ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ Ι, Τελική Εξέταση Σεπτέμβρη: 28 Αυγούστου 2018 (Διδάσκων: Α.Φ. Τερζής)

ΘΕΜΑ 1

(α) Αποδείξτε ότι ο μεταθέτης δύο ερμιτιανών τελεστών δεν είναι ερμιτιανός τελεστής. $[A,B]^{+} = (AB-BA)^{+} = (AB)^{+} - (BA)^{+} = B^{+}A^{+} - A^{+}B^{+} = -[A,B] \neq [A,B]$

(β) Να ελέγξετε αν ο τελεστής xp_xy είναι ερμιτιανός τελεστής. $(xp_xy)^{+} = ((xp_x)y)^{+} = y^{+}(xp_x)^{+} = y(p_x^{+}x^{+}) = yp_xx = p_xxy \neq xp_xy \; \{[x,p_x]=i\hbar\}$

(γ) Να βρεθεί η ελάχιστη δυνατή τιμή του $\Delta z \Delta l_z \geq \frac{1}{2}|\langle[z,l_z]\rangle| = 0$, καθώς $[z,l_z] = [z,(xp_y - yp_x)] = [z,xp_y] - [z,yp_x] = 0$

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε κβαντικό σύστημα που περιγράφεται από την Χαμιλτονιανή,

$H = 4\varepsilon|1\rangle\langle 1| - 4\varepsilon|2\rangle\langle 2| + 3\varepsilon|1\rangle\langle 2| + 3\varepsilon|2\rangle\langle 1|$, με $|1\rangle$, $|2\rangle$ ιδιοσυναρτήσεις του ερμιτιανού τελεστή C, δηλαδή $C|1\rangle = \varepsilon|1\rangle$ και $C|2\rangle = -2\varepsilon|2\rangle$, όπου ε πραγματικός. **(α)** Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του τελεστή της ενέργειας.

$\det\begin{bmatrix} 4\varepsilon-\lambda & 3\varepsilon \\ 3\varepsilon & -4\varepsilon-\lambda \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \lambda_\pm = \pm 5\varepsilon$ & $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{3|1\rangle + |2\rangle}{\sqrt{10}}$ & $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{|1\rangle - 3|2\rangle}{\sqrt{10}}$

Κοινές ιδιοσυναρτήσεις: $A|\pm\rangle = \frac{\alpha}{3\varepsilon}H|\pm\rangle = \frac{\alpha}{3\varepsilon}\lambda_\pm|\pm\rangle = \pm\frac{5\alpha}{3}|\pm\rangle$

Θεωρούμε ένα φυσικό μέγεθος που περιγράφονται από τελεστή *A* του οποίου η μορφή σε πίνακα χρησιμοποιώντας τις ιδιοσυναρτήσεις $|1\rangle$, $|2\rangle$ είναι $A = \begin{bmatrix} 4/3 & 1 \\ 1 & -4/3 \end{bmatrix} a$, όπου α πραγματικός. Μετράμε το φυσικό μέγεθος που σχετίζονται με τον τελεστή *A* (*t*=0) και βρίσκουμε *θετική τιμή*.

$\rightarrow A = \frac{3\alpha}{\varepsilon}\begin{bmatrix} 4\varepsilon & 3\varepsilon \\ 3\varepsilon & -4\varepsilon \end{bmatrix} = \frac{3\alpha}{\varepsilon}H$ άρα έχει ίδιες ~~...~~ ιδιοσυναρτήσεις.

(β) Να βρεθεί η κυματοσυνάρτηση του συστήματος την τυχαία χρονική στιγμή $t > 0$. Θετική ιδιοτιμή $\rightarrow \lambda_+$ & $\psi(x,0) = |+\rangle$ που είναι ιδιοσυνάρτηση της H άρα $\psi(x,t) = |+\rangle e^{-i5\varepsilon t/\hbar} \sim |+\rangle$ (στάσιμη κατάσταση)

(γ) Αν την χρονική στιγμή t μετρήσω το φυσικό μέγεθος C ποιες είναι οι δυνατές μετρούμενες τιμές και με ποιες πιθανότητες;

$P_{|1\rangle} = |\langle 1|\psi(x,t)\rangle|^2 = |\langle 1|+\rangle|^2 = \left|\frac{3\langle 1|1\rangle + 1\langle 1|2\rangle}{\sqrt{10}}\right|^2 = \frac{9}{10}$ & $P_{|2\rangle} = |\langle 2|\psi\rangle|^2 = \left|\frac{3\langle 2|1\rangle + 1\langle 2|2\rangle}{\sqrt{10}}\right|^2 = \frac{1}{10}$.

