**ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ Ι (ΤΕΛΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ)** 24 Σεπτέμβρη 2020 (Διδάσκων: Αντρέας Φ. Τερζής)

**ΘΕΜΑ 1**[0.75=0.25+0.5] Τελεστής ορίζεται από την σχέση $W\psi = \psi^*$. **(1α)** Να αποδείξετε ότι δεν είναι ερμιτιανός. **(1β)** Να βρεθούν οι ιδιοσυναρτήσεις του. (1α) είναι το (1α) της εξέτασης 12 Φλεβάρη 2020.
Στο ίδιο διαγώνισμα βρήκαμε ιδιοτιμές $\omega$ με την ιδιότητα $\omega^2=1$. Δηλαδή $\hat{W}\Psi=\omega\Psi$, $\omega^2=\pm1$
Αφού ο $\hat{W}$ δεν είναι ερμιτιανός $\omega=e^{i\phi}$ (μιγαδικός) με ιδιότητα $\omega^2=e^{2i\phi}=1 \to \phi=0$ ή $\phi=\pi$ $\longrightarrow \underline{\omega=\pm1}$
Οι ιδιοσυναρτήσεις είναι οι $W\Psi=\Psi^*=\omega\Psi=\pm\Psi$.
Δηλαδή $\Psi^*=+\Psi$ $(\omega=1)$ και $\Psi=R+iI \to \Psi=\Psi^* \to \Psi=R$ (πραγματική συνάρτηση)
Ανάλογα βρίσκουμε για $\omega=-1$, $\Psi^*=-\Psi \to \Psi$ φανταστική συνάρτηση.

**ΘΕΜΑ 2**[0.5] Να υπολογίσετε τον μεταθέτη $[yp_x, l_z]$.

$[yp_x, xp_y-yp_x]=[yp_x,xp_y]-[yp_x,yp_x]=y[p_x,xp_y]+[y,xp_y]p_x=xy\underbrace{[p_x,p_y]}_{0}+y[p_x,x]p_y+$
$+x[y,p_y]p_x+\underbrace{[y,x]}_{0}p_yp_x=-i\hbar yp_y+i\hbar xp_x=i\hbar(xp_x-yp_y).$

**ΘΕΜΑ 3**[2.75=1+0.5x3+0.25] Θεωρούμε ένα κβαντικό σύστημα που περιγράφεται από την Χαμιλτονιανή $H=\varepsilon\cdot(B+1)(|1><1|+|2><2|)+i\cdot\varepsilon\cdot(B+1)(|2><1|-|1><2|)$, όπου $|1>$ και $|2>$ είναι ιδιοσυναρτήσεις ενός ερμιτιανού τελεστή $W$, ο οποίος σε μορφή πίνακα είναι $|w|\begin{bmatrix}(\Gamma+1) & 0\\ 0 & -(\Gamma+1)\end{bmatrix}$.
**(3α)** Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του τελεστή της ενέργειας. Την χρονική στιγμή $t$=0, μετράμε το φυσικό μέγεθος που σχετίζονται με τον τελεστή $W$ και βρίσκουμε θετική τιμή. Να βρεθούν **(3β)** η $\psi(x,t)$ και **(3γ)** η $<W>(t)$. Για τον τελεστή $K=k\begin{bmatrix}1 & -i\\ i & 1\end{bmatrix}$, να βρεθούν **(3δ)** οι πιθανότητες να μετρήσω κάθε μία από τις ιδιοτιμές του και να υπολογίσετε **(3ε)** το $d<K>(t)/dt$. Θέμα 3, εξέτασης 12 Φλεβάρη 2020.
(α) Με μοναδικές διαφορές στις ιδιοτιμές ενέργειας, τώρα $\lambda=0$ & $2(B+1)\varepsilon$. Οι ιδιοσυναρτήσεις ίδιες $|0\rangle=(|1\rangle-i|2\rangle)/\sqrt{2}$ & $|2(B+1)\varepsilon\rangle=(|1\rangle+i|2\rangle)/\sqrt{2}$.
(β) $|\psi\rangle=\left(|2(B+1)\varepsilon\rangle e^{-i\varepsilon(B+1)t/\hbar}+|0\rangle e^{i\varepsilon(B+1)t/\hbar}\right)/\sqrt{2}$.
Ανάλογα (γ) $\langle W\rangle(t)=|w|(\Gamma+1)\cos(2\varepsilon(B+1)t/\hbar)$ (μοναδική επιπλέον διαφορά το $(\Gamma+1)$)
ενώ τα (δ) και (ε) μένουν ίδια. Δηλαδή (δ) $P_0=P_{2\varepsilon(B+1)}=1/2$ & (ε) $d\langle K\rangle(t)/dt=0$.

