ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ Ι (ΤΕΛΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ) 12 Φλεβάρη **2020** (Διδάσκων: Αντρέας Φ. Τερζής)

Θ. 1 Τελεστής ορίζεται από την σχέση $W\psi = \psi^*$. **(1α)** Να ελέγξετε αν είναι ερμιτιανός. **(1β)** Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του.

(1α) $(\varphi, W\psi) = \int \varphi^* W\psi dx = \int \varphi^* \psi^* dx$, $(W\varphi, \psi) = \int (W\varphi)^* \psi dx = \int (\varphi^*)^* \psi dx = \int \varphi \psi dx$, οπότε έχουμε $(\varphi, W\psi) \neq (W\varphi, \psi)$, δεν είναι ερμιτιανός.

(1β) $W\psi = w\psi \rightarrow \psi^* = w\psi$. Επίσης $W^2\psi = W(W\psi) = Ww\psi = wW\psi = w^2\psi$, ενώ $W^2\psi = W(W\psi) = W\psi^* = (\psi^*)^* = \psi \rightarrow$
$\rightarrow w^2 = 1 \rightarrow \underline{w = e^{i\varphi}}$ (w δεν είναι υποχρεωτικά πραγματικοί, καθώς ο W δεν είναι ερμιτιανός)

Θ. 2 Να βρεθεί η μικρότερη δυνατή τιμή του γινομένου των αβεβαιοτήτων $(\Delta x)(\Delta l_y)$.

$(\Delta x)(\Delta l_y) = \frac{1}{2}|\langle [x, l_y] \rangle| = \frac{1}{2}|\langle [x, zp_x - xp_z] \rangle| = \frac{1}{2}|\langle [x, p_x] z \rangle| = \frac{1}{2}|i\hbar \langle z \rangle| = \frac{\hbar}{2}|\langle z \rangle|$

Θ. 3 Θεωρούμε ένα κβαντικό σύστημα που περιγράφεται από την Χαμιλτονιανή $H = \varepsilon \cdot \left(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|\right) + i \cdot \varepsilon \cdot \left(|2\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 2|\right)$, όπου $|1\rangle$ και $|2\rangle$ είναι ιδιοσυναρτήσεις ενός ερμιτιανού τελεστή W, ο οποίος σε μορφή πίνακα είναι $|w|\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. **(3α)** Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του τελεστή της ενέργειας. Την χρονική στιγμή t=0, μετράμε το φυσικό μέγεθος που σχετίζονται με τον τελεστή W και βρίσκουμε θετική τιμή. Να βρεθούν **(3β)** η $\psi(x,t)$ και **(3γ)** η $\langle W \rangle (t)$. Για τον τελεστή $K = k \cdot \left(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| - i|1\rangle\langle 2| + i|2\rangle\langle 1|\right)$, να βρεθούν **(3δ)** οι πιθανότητες να μετρήσω κάθε μία από τις ιδιοτιμές του και να υπολογίσετε **(3ε)** το $d\langle K \rangle (t)/dt$.

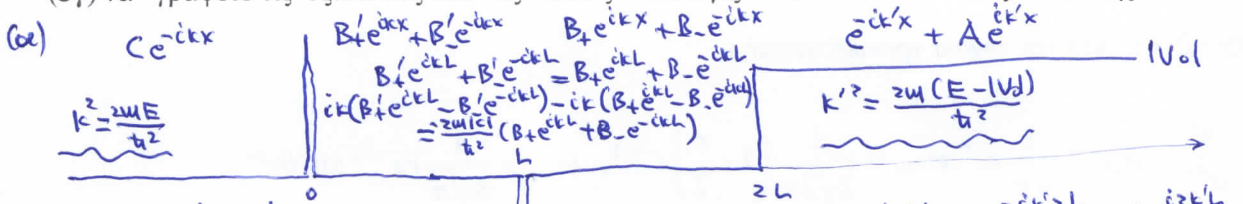
Θέμα 3, 1ης προόδου ακ. έτους 19–20 (22/11/19). (α) $\lambda = 0, 2\varepsilon$, $|0\rangle = (|1\rangle - i|2\rangle)/\sqrt{2}$, $|2\varepsilon\rangle = (|1\rangle + i|2\rangle)/\sqrt{2}$
(β) $|\psi\rangle = (|2\varepsilon\rangle e^{-i2\varepsilon t/\hbar} + |0\rangle e^{i\varepsilon t/\hbar})/\sqrt{2}$. (γ) $\langle W \rangle (t) = |w| \cos(2\varepsilon t/\hbar)$. (δ) $P_0 = P_{2\varepsilon} = 1/2$ & (ε) $d\langle K \rangle (t)/dt = 0$.

