

ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ Ι

Τελική Εξέταση & 3^η Πρόοδος: 26 Γενάρη 2018 (Διδάσκων: Αντρέας Φ. Τερζής)

Όνομα:

Επώνυμο:

A.M.:

| Βαθμός Ενισχυτικού Διαγωνίσματος | Βαθμός Διαγωνίσματος στο σπίτι | Βαθμός 1 ^{ης} Προόδου | Βαθμός 2 ^{ης} Προόδου |
|----------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| | | | |

ΘΕΜΑ 1 [0.5+0.5]

(1α) Να δείξετε ότι ο τελεστής $y p_x + x p_y$ είναι ερμιτιανός τελεστής.

(1β) Να βρεθεί η ελάχιστη δυνατή τιμή του $\Delta x \Delta y$.

ΘΕΜΑ 2 [2=0.25×8]

Σε απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού βρίσκεται ηλεκτρόνιο του οποίου η κατάσταση την χρονική στιγμή $t=0$, περιγράφεται, από την κυματοσυνάρτηση, $\psi(x) = \left(\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + i \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{L}\right) \right) \cdot \Theta\left(\frac{L}{2} - |x|\right) / \sqrt{L}$.

Να βρεθούν (2α) η χρονοεξαρτώμενη κυματοσυνάρτηση $\Psi(x,t)$, (2β) η μέση αρτιότητα για $t=0$, (2γ) η μέση ενέργεια του ηλεκτρονίου, (2δ) η $\langle x \rangle(t=0)$, (2ε) η $\langle p \rangle(t)$, (2στ) η χρονοεξαρτώμενη μέση αρτιότητα, (2ζ) η $\langle p^2 \rangle(t)$ και (2η) η αβεβαιότητα της ενέργειας του ηλεκτρονίου.

ΘΕΜΑ 3 [2=0.5+0.25+0.25+0.5+0.25+0.25]

Θεωρούμε κβαντικό σύστημα που περιγράφεται από Χαμιλτονιανή H , η οποία σε μορφή πίνακα χρησιμοποιώντας τις ιδιοσυναρτήσεις $|1\rangle$ και $|2\rangle$ ενός ερμιτιανού τελεστή W , είναι $H = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(3α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του τελεστή της ενέργειας.

Θεωρούμε φυσικά μεγέθη που περιγράφονται από τους τελεστές W και O , όπου $W = w \cdot (|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2|)$ και $O = i \cdot w \cdot (|1\rangle\langle 2| - |2\rangle\langle 1|)$ με w θετικό πραγματικό.

Την χρονική στιγμή $t=0$, μετράμε το φυσικό μέγεθος που σχετίζονται με τον τελεστή W και βρίσκουμε θετική τιμή.

(3β) Να βρεθεί η κυματοσυνάρτηση του συστήματος την τυχαία χρονική στιγμή $t > 0$.

(3γ) Να υπολογιστεί η χρονοεξαρτώμενη μέση τιμή, $\langle W \rangle(t)$.

(3δ) Αν την χρονική στιγμή t μετρήσω το φυσικό μέγεθος που σχετίζονται με τον τελεστή O , ποιες είναι οι δυνατές μετρούμενες τιμές και με ποιες πιθανότητες;

Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της μέσης τιμής του O χρησιμοποιώντας,

(3ε1) την χρονοεξαρτώμενη κυματοσυνάρτηση

(3ε2) την μέση τιμή του μεταθέτη των O και H .

ΘΕΜΑ 4 [0.5]

Θεωρούμε ποζιτρόνιο περιορισμένου σε τετραγωνικό πηγάδι δυναμικού βάθους $1eV$. Να εκτιμήσετε την μικρότερη και την μεγαλύτερη τιμή του εύρους (σε nm) του πηγαδιού έτσι ώστε να υπάρχουν δύο δέσμιες καταστάσεις.

ΘΕΜΑ 5 [0.5]

Ηλεκτρόνιο μάζας m είναι περιορισμένο σε δυναμικό $V(x) = -c\delta(x)$ όπου $c = 0.3nm \cdot eV$. Να υπολογιστεί η μέση ενέργεια του ηλεκτρονίου.

