφορμής  $\vec{\ell}$ . Μπορώ να υπολογίσω ταυτόχρονα το  $[\ell_x, \ell_y]$ ;

$$\vec{\ell} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix} = (yP_z - zP_y)\hat{i} + (zP_x - xP_z)\hat{j} + (xP_y - yP_x)\hat{k}$$

$$(yP_z - zP_y)\hat{i} = \ell_x$$

$$(zP_x - xP_z)\hat{j} = \ell_y$$

$$\text{Άρα } [\ell_x, \ell_y] = [(yP_z - zP_y), (zP_x - xP_z)] \xrightarrow{\text{ιδιότητα 1}}$$

$$= [yP_z, zP_x] - [yP_z, xP_z] - [zP_y, zP_x] + [zP_y, xP_z] \quad (1)$$

$$[yP_z, zP_x] \xrightarrow{\text{ιδιότητα 2}} z[yP_z, P_x] + [yP_z, z]P_x =$$

$$= zy[P_z, P_x] + z[y, P_x]P_z + y[P_z, z]P_x + [y, z]P_xP_z =$$

$$= -i\hbar yP_x$$

$$\text{Άρα } (1) = -i\hbar yP_x$$

$$[zP_y, xP_z] = -i\hbar xP_y$$

$$\text{άρα } (1) = -i\hbar yP_x + i\hbar xP_y = i\hbar (xP_y - yP_x) = i\hbar \ell_z$$

$$\text{άρα } [\ell_x, \ell_z] = -i\hbar \ell_y$$

$$[\ell_y, \ell_z] = i\hbar \ell_x \quad \text{γιατί κυκλικά } \ell_x \rightarrow \ell_y \rightarrow \ell_z$$

$$\begin{aligned} [x, P_x] &= i\hbar \\ [y, P_y] &= i\hbar \\ [z, P_z] &= i\hbar \end{aligned}$$

## ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑΣ

$$\boxed{(\Delta A)(\Delta B) \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right|}$$

$$\text{π.χ. } \Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{x}, \hat{p}] \rangle \right|$$

$$\text{για } [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \text{ έχουμε } \Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2} |\langle i\hbar \rangle| = \frac{1}{2} |i\hbar| = \frac{\hbar}{2} \text{ γιατί } |i|=1.$$

$$\text{Σχέση Αβεβαιότητας: } (\Delta A)(\Delta B) \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle|$$

$$\text{π.χ. } A = \ell_x$$

$$B = \ell_y$$

Σχέση αβεβαιότητας;

$$(\Delta \ell_x)(\Delta \ell_y) \geq \frac{1}{2} |\langle [\ell_x, \ell_y] \rangle| = \frac{1}{2} |\langle i\hbar \ell_z \rangle| = \frac{1}{2} |i\hbar \langle \ell_z \rangle| = \frac{\hbar}{2} |\langle \ell_z \rangle|$$

### Άσκηση

$$(\Delta p_x)(\Delta \ell_z) = ?$$

$$(\Delta p_x)(\Delta \ell_z) \geq \frac{1}{2} |\langle [p_x, \ell_z] \rangle| \quad (1)$$

$$\begin{aligned} [p_x, \ell_z] &= [p_x, x p_y - y p_x] = [p_x, x p_y] - [p_x, y p_x] = (p_x \text{ και } y p_y \text{ είναι συμβιβαστά}) \\ &= x [p_x, p_y] + [p_x, x] p_y = -i\hbar p_y \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } (1) = \frac{\hbar}{2} |\langle p_y \rangle|$$

$$\text{π.χ. } (\Delta p_x^3)(\Delta \ell_z^5) = ?$$

$$\text{π.χ. } \Delta p_x \Delta (\ell_x + \ell_z) = ?$$