Θ. 4 Ηλεκτρόνιο μάζας m βρίσκεται περιορισμένο σε απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού μήκους L. Αν η κυματοσυνάρτηση του ηλεκτρονίου είναι $\psi(x,t=0) = \sqrt{2}\, sin(\pi x/L)\left(|c_1|e^{i\varphi} + 2|c_2|cos(\pi x/L)\right)/\sqrt{L}$ και γνωρίζουμε ότι $\langle x \rangle (t=0) = L/2 - (8\sqrt{2}L/9\pi^2)$ και $\langle p \rangle (t=0) = 4\sqrt{2}\hbar/3L$ να βρεθούν **(4α)** η $\psi(x,t)$ και η **(4β)** αβεβαιότητα ενέργειας. Δίνεται $x_{21} = -16L/9\pi^2$, $p_{21} = -8i\hbar/3L$.

$\psi(x,0) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\left(|c_1|e^{i\varphi} + 2|c_2|\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right) = |c_1| e^{i\varphi}\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + |c_2|\sqrt{\frac{2}{L}}\underbrace{2\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)}_{\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)} = |c_1|e^{i\varphi}\psi_1 + |c_2|\psi_2$.

Αφού $(\psi, \psi) = 1 \rightarrow |c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$. Επίσης $\langle x \rangle (t=0) = \frac{L}{2} + 2|c_1||c_2||x_{21}|\cos(\omega t^{\to 0} + \varphi + \delta_{21}^x) = \frac{L}{2} - \frac{32L}{9\pi^2}|c_1||c_2|\cos\varphi$
καθώς $x_{21} = -\frac{16L}{9\pi^2}$, $|x_{21}| = \frac{16L}{9\pi}$, $\delta_{21}^x = \pi$. Τώρα $\langle x \rangle (t=0) = L/2 - \frac{8\sqrt{2}L}{9\pi^2} \rightarrow |c_1||c_2|\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{4}$. (1)
Επίσης $\langle p \rangle (t=0) = 2|c_1||c_2||p_{21}|\cos(\omega t^{\to 0} + \varphi + \delta_{21}^p) = \frac{16\hbar}{3L}|c_1||c_2|\sin\varphi$, αφού $p_{21} = -\frac{i8\hbar}{3L}$, $|p_{21}| = \frac{8\hbar}{3L}$, $\delta_{21}^p = -\frac{\pi}{2}$
καθώς $\langle p \rangle (t=0) = 4\sqrt{2}\hbar/3L \rightarrow |c_1||c_2|\sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{4}$ (2) (2)/(1) $\rightarrow \tan\varphi = 1 \rightarrow \underline{\varphi = \pi/4} \rightarrow e^{i\varphi} = e^{i\pi/4} = (1+i)/\sqrt{2}$
(α) $\psi(x,t) = \left((1+i)\psi_1 e^{-iE_1 t/\hbar}/\sqrt{2} + \psi_2 e^{-iE_2 t/\hbar}\right)/\sqrt{2}$ & (β) $\Delta E = \frac{E_2 - E_1}{2} = \frac{3\hbar^2\pi^2}{4mL^2}$ καθώς $P_1 = P_2 = \frac{1}{2}$, αφού $|c_1| = |c_2| = 1/\sqrt{2}$.

