ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι

Τελική Εξέταση: 31 Γενάρη 2017 (Διδάσκων: Α.Φ. Τερζής)

ΘΕΜΑ 1

Θεωρούμε κβαντικό σύστημα που περιγράφεται από Χαμιλτονιανή *H*, η οποία σε μορφή πίνακα είναι $H=\begin{bmatrix}\varepsilon & \mu\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, όπου $\varepsilon,\ \mu$ πραγματικοί.

Στο πίνακα της Χαμιλτονιανής χρησιμοποιήθηκαν οι ιδιοσυναρτήσεις $|1\rangle$ και $|2\rangle$ ερμιτιανού τελεστή *O* με ιδιοτιμές o_1 και o_2, αντίστοιχα. **(α)** Να βρεθεί η τιμή του μ.

Θεωρούμε φυσικό μέγεθος που περιγράφεται από τον τελεστή *W*, με $W = w\left[|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|\right]$, όπου *w* θετικός πραγματικός. **(β)** Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του τελεστή *W*.

Σε μέτρηση του φυσικού μεγέθους που σχετίζονται με τον τελεστή *W* την χρονική στιγμή *t*=0, βρίσκουμε $-w$.

(γ) Να βρεθεί η χρονοεξαρτώμενη κυματοσυνάρτηση του συστήματος.

(δ) Επίσης να βρεθεί η χρονοεξαρτώμενη πιθανότητα μέτρησης της θετικής ιδιοτιμής του τελεστή *W*.

(ε) Χρησιμοποιώντας τον μεταθέτη των τελεστών *O* και *W*, να αποδείξετε ότι δεν μπορούν, τα φυσικά μεγέθη που σχετίζονται με αυτούς τους τελεστές, να μετρηθούν ταυτόχρονα.

Λύση

(α) Καθώς η Χαμιλτονιανή είναι ερμιτιανός τελεστής έχουμε ότι $\langle 1|H|2\rangle = \left(\langle 2|H|1\rangle\right)^* \Rightarrow \mu = 0$.

(β)'Εχουμε $W=\begin{bmatrix}0 & w\\ w & 0\end{bmatrix}$. Απαιτούμε $\det\begin{bmatrix}0-\lambda & w\\ w & 0-\lambda\end{bmatrix}=0 \Rightarrow \lambda^2 - w^2 = 0 \Rightarrow \lambda_+ = +w, \lambda_- = -w$.

Για το πρώτο ιδιοδιάνυσμα (λ=+w) χρειάζεται να λύσω το αλγεβρικό σύστημα, με το περιορισμό της κανονικότητας $|x|^2+|y|^2=1$ (προσοχή, *x*, *y* είναι γενικά μιγαδικοί). $\begin{bmatrix}-w & w\\ w & -w\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \Rightarrow |+w\rangle = \dfrac{|1\rangle+|2\rangle}{\sqrt{2}}$.

Για το δεύτερο ιδιοδιάνυσμα (λ=-w) χρειάζεται να λύσω το αλγεβρικό σύστημα, με το περιορισμό της κανονικότητας $|x'|^2+|y'|^2=1$. $\begin{bmatrix}w & w\\ w & w\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \Rightarrow |-w\rangle = \dfrac{|1\rangle-|2\rangle}{\sqrt{2}}$.

(γ) Η κυματοσυνάρτηση του συστήματος για *t* =0 είναι $|\psi(x,t=0)\rangle = |-w\rangle = \dfrac{|1\rangle-|2\rangle}{\sqrt{2}} \Rightarrow |\psi(x,t)\rangle = \dfrac{\left(|1\rangle e^{-i\varepsilon t/\hbar} - |2\rangle\right)}{\sqrt{2}}$.