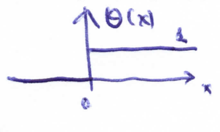
**ΘΕΜΑ 4**[1=0.5+0.5] Ηλεκτρόνιο μάζας *m* βρίσκεται περιορισμένο σε απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού μήκους $L$.

Αν η κυματοσυνάρτηση του ηλεκτρονίου έχει μη μηδενική τιμή στην περιοχή [0,L] και είναι

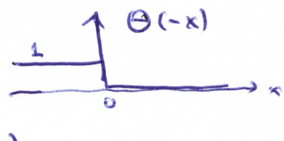
$\psi(x,t=0)=\sqrt{2}|c|sin(\pi x/L)\left(\sqrt{B+2}+2\sqrt{\Gamma+1}\cos(\pi x/L)\right)/\sqrt{L}$. Να βρεθούν **(4α)** η μέση ενέργεια και η **(4β)** μέση θέση. <u>Δίνεται</u> $x_{21}=-16L/9\pi^2$, $p_{21}=-8i\hbar/3L$. $\Psi(x)=\underbrace{|c|\sqrt{B+2}}_{c_1}\psi_1+\underbrace{|c|\sqrt{\Gamma+1}}_{c_2}\psi_2$ $\rightarrow c_1=\sqrt{(B+2)/(B+\Gamma+3)}$ & $c_2=\sqrt{(\Gamma+1)/(B+\Gamma+3)}$
Από νορμαλισμό $|c|^2(B+2+\Gamma+1)=(B+\Gamma+3)|c|^2=1$.
(α) $\langle E\rangle=P_1E_1+P_2E_2=P_1\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}1^2+P_2\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}2^2=\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\left(\frac{B+2}{B+\Gamma+3}+\frac{(\Gamma+1)4}{B+\Gamma+3}\right)=\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\left(\frac{B+4\Gamma+6}{B+\Gamma+3}\right)$.
(β) $\langle x\rangle(t=0)=|c_1|^2x_{11}+|c_2|^2x_{22}+2|c_1||c_2||x_{21}|\cos(\omega\cdot 0+\phi_{12}+\delta_{21})$. Εδώ έχουμε $x_{11}=x_{22}=L/2$
$\phi_{12}=0$ και αφού δίνεται $x_{21}=-16L/9\pi^2$, $|x_{21}|=16L/9\pi^2$ & $\delta_{21}=\pi$.
Άρα $\langle x\rangle(0)=\frac{L}{2}+2\frac{\sqrt{(B+2)(\Gamma+1)}}{B+\Gamma+3}\cdot\frac{16L}{9\pi^2}\cos(\pi)=\frac{L}{2}-\frac{\sqrt{(B+2)(\Gamma+1)}}{(B+\Gamma+3)}\frac{32L}{9\pi^2}$

**ΘΕΜΑ 5**[0.5=0.25+0.25] **(5α)** Να σχεδιάσετε το δυναμικό $V(x)=|V_0|\left((A+\Gamma)\cdot\Theta(-x)+(2B+1)\cdot\Theta(x-L)\right)$ και να εξηγήσετε **(5β)** για ποιες τιμές της ενέργειας έχουμε δέσμιες καταστάσεις.

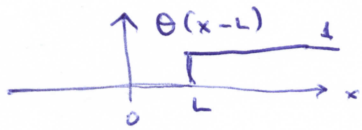
$\Theta(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$



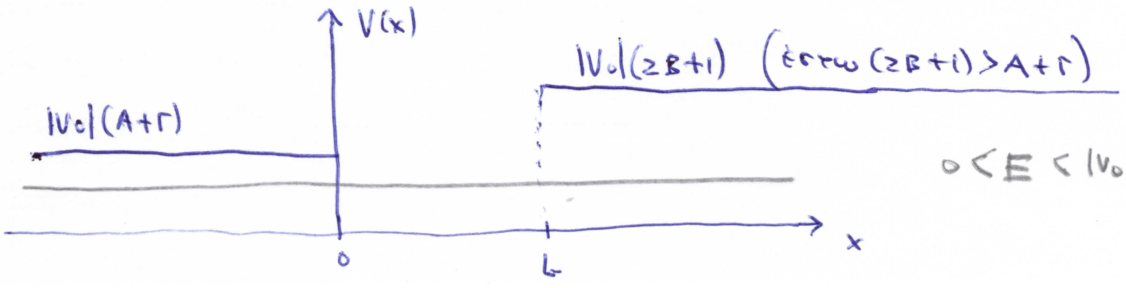
άρα $\Theta(-x)=\begin{cases}1 & -x>0 \to x<0\\ 0 & -x<0 \to x>0\end{cases}$



ανάλογα $\Theta(x-L)=\begin{cases}1 & x-L>0 \to x>L\\ 0 & x-L<0 \to x<L\end{cases}$ άρα