Θ. 5 **(5α)** Να σχεδιάσετε το δυναμικό $V(x) = |c|\left(\delta(x) - \delta(x-L)\right) + |V_0|\Theta(x-2L)$ και να εξηγήσετε **(5β)** για ποιες τιμές της ενέργειας έχουμε δέσμιες καταστάσεις. Για σκέδαση από το $+\infty \rightarrow -\infty$, με $E > |V_0|$ **(5γ)** να γράψετε τις εξισώσεις από τις οποίες υπολογίζονται οι συντελεστές διέλευσης και ανάκλασης.



(β) Δέσμιες, για $E < V(\pm\infty)$, άρα $E < 0$.

(γ) σκέδαση για $E > |V_0|$

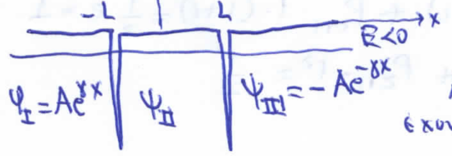
$B'_+ + B'_- = C$
$ik(B'_+ - B'_-) + ikC = \frac{-2m|c|C}{\hbar^2}$

$B_+e^{i2kL} + B_-e^{-i2kL} = e^{-ik'2L} + Ae^{i2k'L}$
$ik(B_+e^{i2kL} - B_-e^{-i2kL}) = ik'(-e^{-ik'2L} + Ae^{ik'2L})$

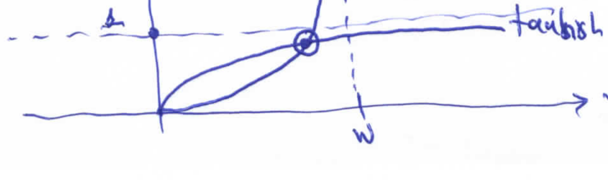
$R = |A|^2$

Θ. 6 Να αποδείξετε ότι ηλεκτρόνιο μάζας m σε δυναμικό $V(x) = -|g| \cdot \left(\delta(x+L) + \delta(x-L)\right)$, έχει περιττή δέσμια κατάσταση όταν ισχύει $2m|g|L > \hbar^2$.

Στο θέμα 3, 2ης προόδου ακ. έτους 19–20 (16/12/19) έχουμε βρει για τις περιττές ιδιοσυναρτήσεις, δηλαδή $\psi_{II} = Bs\sinh\gamma L$, τις εξής Σ.Σ. $Bs\sinh\gamma L = -Ae^{-\gamma L}$ & $\gamma Ae^{-\gamma L} - \gamma Bs\cosh\gamma L = \frac{2m|c|}{\hbar^2}Ae^{-\gamma L}$



Από την Σ.Σ. στο $x = L$ βρίσκουμε τελικά την συνθήκη
$\tanh\gamma L = \frac{\gamma}{w - \gamma}$ (όπου $w = \frac{2m|g|}{\hbar^2}$).
Από την γραφική των $\tanh\gamma L$, $\frac{\gamma}{w-\gamma}$ έχουμε



όπου $\gamma^2 = \frac{-2mE}{\hbar^2}$

, βρίσκουμε ότι ∃ σημείο τομής αν η $\frac{\gamma}{w-\gamma}$ έχει κλίση μικρότερη της κλίσης της $\tanh\gamma L$ στο $\gamma = 0$ (αρχή αξόνων). Τώρα για $\gamma \to 0$ $\tanh\gamma L \sim \gamma L$, κλίση L, ενώ $\frac{\gamma}{w-\gamma}$ για $\gamma \to 0$ κλίση $\frac{1}{w}$, άρα $\frac{1}{w} = \frac{\hbar^2}{2m|g|} < L \rightarrow 2m|g|L > \hbar^2$.