ΘΕΜΑ 6 [0.5+0.5]

Ηλεκτρόνιο μάζας m βρίσκεται σε δυναμικό $V(x) = \begin{cases} 0, & x < -L, x > 0 \\ +V_0, & -L \leq x \leq 0 \end{cases}$ με V_0 θετικό.

Για σκέδαση από το $+\infty$ στο $-\infty$ ηλεκτρονίου ενέργειας $E = V_0$. **(6α)** Να γράψετε τις συνοριακές συνθήκες από τις οποίες μπορούν να εκτιμηθούν τα ρεύματα πυκνότητας πιθανότητας. **(6β)** Να υπολογίσετε τον συντελεστή διέλευσης ή τον συντελεστή ανάκλασης.

ΘΕΜΑ 7 [0.75+0.75]

Αρμονικός ταλαντωτής περιγράφεται, την χρονική στιγμή $t = 0$ από την κυματοσυνάρτηση, $\psi(x, t = 0) = (\psi_0(x) + \psi_1(x)) / \sqrt{2}$, όπου $\psi_n(x)$ οι ιδιοσυναρτήσεις της ενέργειας του.

Υπολογίστε την χρονοεξαρτώμενη μέση τιμή της ορμής από **(7α)** την σχέση $\int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x, t) \hat{p} \Psi(x, t) dx$ **(7β)**

χρησιμοποιώντας τους τελεστές \hat{a} , \hat{a}^+ .

Υπόδειξη:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{(2\alpha)^n} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad \psi_0 = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} e^{-x^2/2}, \quad \psi_1 = \sqrt{\frac{4}{\pi}} x e^{-x^2/2}, \quad \psi_2 = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} (2x^2 - 1) e^{-x^2/2}$$

ΘΕΜΑ 8 [0.75+0.75]

Αρμονικός ταλαντωτής βρίσκεται στις δύο πρώτες ενεργειακές καταστάσεις του με $\langle E \rangle = 1$, $\langle x \rangle = 0$ για $t=0$.

(8α) Εκτιμήστε την χρονοεξαρτώμενη κυματοσυνάρτηση, στην μορφή $\psi(x, t) = |c_a| e^{i\phi_a} \psi_a e^{-iE_a t} + |c_b| \psi_b e^{-iE_b t}$

(8β) Εκτιμήστε την χρονοεξαρτώμενη μέση θέση.

ΘΕΜΑ 9 [0.5]

Σωματίο μάζας m βρίσκεται σε δυναμικό $V(x, y) = \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + 4y^2)$. Να βρείτε την εκφυλισμένη ενεργειακή κατάσταση με την μικρότερη τιμή της ενέργειας.

ΘΕΜΑ 10 [2=0.25+0.25+0.25+0.5+0.75]

Η κατάσταση του ηλεκτρονίου σε ένα άτομο υδρογόνου περιγράφεται, την χρονική στιγμή $t=0$, από την κυματοσυνάρτηση, $\Psi(\vec{r}) = N (i \cdot \psi_{200}(\vec{r}) - \psi_{211}(\vec{r}))$.

(10α) Να υπολογίσετε τον συντελεστή κανονικοποίησης.

(10β) Να υπολογίσετε την μέση ενέργεια $\langle E \rangle$.

(10γ) Την τυχαία χρονική στιγμή t , να υπολογίσετε την $\langle l^2 \rangle(t)$.

(10δ) Να υπολογιστεί η $\langle l_x \rangle(t)$, την χρονική στιγμή $t=0$.

(10ε) Την τυχαία χρονική στιγμή t , να υπολογιστεί το $\langle r \rangle(t)$.

Υπόδειξη: $\int_0^{\infty} r^n e^{-ar} dr = \frac{n!}{a^{n+1}}, \quad \psi_{200} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left(1 - \frac{r}{2}\right) e^{-r/2}, \quad \psi_{211} = \frac{1}{8\sqrt{\pi}} r e^{-r/2} \sin \theta e^{i\phi}$

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi}$$

Χρήσιμες Φυσικές σταθερές, $h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$, $m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$, $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$