ΘΕΜΑ 3

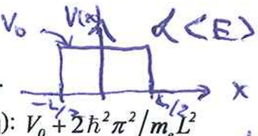
Ηλεκτρόνιο βρίσκεται σε δυναμικό απειρόβαθου πηγαδιού και περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση $\psi(x,t=0) = \sin(\pi x/a)\left[1+2\cos(\pi x/a)\right]/\sqrt{a}$, όπου $a = 10$ Å. Να υπολογιστεί η μέση ενέργεια του συστήματος σε *meV*.

$\psi(x,t=0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) = \frac{\psi_1 + \psi_2}{\sqrt{2}} \rightarrow \langle E\rangle = \frac{1}{2}E_1 + \frac{1}{2}E_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}1^2 + \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}2^2\right) = \frac{5\hbar^2\pi^2}{4mL^2} = \frac{5}{16}\frac{h^2}{mL^2}$

& $\langle E\rangle = \dots = 942\,meV$

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε σκέδαση ηλεκτρονίου σε δυναμικό $V_0 \cdot \Theta(x+L/2)\cdot\Theta(L/2-x)$.



(α) Συντονισμός παρατηρείται για ενέργεια (κυκλώστε την σωστή απάντηση): $V_0 + 2\hbar^2\pi^2/m_eL^2$

(β) Εξηγείστε την απάντησή σας. $E = V_0 + \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}n^2$ για $n=2 \rightarrow E = V_0 + \frac{2\hbar^2\pi^2}{mL^2}$

ΘΕΜΑ 5

Ηλεκτρόνιο βρίσκεται σε δυναμικό $-c\cdot\delta(x)$, όπου $c > 0$. Αν η κυματοσυνάρτηση του κβαντικού συστήματος, είναι της μορφής $\psi(x,t) = N(\gamma)\cdot e^{-\gamma|x|}\cdot e^{-iEt/\hbar}$, όπου $\gamma = m_e \cdot c/\hbar^2$ και $E = -0{,}5\hbar^2\cdot\gamma^2/m_e$, να βρεθεί το $N(\gamma)$.

$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(x,t)\psi(x,t)dx = 1 \rightarrow N^2\int_{-\infty}^{0}e^{2\gamma x}dx + N^2\int_{0}^{\infty}e^{-2\gamma x}dx = 2N^2\int_{0}^{\infty}e^{-2\gamma x}dx = -\frac{1}{\gamma}N^2e^{-2\gamma x}\Big|_0^\infty = \frac{N^2}{\gamma} = 1 \rightarrow N = \sqrt{\gamma}$

ΘΕΜΑ 6

$\langle E\rangle = |c_0|^2\frac{1}{2} + |c_1|^2\frac{3}{2} \xrightarrow{|c_0|^2+|c_1|^2=1} 1 \rightarrow |c_0| = |c_1| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ & $\langle p\rangle(t=0) = 2|c_0||c_1||P_{10}|\cos(\omega\cdot 0 + \varphi_{01} + \varphi_{P_{10}})$

Αρμονικός ταλαντωτής βρίσκεται στις δύο πρώτες ενεργειακές καταστάσεις του ($\psi_0 = e^{-x^2/2}/\sqrt[4]{\pi}$, $\psi_1 = \sqrt{2}xe^{-x^2/2}/\sqrt[4]{\pi}$) με $\langle E\rangle = 1$, $\langle p\rangle = 0$ για *t*=0. **(α)** Να αποδείξετε ότι η κυματοσυνάρτηση για *t*=0, μπορεί να είναι η $\Psi(x,0) = (\psi_0 + \psi_1)/\sqrt{2}$.