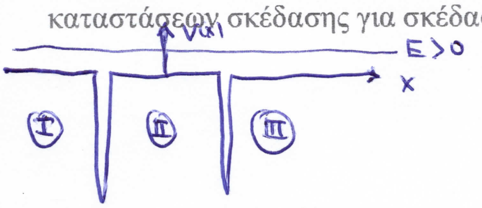


Οπότε $V(x)=|V_0|(A+\Gamma)\Theta(-x)+|V_0|(2B+1)\Theta(x-L)$




$0<E<|V_0|(A+\Gamma)$, Δέσμιες

**ΘΕΜΑ 6**[1.5=0.5+1] Ηλεκτρόνιο μάζας $m$ βρίσκεται περιορισμένο σε δυναμικό $V(x) = -|g|\big(\delta(x+L)+\delta(x-L)\big)$.
**(6α)** Να δείξετε ότι πάντα υπάρχει η θεμελιώδη κατάσταση. Θέμα (3β), 2η πρόοδος, ακ. έτους 2019-2020.
**(6β)** Να γράψετε τις εξισώσεις που χρειάζεστε για την εύρεση των συντελεστών ανάκλασης και διέλευσης των καταστάσεων σκέδασης για σκέδαση ηλεκτρονίου θετικής ορμής. Σ.Σ. συνεχής συνάρτησης, ασυνεχής 1η παραγώγου




$\psi_{I} = e^{ikx} + Ae^{-ikx}$

$\psi_{II} = B_+e^{ikx} + B_-e^{-ikx}$

$\psi_{III} = Ce^{ikx}$

$x=-L$: $e^{-ikL} + Ae^{ikL} = B_+e^{-ikL} + B_-e^{ikL}$

$ik(B_+e^{-ikL} - B_-e^{ikL}) - ik(e^{-ikL} - Ae^{ikL}) = \frac{-2mg}{\hbar^2}(e^{-ikL} + Ae^{ikL})$

$x=+L$: $B_+e^{ikL} + B_-e^{-ikL} = Ce^{ikL}$

$ikCe^{ikL} - ik(B_+e^{ikL} - B_-e^{-ikL}) = \frac{-2mg}{\hbar^2}Ce^{ikL}$

προσπίπτων από $-\infty \to +\infty$ αφού έχει θετική ορμή $p=\hbar k$

**ΘΕΜΑ 7**[1] Κβαντικός αρμονικός ταλαντωτής περιγράφεται, την χρονική στιγμή $t=0$ από την κυματοσυνάρτηση, $\psi(x,t=0) = |c_0|(A+B)e^{-i\varphi_{01}}\psi_0 + |c_1|(\Gamma+4)\psi_1$. Αν την χρονική στιγμή $t=0$ η μέση ενέργεια και η μέση τιμή της θέσης είναι 1 και $1/\sqrt{2}$, αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας την έκφραση $\langle p\rangle(t) = |c_0|^2p_{00} + |c_1|^2p_{11} + 2|c_0||c_1||p_{10}|\cos(\omega t + \varphi_{01} + \delta_{10})$, να βρεθεί η μέση ορμή υπολογίζοντας _όλα_ τα $p_{ij} = (\psi_i, \hat{p}\psi_j)$ χρησιμοποιώντας την _αλγεβρική μέθοδο_. Η παρουσία των συντελεστών $(A+B)$ & $(\Gamma+4)$ ΔΕΝ ΕΠΗΡΕΑΖΕΙ, έχουμε $|c_0|'$ & $|c_1|'$ ανωλικά.
Με αυτή την παρατήρηση γίνεται κατανοητό ότι είναι ακριβώς ίδια με την άσκηση 8 (Θέμα 8) της Ε7, 12 Φλεβάρη 2020.
Οπότε αφού με την αλγεβρική μέθοδο βρίσκουμε $P_{00} = P_{11} = 0$ & $P_{10} = \frac{i}{\sqrt{2}} \to \langle p\rangle(t) = -\sin(t)/\sqrt{2}$.