(δ) $$P_{|w\rangle}(t) = \left|\langle w|\Psi(x,t)\rangle\right|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{i\varepsilon t}{\hbar}}\langle w|1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\langle w|2\rangle\right|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{i\varepsilon t}{\hbar}}\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \left|\frac{e^{-\frac{i\varepsilon t}{2\hbar}} - e^{-\frac{i\varepsilon t}{2\hbar}}}{2}\right|^2 = \sin^2\left(\frac{i\varepsilon t}{2\hbar}\right).$$

(ε) Ο μεταθέτης $[W,O]$ είναι μη μηδενικός, καθώς

$$[W,O] = WO - OW = w\left(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|\right)\left(\mathrm{o}_1|1\rangle\langle 1| + \mathrm{o}_2|2\rangle\langle 2|\right) - \left(\mathrm{o}_1|1\rangle\langle 1| + \mathrm{o}_2|2\rangle\langle 2|\right)w\left(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|\right) =$$
$$w\left(\mathrm{o}_2|1\rangle\langle 2| + \mathrm{o}_1|2\rangle\langle 1|\right) - w\left(\mathrm{o}_1|1\rangle\langle 2| + \mathrm{o}_2|2\rangle\langle 1|\right) = w\left(\mathrm{o}_2 - \mathrm{o}_1\right)\left(|1\rangle\langle 2| - |2\rangle\langle 1|\right)$$

ΘΕΜΑ 2

Ηλεκτρόνιο βρίσκεται περιορισμένο σε απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού εκτεινόμενο στην περιοχή $[0,L]$. Η αρχική νορμαλισμένη κυματοσυνάρτηση του ηλεκτρονίου είναι $\psi(x,t=0)=\sin\frac{\pi x}{L}\left(\mathrm{i}+2\cdot\cos\frac{\pi x}{L}\right)/\sqrt{L}$.

(α) Να βρεθεί η $\psi(x,t)$.

(β) Να υπολογιστεί η μέση ενέργεια του συστήματος.

(γ) Να υπολογιστεί η μέση χρονοεξαρτώμενη θέση και η μέση χρονοεξαρτώμενη ορμή του συστήματος την τυχαία χρονική στιγμή t και να επαληθευτεί το $1^{\text{ο}}$ θεώρημα του Ehrenfest.

Υπόδειξη:

Η γενική μορφή της κυματοσυνάρτησης είναι $\psi(x,t=0)=|c_a|e^{i\varphi_{ab}}\psi_a(x)+|c_b|\psi_b(x)$.

Η μέση τιμή του τυχαίου τελεστή W είναι, $\langle W\rangle(t)=|c_a|^2 W_{aa}+|c_b|^2 W_{bb}+2|c_a||c_b||W_{ba}|\cos(\omega t+\varphi_{ab}+\delta)$, όπου $W_{ba}=|W_{ba}|e^{i\delta}$ και $\omega=\left(E_b-E_a\right)/\hbar$.

Ιδιοσυναρτήσεις απειρόβαθου πηγάδιού δυναμικού πάχους L, $\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin(\frac{n\pi x}{L})\cdot\Theta(x)\cdot\Theta(L-x)$.

Τέλος ισχύουν οι σχέσεις,

$$\int_0^L x\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx=-\frac{4L^2}{\pi^2}\frac{nm}{\left(n^2-m^2\right)^2},\quad \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx=\frac{2Ln}{\left(n^2-m^2\right)\pi}.$$

Η δεύτερη σχέση ισχύει όταν $n+m$ είναι περιττός ακέραιος.

Λύση

Έχουμε

$$\psi(x,t=0)=\sin\frac{\pi x}{L}\left(i+2\cdot\cos\frac{\pi x}{L}\right)/\sqrt{L}=\frac{i}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{\pi x}{L}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{L}}2\sin\frac{\pi x}{L}\cos\frac{\pi x}{L}=\frac{i}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{L}}\cos\frac{\pi x}{L}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{2\pi x}{L}=\frac{i}{\sqrt{2}}\psi_1+\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2.$$

(α) Άρα $\psi(x,t)=\dfrac{i}{\sqrt{2}}\psi_1 e^{-iE_1t/\hbar}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\psi_2 e^{-iE_2t/\hbar}$, όπου $E_1=\dfrac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$ και $E_2=4E_1$.