Θ. 7 Θεωρούμε ηλεκτρόνιο περιορισμένο σε δυναμικό $V(x)=|V_0|\cdot\Theta(L-|x|)$, να γράψετε τις εξισώσεις από τις οποίες μπορεί να υπολογιστεί ο συντελεστής ανάκλασης για ενέργεια $E=|V_0|$.

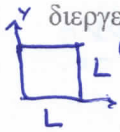
~~Θέμα~~ 5, φετινής 2ης προόδου. Πρακτικά ίδιο με, εκτός ότι τώρα $-L<x<L$ όχι $0<x<L$. } Το "λεπτό" σημείο, στην περιοχή $-L<x<L$ $(|x|<L)$ η εξ. Schrödinger είναι $\psi''=0$ με λύση $\psi=Ax+B$.

Θ. 8 Κβαντικός αρμονικός ταλαντωτής περιγράφεται, την χρονική στιγμή $t=0$ από την κυματοσυνάρτηση, $\psi(x,t=0)=|c_0|e^{i\varphi_{01}}\psi_0+|c_1|\psi_1$. Αν $\langle E\rangle=1$ και $\langle x\rangle(t=0)=1/\sqrt{2}$ να βρεθούν **(8α)** η $\psi(x,t)$ και **(8β)** η μέση αρτιότητα $\langle P\rangle(t)$. Επίσης να βρεθεί η μέση ορμή $\langle p\rangle(t)=|c_0|^2 p_{00}+|c_1|^2 p_{11}+2|c_0||c_1||p_{10}|cos(\omega t+\varphi_{01}+\delta_{10})$, υπολογίζοντας *όλα* τα $p_{ij}=(\psi_i,\hat{p}\psi_j)$ **(8γ₁)** χρησιμοποιώντας τα ολοκληρώματα και **(8γ₂)** με την αλγεβρική μέθοδο.

<u>*Δίνονται:*</u> $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$, $\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n}e^{-\alpha x^2}dx=\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{(2\alpha)^n}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$, $\psi_0=\frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}e^{-x^2/2}$, $\psi_1=\sqrt[4]{\frac{4}{\pi}}xe^{-x^2/2}$ και $x_{10}=1/\sqrt{2}$.

Ακριβώς ίδιο με Θέμα 6, φετινής 2ης προόδου. (α) $\psi(x,t)=\frac{\psi_0 e^{-it/2}+\psi_1 e^{-3it/2}}{\sqrt{2}}$.
(β) $\langle P(t)\rangle=0$, (γ) $\langle p\rangle(t)=-\sin(t)/\sqrt{2}$, $p_{00}=p_{11}=0$ & $p_{10}=i/\sqrt{2}$.

Θ. 9 Για ηλεκτρόνιο περιορισμένο σε τετραγωνική κβαντική τελεία πλευράς μήκους L, να βρεθεί **(9α)** η ενέργεια της $2^{ης}$ διεγερμένης κατάστασης και **(9β)** ο εκφυλισμός της.



(α) $E_{n_x n_y}=\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}(n_x^2+n_y^2)$. Θεμελιώδη $n_x=n_y=1$. 1η διεγερμένη $(n_x,n_y)=(1,2)$ ή $(2,1)$
2η διεγερμένη $(n_x,n_y)=(2,2)$. $E_{11}=\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}(1+1)=2E_0$, $E_{12}=E_{21}=E_0(1+4)=5E_0$
$E_{22}=E_0(4+4)=8E_0$. (β) δεν είναι εκφυλισμένη.

