2η πρόοδος, «Κβάντο I», ακ. χρονιά 20-21. 19/12/20. Α. Φ. Τερζής

Θ1. Καθώς $H_{ij}=\langle i|\hat{H}|j\rangle$, βρίσκουμε $H:\begin{bmatrix}\varepsilon & -\varepsilon\\ -\varepsilon & \varepsilon\end{bmatrix}$. Διαγωνοποιώντας $\begin{vmatrix}\varepsilon-\lambda & -\varepsilon\\ -\varepsilon & \varepsilon-\lambda\end{vmatrix}=0 \to \lambda(2\varepsilon-\lambda)=0 \to \lambda=\begin{cases}0\\2\varepsilon\end{cases}$

Για $\lambda_0=0$ έχουμε $\begin{bmatrix}\varepsilon & -\varepsilon\\ -\varepsilon & \varepsilon\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \to x_0-y_0=0 \to y_0=x_0$ & $x_0^2+y_0^2=1 \to y_0=x_0=1/\sqrt{2}$. Ανάλογα για $\lambda_{2\varepsilon}=2\varepsilon$ έχουμε $y_0=-x_0(=1/\sqrt{2})$. Οπότε οι ιδιοτιμές & οι ιδιοσυναρτήσεις της ενέργειας είναι $\lambda=0$ με $|0\rangle=(|1\rangle+|2\rangle)/\sqrt{2}$ και $\lambda=2\varepsilon$ με $|2\varepsilon\rangle=(|1\rangle-|2\rangle)/\sqrt{2}$ (ερωτήματα (α) & (β)).

Ενδεικτικά υπολογίζουμε το $W_{02\varepsilon}=\langle 0|\hat{w}|2\varepsilon\rangle=\langle 0|(w|1\rangle\langle 1|-w|2\rangle\langle 2|)|2\varepsilon\rangle=w\langle 0|1\rangle\langle 1|2\varepsilon\rangle-w\langle 0|2\rangle\langle 2|2\varepsilon\rangle$ $=w\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}-w\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{w}{2}+\frac{w}{2}=w$ ...... τελικά $W:\begin{bmatrix}0 & w\\ w & 0\end{bmatrix}$ (γ).

$t=0$, θετική τιμή για $\hat{w}$-μέτρηση, άρα $|\Psi(x,t=0)\rangle=|1\rangle$, οπότε αφού $\langle 0|1\rangle=\langle 2\varepsilon|1\rangle=1/\sqrt{2}$

(δ) $|\Psi(x,t)\rangle=\dfrac{|0\rangle+|2\varepsilon\rangle e^{-i2\varepsilon t/\hbar}}{\sqrt{2}}$. Από τα αποτελέσματα αυτά καταλαβαίνουμε ότι η άσκηση αυτή στην συνέχεια (εκτός του τελευταίου ερωτήματος) είναι ίδια με το Θ1 του 6ου τεστ. & του (γ).

Άρα $\langle E\rangle=\varepsilon$. Το $\langle w\rangle(t)=w\cos(2\varepsilon t/\hbar)$ (στ). Αφού $|\Psi(x,t)\rangle=\cos(\varepsilon t/\hbar)|1\rangle+i\sin(\varepsilon t/\hbar)|2\rangle$

γιατί? κανένα πρόσημο

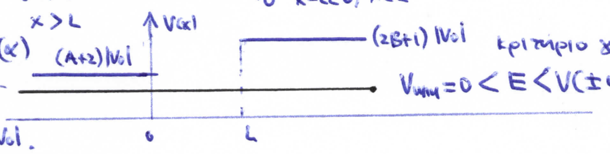
(ζ) $P_{+w}=\cos^2(\varepsilon t/\hbar)$ από $P_{+w}=|\langle 1|\Psi(x,t)\rangle|^2$.

(η) $d\langle w\rangle(t)/dt=-\frac{2\varepsilon w}{\hbar}\sin\left(\frac{2\varepsilon t}{\hbar}\right)$ & (θ) θα αποδείξουμε ότι μπορεί να μετρηθεί ταυτόχρονα με δύο τρόπους. Ένας τρόπος είναι αναγνωρίζοντας ότι έχει τις ίδιες ιδιοσυναρτήσεις. Αυτό γίνεται άμεσα κατανοητό αν συγκρίνουμε τις ιδιοσυναρτήσεις της $\hat{H}$ αυτού του θέματος με τις ιδιοσυναρτήσεις της $\hat{H}$ του Θ1 στο 6ο τεστ. Η άλλη μεθοδολογία είναι με τον μεταθέτη. Με τους πίνακες $\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$ με την γραφή με τα $|i\rangle\langle j|$ κτλ. Για τον υπολογισμό του μεταθέτη μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε

Θ2. Συντονισμός για $E=V_0+\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}n^2$. Η μικρότερη για $n=1$. Από Θ4(δ) του 2ου τεστ $\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\simeq\frac{1}{3}eV$ για $L=1nm$. Άρα εδώ $E_{min}=B+2+\dfrac{1}{3(A+1)^2}$ eV.