(β) $\langle E\rangle=P_1E_1+P_2E_1=0.5\left(E_1+E_2\right)=0.5\left(E_1+4E_1\right)=\dfrac{5E_1}{2}=\dfrac{5\hbar^2\pi^2}{8mL^2}.$

(γ) Έχουμε $\langle x\rangle(t)=|c_1|^2 x_{11}+|c_2|^2 x_{22}+2|c_1||c_2||x_{21}|\cos(\omega t+\varphi_{12}+\delta)=\left(x_{11}+x_{22}\right)/2+|x_{21}|\cos(\omega t+\varphi_{12}+\delta)$, όπου

$$x_{11}=x_{22}=\frac{L}{2},\ x_{21}=\int_0^L x\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{1\pi x}{L}\right)dx=-\frac{2}{L}\frac{4L^2}{\pi^2}\frac{2}{\left(1^2-3^2\right)^2}=-\frac{16L}{9\pi^2},\ x_{21}=-\frac{16L}{9\pi^2}=|x_{21}|e^{i\pi}$$ οπότε

$$\delta=\pi,|x_{21}|=\frac{16L}{9\pi^2},\varphi_{12}=\pi/2 \text{ και } \langle x\rangle(t)=\frac{L}{2}+\frac{16L}{9\pi^2}\sin(\omega t).$$

Έχουμε $\langle p\rangle(t)=|c_1|^2 p_{11}+|c_2|^2 p_{22}+2|c_1||c_2||p_{21}|\cos(\omega t+\varphi_{12}+\delta')=-|p_{21}|\sin(\omega t+\delta')$, όπου

$$p_{21}=\int_0^L x\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{1\pi x}{L}\right)dx=\frac{-2i\hbar\pi}{L^2}\int_0^L\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{1\pi x}{L}\right)dx=$$

$$\frac{-2i\hbar\pi}{L^2}\int_0^L\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{1\pi x}{L}\right)dx=\frac{-2i\hbar\pi}{L^2}\frac{2L2}{\left(2^2-1^2\right)\pi}=\frac{-8\hbar i}{3L}=\frac{8\hbar}{3L}e^{-i\pi/2},$$

οπότε $\delta'=-\pi/2,|p_{21}|=\dfrac{8\hbar}{3L}$ και $\langle p\rangle(t)=\dfrac{8\hbar}{3L}\cos(\omega t)$.

Τώρα $\omega=\dfrac{\left(E_2-E_1\right)}{\hbar}=\dfrac{3\hbar\,\pi^2}{2mL^2}$

και $m\dfrac{d\langle x\rangle(t)}{dt}=m\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{L}{2}+\dfrac{16L}{9\pi^2}\sin(\omega t)\right)=\dfrac{16Lm}{9\pi^2}\omega\cos(\omega t)=\dfrac{16Lm}{9\pi^2}\dfrac{3\hbar\,\pi^2}{2mL^2}\cos(\omega t)=\dfrac{8\hbar}{3L}\cos(\omega t)=\langle p\rangle(t).$

ΘΕΜΑ 4

Αρμονικός ταλαντωτής βρίσκεται στις δύο πρώτες άρτιες ενεργειακές καταστάσεις του (θεμελιώδη και 2^{η} διεγερμένη) με μέση ενέργεια 1.5 και μέση δυναμική ενέργεια 0.75 για t=0.

(α) Να βρεθεί η κυματοσυνάρτηση του συστήματος για t=0.

(β) Υπολογίστε την *χρονοεξαρτώμενη* μέση τιμή της δυναμικής ενέργειας χρησιμοποιώντας την σχέση ορισμού $\left(\psi(x,t),V(x)\psi(x,t)\right)$.

(γ) Υπολογίστε την *χρονοεξαρτώμενη* μέση τιμή της ορμής χρησιμοποιώντας τους τελεστές a,a^+.

<u>Υπόδειξη:</u>

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}},\ \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n}e^{-\alpha x^2}dx=\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{(2\alpha)^n}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}},\ \psi_0=\frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}e^{-x^2/2},\ \psi_1=\sqrt[4]{\frac{4}{\pi}}xe^{-x^2/2},\ \psi_2=\sqrt[4]{\frac{1}{4\pi}}\left(2x^2-1\right)e^{-x^2/2}.$$

<u>Λύση</u>

(α) Έχουμε $\langle E\rangle=P_0E_0+P_2E_2=(1/2)P_0+(5/2)P_2=1.5$ και καθώς $P_0+P_2=1,$ βρίσκουμε $P_0=|c_0|^2=P_2=|c_2|^2=1/2.$