Θ. 10 Ηλεκτρόνιο που κινείται πάνω στην επιφάνεια σφαίρας, βρίσκεται στην κατάσταση $|N|\cdot(|10\rangle-i|11\rangle)$. { από νορμαλισμό $|N|=1/\sqrt{2}$
Να υπολογιστεί η $\langle l_x\rangle$. $l_x=\frac{l_++l_-}{2}$, ενώ $l_\pm|lm\rangle=\sqrt{l(l+1)-m(m\pm1)}\,|l,m\pm1\rangle$
Οπότε $l_+|10\rangle=\sqrt{2}|11\rangle$ & $l_+|11\rangle=0$, $l_-|10\rangle=\sqrt{2}|1-1\rangle$ & $l_-|11\rangle=\sqrt{2}|10\rangle$.
Έτσι $\langle l_x\rangle=\frac{1}{2}(\langle10|+i\langle11|)\left(\frac{l_++l_-}{2}\right)(|10\rangle-i|11\rangle)=\frac{1}{4}(\langle10|+i\langle11|)(\sqrt{2}|11\rangle+\sqrt{2}|1-1\rangle-i\sqrt{2}|10\rangle)=$
$=\frac{1}{4}(i\sqrt{2}\langle11|11\rangle-i\sqrt{2}\langle10|10\rangle)=0$.

Θ. 11
Ηλεκτρόνιο σε ένα άτομο υδρογόνου βρίσκεται στην $1^η$ διεγερμένη κατάσταση με μηδενικούς κβαντικούς αριθμούς στροφορμής. Να υπολογιστεί το $\langle r\rangle(t)$. ψ_{200} η 1η διεγερμένη με $l=0$ & $m=0$.
$\langle r\rangle=\int dV|\psi_{200}|^2 r=\left(\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\right)^2\int_0^\infty\left(1-\frac{r}{2}\right)^2 e^{-r}\,4\pi r^2 dr=\frac{1}{2}\int_0^\infty\left(r^3-r^4+\frac{r^5}{4}\right)e^{-r}dr=\frac{1}{2}\left(3!-4!+\frac{5!}{4}\right)=6$
Η μέση απόσταση του e από τον πυρήνα, στην κατάσταση 2s, είναι $6a_0$ (ακτίνα Bohr)

Θ. 12
Θεωρούμε ότι η κυματοσυνάρτηση ατόμου υδρογόνου, είναι $\Psi(\vec{r},t=0)=|N|(\psi_{200}(\vec{r})+\psi_{211}(\vec{r}))$.

(12α) Να υπολογίστε την μέση ενέργεια $\langle E\rangle$.

(12β) Να υπολογίστε την $\langle l_x^2+l_y^2\rangle(t)$ την τυχαία χρονική στιγμή *t*.

<u>Δίνεται</u> $\int_0^\infty r^n e^{-\alpha r}dr=\frac{n!}{\alpha^{n+!}}$, $\psi_{100}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-r}$, $\psi_{200}=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left(1-\frac{r}{2}\right)e^{-r/2}$, $\psi_{211}=\frac{1}{8\sqrt{\pi}}re^{-r/2}\sin\theta e^{i\varphi}$

Από νορμαλισμό $\Psi(\vec{r},t=0)$ έχουμε $|N|=1/\sqrt{2}$. Αμφότερες οι καταστάσεις ψ_{200} & ψ_{211} έχουν $n=2$ & ενέργεια $E_2=-\frac{1}{2\cdot2^2}=\frac{-1}{8}\left(\frac{-27{,}2}{8}\sim3{,}4\,eV\right)$

Οπότε $\Psi(\vec{r},t)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{200}+\psi_{211})e^{-iE_2t/\hbar}\sim\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{200}+\psi_{211})$ στάσιμη κατάσταση.

Έτσι (12α) $\langle E\rangle=E_2=-\frac{1}{8}$

(12β) Ισχύει $l^2=l_x^2+l_y^2+l_z^2\rightarrow l_x^2+l_y^2=l^2-l_z^2$

και $\langle l_x^2+l_y^2\rangle=\langle l^2\rangle-\langle l_z^2\rangle$, $\langle l^2\rangle=P_{200}\,0\cdot(0+1)+P_{211}\cdot1\cdot(1+1)=\frac{1}{2}2=1$
$\langle l_z^2\rangle=P_{200}\cdot0^2+P_{211}\cdot1^2=\frac{1}{2}$

άρα $\langle l_x^2+l_y^2\rangle=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.