**ΘΕΜΑ 8**[0.5] Για ηλεκτρόνιο περιορισμένο σε ορθογωνία κβαντική τελεία πλευρών μήκους $L$ και $2L$, να βρεθεί η ενέργεια της πρώτης εκφυλισμένης ενεργειακής κατάστασης. $\boxed{L_x}\,L_y$ $L_y = L$ $L_x = 2L$ } πίνακας E

$E = E_x + E_y = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL_x^2}n_x^2 + \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL_y^2}n_y^2 = \frac{\hbar^2\pi^2 n_x^2}{2m(2L)^2} + \frac{\hbar^2\pi^2 n_y^2}{2mL^2} = \frac{\hbar^2\pi^2}{8mL^2}(n_x^2 + 4n_y^2)$

$\to E = E_0(n_x^2 + 4n_y^2)$ με $E_0 = \hbar^2\pi^2/8mL^2$

Από τον διπλανό πίνακα βλέπουμε ότι η πρώτη εκφυλισμένη κατάσταση είναι η 4η διεγερμένη με $E = 20E_0$, με εκφυλισμό 2 $(n_x,n_y) = (4,1)$ & $(2,2)$

| $n_x$ | $n_y$ | $E/E_0$ | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 5 | Θ |
| 2 | 1 | 8 | 1η |
| 3 | 1 | 13 | 2η |
| 4 | 1 | 20 | 4η |
| 1 | 2 | 17 | 3η |
| 2 | 2 | 20 | 4η |

**ΘΕΜΑ 9**[0.75] Ηλεκτρόνιο που κινείται πάνω στην επιφάνεια σφαίρας, βρίσκεται στην κατάσταση $|N|\big[\sqrt{(A+1)}|10> + \sqrt{(B+1)}|11>\big]$. Να υπολογιστεί η $x$- συνιστώσα της στροφορμής. $l_x = (l_+ + l_-)/2$

Ισχύουν $l_+|10\rangle = \sqrt{1(1+1) - 0(0+1)}\,|11\rangle = \sqrt{2}|11\rangle$, $l_+|11\rangle = 0$, $l_-|10\rangle = \sqrt{1(1+1) - 1(1-1)}\,|1-1\rangle = \sqrt{2}|1-1\rangle$ & $l_-|11\rangle = \sqrt{2}|10\rangle$. Οπότε $\langle l_x\rangle = \frac{|N|^2\sqrt{2}}{2}\big(\sqrt{A+1}\langle 10| + \sqrt{B+1}\langle 11|\big)\big(\sqrt{A+1}|11\rangle + \sqrt{A+1}|1-1\rangle + \sqrt{B+1}|10\rangle\big) =$
$= \frac{|N|^2}{\sqrt{2}}\big(\sqrt{(A+1)(B+1)} + \sqrt{(A+1)(B+1)}\big) = \frac{\sqrt{2(A+1)(B+1)}}{A+B+2}$, καθώς $|N|^2(\sqrt{A+1}^2 + \sqrt{B+1}^2) = |N|^2(A+B+2) = 1$.
από κανονικοποίηση

**ΘΕΜΑ 10**[0.75] Να υπολογιστεί το $\langle r\rangle(t)$ ηλεκτρόνιου σε ένα άτομο υδρογόνου ενέργειας -3.4eV και μηδενικού $\langle l^2\rangle(t)$.

Με ενέργεια −3,4eV είναι η 1η διεγερμένη κατάσταση. Επίσης αφού $\langle l^2\rangle = 0$
$l=0$, οπότε η κατάσταση περιγράφεται από την $\psi_{200}$
Αυτή είναι η άσκηση 11, στο διαγώνισμα 12 Φλεβάρη 2020. $\langle r\rangle = 6$.

**ΘΕΜΑ 11**[1=0.25+0.75] Θεωρούμε ότι η κυματοσυνάρτηση ατόμου υδρογόνου, είναι
$\Psi(\vec{r}, t=0) = |N|\big[\sqrt{(A+1)}\psi_{210}(\vec{r}) + \sqrt{(B+1)}\psi_{211}(\vec{r})\big]$.
**(11α)** Να υπολογίστε την μέση ενέργεια.
**(11β)** Να υπολογίστε την $\langle l_x^2 + l_y^2\rangle(t)$ την τυχαία χρονική στιγμή $t$.

(11α) και οι δύο κυματοσυναρτήσεις (ιδιοσυναρτήσεις ατόμου H), έχουμε $n=2$
Άρα έχουμε στάσιμη κατάσταση με $n=2$ (1η διεγερμένη) & $\langle E\rangle = E_2 = -\frac{1}{2\cdot 2^2} = -\frac{1}{8}$

(11β) $\langle l_x^2 + l_y^2\rangle = \langle l^2 - l_z^2\rangle = \langle l^2\rangle - \langle l_z^2\rangle$

Έχουμε και οι δύο ιδιοσυναρτήσεις $l=1 \to \langle l^2\rangle = l(l+1) = 1(1+1) = 2$

ενώ $\langle l_z^2\rangle = P_{210}\cdot 0^2 + P_{211}\cdot 1^2 = P_{211}$

$P_{211} = |N|^2(B+1) = \frac{B+1}{(A+1)+(B+1)} = \frac{B+1}{A+B+2}$, οπότε $\langle l_x^2 + l_y^2\rangle = 1 - \frac{B+1}{A+B+2} = \frac{A+1}{A+B+2}$.