Ακόμα γνωρίζουμε ότι $\langle V\rangle=\langle x^2/2\rangle$, όπου $\langle x^2\rangle(t=0)=|c_0|^2 x_{00}^2+|c_2|^2 x_{22}^2+2|c_0||c_2||x_{20}^2|\cos(\varphi_{02}+\delta)$. Τώρα,

$$x_{00}^2=\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_0(x)x^2\Psi_0(x)dx=\sqrt{\frac{1}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-x^2}dx=\sqrt{\frac{1}{\pi}}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=\frac{1}{2},$$

$$x_{22}^2=\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_2(x)x^2\Psi_2(x)dx=\sqrt{\frac{1}{4\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(2x^2-1\right)^2x^2e^{-x^2}dx=\sqrt{\frac{1}{4\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(4x^6-4x^4+x^2\right)^2e^{-x^2}dx=$$

$$\sqrt{\frac{1}{4\pi}}\left(4\frac{1\cdot3\cdot5}{2^3}-4\frac{1\cdot3}{2^2}+\frac{1}{2^1}\right)\sqrt{\pi}=\frac{1}{2}\left(\frac{15}{2}-3+\frac{1}{2}\right)=2.5$$

$$x_{20}^2=\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_2(x)x^2\Psi_0(x)dx=\sqrt[4]{\frac{1}{4\pi}}\frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(2x^2-1\right)x^2e^{-x^2}dx=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(2x^4-x^2\right)e^{-x^2}dx=$$

$$\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\left(2\frac{1\cdot3}{2^2}-\frac{1}{2^1}\right)\sqrt{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\Rightarrow|x_{20}^2|=\sqrt{\frac{1}{2}},\ \delta=0$$

Άρα $\langle x^2\rangle(t)=\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}\cos(\varphi_{02})\Rightarrow\langle V\rangle=\langle x^2/2\rangle=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\cos(\varphi_{02}).$ Αφού $\langle V\rangle=\frac{3}{4}\Rightarrow\cos(\varphi_{02})=0\Rightarrow\varphi_{02}=\frac{\pi}{2}$.

Έτσι η κυματοσυνάρτηση είναι $\Psi(x,t=0)=\frac{i\Psi_0+\Psi_2}{\sqrt{2}}$.

(β) Έχουμε για την *χρονοεξαρτώμενη* μέση τιμή της δυναμικής ενέργειας ($\omega=E_2-E_0=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}=2$)

$$\langle V\rangle(t)=\langle x^2/2\rangle(t)=\left(|c_0|^2x_{00}^2+|c_2|^2x_{22}^2+2|c_0||c_2||x_{20}^2|\cos(2t+\varphi_{02}+\delta)\right)/2=0.75+\sin(2t)/\left(2\sqrt{2}\right).$$

(γ) Η χρονοεξαρτώμενη κυματοσυνάρτηση είναι $\Psi(x,t)=\frac{i\Psi_0e^{-it/2}+\Psi_2e^{-i5t/2}}{\sqrt{2}}$ ή $|\Psi\rangle=\frac{i|0\rangle e^{-it/2}+|2\rangle e^{-i5t/2}}{\sqrt{2}}$, άρα

$$\langle p\rangle(t)=\langle\Psi|\frac{i\left(a^+-a\right)}{\sqrt{2}}|\Psi\rangle=\left(\frac{-i\langle0|e^{it/2}+\langle2|e^{i5t/2}}{\sqrt{2}}\right)\left[\frac{a-a^+}{i\sqrt{2}}\right]\left(\frac{i|0\rangle e^{-it/2}+|2\rangle e^{-i5t/2}}{\sqrt{2}}\right)=$$

$$\left(\frac{-i\langle0|e^{it/2}+\langle2|e^{i5t/2}}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{-ia^+|0\rangle e^{-it/2}+a|2\rangle e^{-i5t/2}-a^+|2\rangle e^{-i5t/2}}{i\sqrt{2}\sqrt{2}}\right)=$$

$$\left(\frac{-i\langle0|e^{it/2}+\langle2|e^{i5t/2}}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{-i|1\rangle e^{-it/2}+\sqrt{2}|1\rangle e^{-i5t/2}-\sqrt{3}|3\rangle e^{-i5t/2}}{i\sqrt{2}\sqrt{2}}\right)=0.$$

ΘΕΜΑ 5

Θεωρούμε κυβική κβαντική τελεία πλευράς $1nm$. **(α)** Να γράψετε τις ιδιοσυναρτήσεις της 1ης διεγερμένης ενεργειακής κατάστασης. **(β)** Να υπολογιστεί η ενέργεια της κατάστασης αυτής σε eV.