$P_{10} = (\psi_1, \hat{p}\psi_0) = \int\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{\pi}}xe^{-x^2/2}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}e^{-x^2/2}\right) = \frac{i\hbar}{\sqrt{\pi}}\sqrt{2}\int x^2e^{-x^2}dx = \frac{i\hbar\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{i\hbar}{\sqrt{2}} \rightarrow |P_{10}| = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}$ $\varphi_{P_{10}} = \frac{\pi}{2}$ $\{P_{10} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{2}}\}$

Άρα $\langle p\rangle(t=0) = 2\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\varphi_{01} + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\varphi_{01}) = 0 \rightarrow \varphi_{01} = 0$ (μία επιλογή) που δίνει

$\psi(x,t=0) = |c_0|e^{i\varphi_{01}}\psi_0 + |c_1|\psi_1 = |c_0|\psi_0 + |c_1|\psi_1 = (\psi_0+\psi_1)/\sqrt{2}$. Θα μπορούσατε να δείξετε ότι για την δοθείσα $\psi(x,t=0)$ έχουμε $\langle E\rangle = 1$ & $\langle p\rangle(t=0) = 0$

(β) Χρησιμοποιώντας τους τελεστές a, a^{+} να υπολογίσετε την χρονοεξαρτώμενη μέση θέση $\langle x\rangle(t)$.

$\langle x\rangle(t) = \langle\psi(x,t)|x|\psi(x,t)\rangle = \frac{(\langle\psi_0|e^{i\varepsilon_0 t} + \langle\psi_1|e^{i\varepsilon_1 t})}{\sqrt{2}}\left(\frac{a + a^{+}}{\sqrt{2}}\right)\frac{(e^{-i\varepsilon_0 t}|\psi_0\rangle + e^{-i\varepsilon_1 t}|\psi_1\rangle)}{\sqrt{2}} =$ $\begin{Bmatrix} |\psi_0\rangle = |0\rangle, |\psi_1\rangle = |1\rangle \\ \varepsilon_0 = 1/2 \quad \varepsilon_1 = 3/2 \end{Bmatrix}$

$= \frac{e^{it/2}e^{-3it/2}\langle 0|a|1\rangle + e^{3it/2}e^{-it/2}\langle 1|a^{+}|0\rangle}{2\sqrt{2}} = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2\sqrt{2}} = \frac{\cos t}{\sqrt{2}}$.

ΘΕΜΑ 7

Η κατάσταση του ηλεκτρονίου σε ένα άτομο υδρογόνου περιγράφεται, από την κυματοσυνάρτηση $\Psi(\vec{r},t) = \left((1+i)\psi_{200}(\vec{r})\,e^{-i\varepsilon t/4\hbar} + c\cdot\psi_{321}(\vec{r})\,e^{-i\varepsilon t/9\hbar}\right)/\sqrt{3}$, όπου $c = |c|$. Την τυχαία χρονική στιγμή t, να υπολογιστούν **(α)** η μέση ενέργεια $\langle E\rangle(t)$, και **(β)** η μέση συνιστώσα της στροφορμής στον y- άξονα, $\langle l_y\rangle(t=0)$.

$P_{200} + P_{321} = 1 \rightarrow \left|\frac{1+i}{\sqrt{3}}\right|^2 + \frac{c^2}{\sqrt{3}^2} = 1 \rightarrow \frac{2+c^2}{3} = 1 \rightarrow c^2 = |c|^2 = 1 \rightarrow c = |c| = 1$

(α) Άρα $\langle E\rangle(t) = P_{200}\varepsilon_2 + P_{321}\varepsilon_3 = \frac{2}{3}\frac{\varepsilon}{4} + \frac{1}{3}\frac{\varepsilon}{9} = \varepsilon\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{27}\right) = \varepsilon\frac{27+6}{27\cdot 6} = \varepsilon\frac{33}{27\cdot 6} = \frac{11}{54}\varepsilon$ $\{\varepsilon = -13{,}6\,eV\}$

(β) $l_y = \frac{l_+ - l_-}{2i}$ $\quad\langle l_y\rangle(t=0) = \left(\frac{1-i}{\sqrt{3}}\langle 200| + \frac{1}{\sqrt{3}}\langle 321|\right)\left(\frac{l_+ - l_-}{2i}\right)\left(|200\rangle\frac{1+i}{\sqrt{3}} + |321\rangle\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

το l_+ & l_- επιδράγουν μόνο των $|321\rangle$ δημιουργώντας τις $|322\rangle$ & $|320\rangle$ που είναι ορθογώνιες με τις $\langle 200|$, $\langle 321|$, $\langle 320|$ & $\langle 322|$. Ενώ ασκούμενοι στο $|200\rangle$ δίνουν 0.