

ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ Ι

Τελική Εξέταση: 1 Φλεβάρη 2016 (Διδάσκων: Α.Φ. Τερζής)

ΘΕΜΑ 1[1+0.5+0.25+0.25]

Θεωρούμε κβαντικό σύστημα που περιγράφεται από την Χαμιλτονιανή,

$$H = \varepsilon(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|) + \sqrt{2}i\varepsilon(|2\rangle\langle 3| - |3\rangle\langle 2|),$$

με $|1\rangle$, $|2\rangle$ και $|3\rangle$ ιδιοσυναρτήσεις κάποιου ερμιτιανού τελεστή και ε πραγματικός.

(α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του τελεστή της ενέργειας.

Θεωρούμε δύο φυσικά μεγέθη που περιγράφονται από τους τελεστές A και B . Η μορφή σε πίνακα

χρησιμοποιώντας τις ιδιοσυναρτήσεις $|1\rangle$, $|2\rangle$ και $|3\rangle$ για τον A είναι $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{bmatrix}$, ενώ ο

$$B = b|1\rangle\langle 1| - b|3\rangle\langle 3|, \text{ όπου } a \text{ και } b \text{ πραγματικοί.}$$

Την χρονική στιγμή $t=0$, μετράμε τα φυσικά μεγέθη που σχετίζονται με τους τελεστές A και B και βρίσκουμε μηδενική τιμή και τιμή b , αντίστοιχα.

(β) Να βρεθεί η κυματοσυνάρτηση του συστήματος την τυχαία χρονική στιγμή $t > 0$.

(γ) Αν την χρονική στιγμή t μετρήσω τα φυσικά μεγέθη A και H ποιες είναι οι δυνατές μετρούμενες τιμές και με ποιες πιθανότητες;

(δ) Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της μέσης τιμής του A χρησιμοποιώντας την μέση τιμή του μεταθέτη των A και H .

ΘΕΜΑ 2[0.25+0.5]

(α) Εξηγήστε αν είναι ερμιτιανός τελεστής ο τελεστής $yp_y + p_xz$

(β) Να βρεθεί η ελάχιστη δυνατή τιμή του $\Delta p_x \Delta l_x$.

ΘΕΜΑ 3[1]

Ηλεκτρόνιο βρίσκεται σε απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού πάχους L . Θεωρούμε ότι το ηλεκτρόνιο βρίσκεται στην $1^{\text{η}}$ διεγερμένη ενεργειακή κατάσταση. Ξαφνικά τριπλασιάζουμε το πάχος του πηγαδιού.

Η γενική μορφή της κυματοσυνάρτησης είναι $\Psi(x, t) = \sum_n c_n \psi_n(x) e^{-iE_n t/\hbar}$.

Να γράψετε την γενική μορφή των ολοκληρωμάτων από τα οποία υπολογίζονται οι συντελεστές c_n , λαμβάνοντας υπόψη ότι οι ιδιοσυναρτήσεις απειρόβαθου πηγαδιού δυναμικού πάχους L είναι της

$$\text{μορφής } \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \Theta(x) \cdot \Theta(L-x).$$

ΘΕΜΑ 4[0.5×6]

Ηλεκτρόνιο βρίσκεται σε δυναμικό $V(x) = \begin{cases} \infty, & |x| > b \\ 0, & a < |x| < b, \text{ όπου } a < b \text{ και } V_0 \geq 0. \\ -V_0, & |x| < a \end{cases}$

(α) Να προσδιοριστεί η μορφή των ιδιοσυναρτήσεων της ενέργειας για θετικές ενέργειες.

(β) Να βρεθούν οι συνθήκες από τις οποίες εκτιμούνται οι ιδιοτιμές της θετικής ενέργειας.

(γ) Να δείξετε ότι η οριακή περίπτωση για $V_0 \rightarrow 0$, αντιστοιχεί σε απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού.

(δ) Αν $a \rightarrow 0$, $V_0 \rightarrow \infty$ με $2aV_0 = c$ να βρεθούν οι ιδιοτιμές της ενέργειας.

(ε) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές της ενέργειας για δυναμικό $V(x) = \begin{cases} \infty, & |x| > b \\ -c\delta(x), & |x| < b \end{cases}$ και να συγκριθούν

με τα αποτελέσματα του προηγούμενου ερωτήματος.

(στ) Να διερευνηθεί η δυνατότητα ύπαρξης περιττής ιδιοσυνάρτησης μηδενικής ενέργειας.

ΘΕΜΑ 5 [0.25+0.75]

Θεωρούμε σκέδαση ηλεκτρονίου ενέργειας E , σε ορθογώνιο φράγμα δυναμικό πάχους L και ύψους V_0 με $E > V_0$.

Ο συντελεστής διέλευσης υπολογίζεται από την σχέση, $T = \frac{4E(E-V_0)}{4E(E-V_0) + V_0^2 \sin^2 \left(\frac{\sqrt{2m(E-V_0)}L}{\hbar} \right)}$.

(α) Για ποιές τιμές της ενέργειας παρατηρείται το φαινόμενο του συντονισμού.

(β) Αν το ύψος του φράγματος είναι $1eV$ και το πάχος $1nm$, να υπολογιστεί (σε eV) η ελάχιστη ενέργεια για την οποία έχουμε μηδενικό συντελεστή ανάκλασης.

ΘΕΜΑ 6 [1+0.5+0.5]

Αρμονικός ταλαντωτής βρίσκεται στις δύο πρώτες ενεργειακές καταστάσεις του με $\langle E \rangle = 1$, $\langle p \rangle = 0$ γιατί $t=0$.

(α) Υπολογίστε την μέση αρτιότητα για $t=0$.

(β) Υπολογίστε την χρονοεξαρτώμενη μέση τιμή της ορμής από την σχέση $\int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x,t) \hat{p} \Psi(x,t) dx$

(γ) Υπολογίστε την χρονοεξαρτώμενη μέση τιμή της θέσης χρησιμοποιώντας τους τελεστές a, a^+ .

Υπόδειξη: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$, $\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{(2a)^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$, $\psi_0 = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} e^{-x^2/2}$, $\psi_1 = \sqrt{\frac{4}{\pi}} x e^{-x^2/2}$.

ΘΕΜΑ 7 [0.25+0.75+0.25]

Η κατάσταση του ηλεκτρονίου σε ένα άτομο υδρογόνου περιγράφεται, σε μια ορισμένη χρονική στιγμή από την κυματοσυνάρτηση $\Psi(\vec{r}) = N(\psi_{200}(\vec{r}) + 2\psi_{211}(\vec{r}) + \psi_{32-1}(\vec{r}))$.

(α) Να υπολογίστε τον συντελεστή κανονικοποίησης.

(β) Να υπολογίστε της μέσες τιμές $\langle I^2 \rangle, \langle E \rangle$ καθώς και την αβεβαιότητα ΔI_z .

(γ) Την τυχαία χρονική στιγμή t , να υπολογιστεί η $\langle I_x \rangle(t)$.

Χρήσιμες Φυσικές σταθερές, $h = 6,626 \times 10^{-34} J \cdot s$, $m_e = 9,1 \times 10^{-31} kg$, $e = 1,6 \times 10^{-19} C$.