Λύση

Από τις παραδόσεις του μαθήματος και από τις σημειώσεις στο ιστότοπο του μαθήματος γνωρίζουμε ότι η κβαντική τελεία μπορεί να περιγραφεί από ένα τρισδιάστατο απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού.

(α) Άρα έχουμε $\dfrac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\left(n_x^2+n_y^2+n_z^2\right)$ με $\left(n_x,n_y,n_z\right)=(2,1,1),(1,2,1),(1,1,2)$. Δηλαδή η 1η διεγερμένη ενεργειακή κατάσταση είναι εκφυλισμένη με εκφυλισμό 3.

(β) Για κυβική κβαντική τελεία πλευράς $1nm$, έχουμε

$$\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\left(1^2+1^2+2^2\right)=6\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}=6\frac{h^2}{8mL^2}=\frac{6\times 6.626^2\times 10^{-68}}{8\times 9.1\times 10^{-31}\times 10^{-18}}=3.6\times 10^{-19}J=2.25\text{eV}$$

ΘΕΜΑ 6

Η κατάσταση του ηλεκτρονίου σε ένα άτομο υδρογόνου περιγράφεται, σε μια ορισμένη χρονική στιγμή από την κυματοσυνάρτηση $\Psi(\vec{r},t)=N\left(\psi_{100}(\vec{r})e^{-it/2}-i\psi_{2K1}(\vec{r})e^{-it/8}\right)$. Να βρεθούν (δηλαδή να εξηγηθούν επαρκώς και να φαίνονται οι *πράξεις*), **(α)** ο κβαντικός αριθμός K, **(β)** ο συντελεστή κανονικοποίησης N. Ακόμα **(γ)** η $\langle E\rangle$ **(δ)** η $\langle l_y\rangle$ και τέλος **(ε)** το *χρονοεξαρτημένο* μέσο $\langle r\rangle(t)$.

Υπόδειξη:

$$\int_0^\infty r^n e^{-\alpha r}dr=\frac{n!}{\alpha^{n+1}},\quad \psi_{100}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-r},\psi_{200}=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left(1-\frac{r}{2}\right)e^{-r/2},\psi_{210}=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}re^{-r/2}\cos\theta,\psi_{21\pm1}=\frac{1}{8\sqrt{\pi}}re^{-r/2}\sin\theta e^{\pm i\varphi}.$$

Λύση

(α)) Ισχύει για τον κβαντικό αριθμό K, $K\le n-1=2-1=1$ οπότε $K=0$ ή $K=1$, αλλά στην ψ_{2K1} $m=1$έτσι $K=1$.

(β) $\int\Psi^*(\vec{r})\Psi(\vec{r})d\vec{r}=\int N\left(\psi_{100}^*(\vec{r})e^{it}+i\psi_{211}^*(\vec{r})e^{it/4}\right)N\left(\psi_{100}(\vec{r})e^{-it}-i\psi_{2K1}(\vec{r})e^{-it/4}\right)d\vec{r}=2N^2=1$

Οπότε $N=1/\sqrt{2}$ και $P_{100}=P_{211}=1/2$

(γ) Η ενέργεια προσδιορίζεται $\langle E\rangle=P_{100}\left(-\dfrac{1}{2\times 1^2}\right)+P_{211}\left(-\dfrac{1}{2\times 2^2}\right)=\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{8}\right)=-\dfrac{5}{16}$.

(δ) Το $\langle l_y\rangle(t)$ είναι μηδενική καθώς,

$$\langle l_y\rangle=\int\Psi^*(\vec{r})l_y\Psi(\vec{r})d\vec{r}=\int\Psi^*(\vec{r})\left(\frac{l_+-l_-}{2i}\right)\Psi(\vec{r})d\vec{r}=\int\left(\psi_{100}^*(\vec{r})+i\psi_{211}^*(\vec{r})\right)\left(\frac{l_+-l_-}{4i}\right)\left(\psi_{100}(\vec{r})-i\psi_{211}(\vec{r})\right)d\vec{r}=$$

$$\int\left(\psi_{100}^*(\vec{r})+i\psi_{211}^*(\vec{r})\right)\left(l_+\psi_{100}(\vec{r})-il_+\psi_{211}(\vec{r})+l_-\psi_{100}(\vec{r})-il_-\psi_{211}(\vec{r})\right)d\vec{r}/4i= \qquad \text{ο}$$

$$\int\left(\psi_{100}^*(\vec{r})+i\psi_{211}^*(\vec{r})\right)\left(0-i\cdot 0+0-i\sqrt{2}\psi_{210}(\vec{r})\right)d\vec{r}/4i=0$$

όπου για τον μηδενισμός των ολοκληρωμάτων χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις ορθογωνιότητας.Η παραπάνω λύση έγινε χωρίς τα εκθετικά της χρονοεξάρτησης, αλλά είναι ολοφάνερο ότι η παρουσία τους δεν θα άλλαζε τίποτα.

(ε) Τώρα για το *χρονοεξαρτημένο* μέσο $\langle r\rangle(t)$ έχουμε

$$\langle r(t)\rangle = \int \Psi^*(\vec{r})r\Psi(\vec{r})d\vec{r} = \int\left(\psi_{100}^*(\vec{r})e^{it/2} + i\psi_{211}^*(\vec{r})e^{it/8}\right)r\left(\psi_{100}(\vec{r})e^{-it/2} - i\psi_{2K1}(\vec{r})e^{-it/8}\right)d\vec{r}/2 =$$

$$\int\psi_{100}^*(\vec{r})r\psi_{100}(\vec{r})d\vec{r}/2 + \int\psi_{100}^*(\vec{r})r\psi_{211}(\vec{r})e^{3it/8}d\vec{r}/2 + \int\psi_{100}(\vec{r})r\psi_{211}^*e^{-3it/8}d\vec{r}/2 + \int\psi_{211}^*(\vec{r})r\psi_{211}(\vec{r})d\vec{r}/2 =$$

$$\int\psi_{100}^*(\vec{r})r\psi_{100}(\vec{r})d\vec{r}/2 + \int\psi_{211}^*(\vec{r})r\psi_{211}(\vec{r})d\vec{r}/2$$

ο μηδενισμός των δύο χρονοεξαρτώμενων ολοκληρωμάτων προκύπτει από τις σχέσεις ορθογωνιότητας των σφαιρικών αρμονικών.

$$\int\psi_{100}^*(\vec{r})r\psi_{100}(\vec{r})d\vec{r} = \int\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-r}r\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-r}r^2drd\Omega = \frac{4\pi}{\pi}\int_0^\infty e^{-2r}r^3dr = 4\frac{3!}{2^4} = \frac{3}{2}$$

$$\int\psi_{211}^*(\vec{r})r\psi_{211}(\vec{r})d\vec{r} = \int\frac{1}{8\sqrt{\pi}}re^{-r/2}\sin\theta e^{-i\varphi}r\frac{1}{8\sqrt{\pi}}re^{-r/2}\sin\theta e^{i\varphi}r^2dr\sin\theta d\theta d\varphi = \frac{1}{64\pi}\int_0^\infty r^5e^{-r}dr\int_0^\pi\sin^3\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi = \frac{2\pi}{64\pi}\frac{5!}{1^6}\frac{4}{3} = 5$$

Η χρησιμοποιώντας τις σφαιρικές αρμονικές, δηλαδή γράφωντας την ιδιοσυνάρτηση ως,

$$\psi_{21\pm1} = \frac{1}{8\sqrt{\pi}}re^{-r/2}\sin\theta e^{\pm i\varphi} = \frac{1}{8\sqrt{\pi}}re^{-r/2}\left(\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\right)\left(-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\varphi}\right) = \frac{-1}{\sqrt{24}}re^{-r/2}Y_{11}$$

$$\int\psi_{211}^*(\vec{r})r\psi_{211}(\vec{r})d\vec{r} = \int\frac{-1}{\sqrt{24}}re^{-r/2}Y_{11}^*r\frac{-1}{\sqrt{24}}re^{-r/2}Y_{11}r^2drd\Omega = \frac{1}{24}\int_0^\infty r^5e^{-r}dr\int_0^\pi\int_0^{2\pi}Y_{11}^*Y_{11}d\Omega = \frac{1}{24}\frac{5!}{1^6} = 5$$

Άρα $\langle r\rangle(t) = (1.5+5)/2 = 3.25$.

Πάτρα,3/2/2017