Θ3. $\Theta(-x)=\begin{cases}1 & -x>0,\ x<0\\ 0 & -x<0,\ x>0\end{cases}$ & $(A+2)\Theta(-x)=\begin{cases}(A+2) & x<0\\ 0 & 0<x<L\\ 0 & x>L\end{cases}$. $\Theta(x-L)=\begin{cases}1 & x-L>0,\ x>L\\ 0 & x-L<0,\ x<L\end{cases}$ & $(2B+1)\Theta(x-L)=\begin{cases}0 & x<0\\ 0 & 0<x<L\\ (2B+1) & x>L\end{cases}$

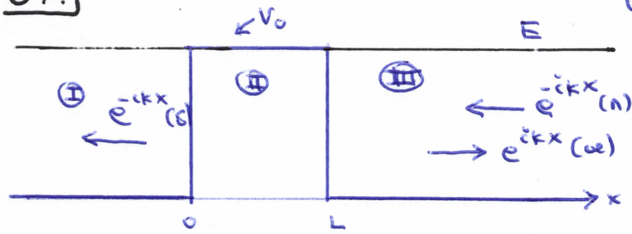
Άρα $V(x)=\begin{cases}|V_0|(A+2) & x<0\\ 0 & 0<x<L\\ |V_0|(2B+1) & x>L\end{cases}$ Έστω $2B+1>A+2$ (α)



κριτήριο για δέσμιες $V_{min}=0<E<V(\pm\infty)$

ΔΕΣΜΙΕΣ (β) $0<E<(A+2)|V_0|$.

Θ4.



(α) Εξισώσεις Schrödinger στις περιοχές I & III, $-\frac{\hbar^2}{2m}\Psi''+0\Psi=E\Psi \to \Psi''+\underbrace{\frac{2mE}{\hbar^2}}_{=k^2}\Psi=0$. $k^2=\frac{2mE}{\hbar^2}$ $(E>0)$

Οπότε για σκέδαση από $(+\infty\to-\infty)$ έχουμε

$\Psi_{III}=\underset{\text{προσπίπτων}}{e^{-ikx}}+\underset{\text{ανακλώμενο}}{Ae^{ikx}}$ & $\Psi_I=\underset{\text{διερχόμενο}}{Ce^{-ikx}}$

Στην περιοχή II έχουμε $-\frac{\hbar^2}{2m}\Psi''+V_0\Psi=\underbrace{E\Psi=V_0\Psi}_{\text{σχήμα}}$

$\to \Psi''=0 \to \Psi_{II}=Bx+B'$

(β) Συνοριακές συνθήκες $x=L$: $\Psi_{III}(L)=\Psi_{II}(L)$, $e^{-ikL}+Ae^{ikL}=B\cdot L+B'$

$\Psi'_{III}(L)=\Psi'_{II}(L)$, $ik(Ae^{ikL}-e^{-ikL})=B$

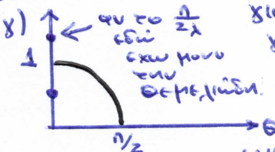
στο $x=0$: $\Psi_{II}(0)=\Psi_I(0)$, $B'=C$

$\Psi'_{II}(0)=\Psi'_I(0)$, $B=-ikC$

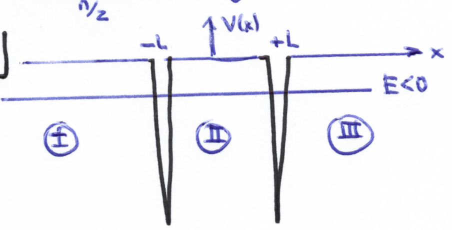
Θ5. (α) $\Psi_I=Ae^{\gamma x}$, $\Psi_{II}=B\sin kx$, $\Psi_{III}=-Ae^{-\gamma x}$, με $\gamma^2=-\frac{2mE}{\hbar^2}$ & $k^2=\frac{2m(V_0+E)}{\hbar^2}$ 1η μετά την 2η, οπότε $\tan kL=-k/\gamma$.

(β) Σ.Σ. $x=\pm L$, $B\sin kL=-Ae^{-\gamma L}$ & $kB\cos kL=A\gamma e^{-\gamma L}$ Διαιρούμε την

(γ) για να υπάρχει η 1η διεγερμένη πρέπει να υπάρχει λύση της $\cot\theta=\frac{\theta}{\lambda}+\frac{m\pi}{2\lambda}$ για $m=1$. Τότε $\frac{m\pi}{2\lambda}=\frac{\pi}{2\lambda}$ και θα πρέπει να είναι μικρότερο του 1, $\frac{\pi}{2\lambda}<1 \to$ $\lambda>\frac{\pi}{2} \to L\sqrt{v_0}>\frac{\pi}{2} \to L^2\frac{2mV_0}{\hbar^2}>\frac{\pi^2}{2} \to \underline{V_0L^2>\frac{\hbar^2\pi^2}{4m}}$ όταν ισχύει η σχέση αυτή ∃ 1η διεγερμένη.



Θ6.



(α) $\Psi_I=Ae^{\gamma x}$, $\Psi_{III}=Ae^{-\gamma x}$ & $\Psi_{II}=B\cosh\gamma x$, $\gamma^2=-\frac{2mE}{\hbar^2}$

(β) Σ.Σ. $x=L$, $\boxed{B\cosh\gamma L=Ae^{-\gamma L}}$

& $-\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\varepsilon+L}^{\varepsilon+L}\Psi''dx-g\int_{-\varepsilon+L}^{\varepsilon+L}\delta(x-L)\Psi(x)dx=E\int_{-\varepsilon+L}^{\varepsilon+L}\Psi(x)dx$

για $\varepsilon\to0$ $-\frac{\hbar^2}{2m}(\Psi'_{III}(L)-\Psi'_{II}(L))-g\Psi(L)=0$ (ασυνέχεια παραγώγου)

$-\frac{\hbar^2}{2m}(-\gamma Ae^{-\gamma L}-B\gamma\sinh\gamma L)-gAe^{-\gamma L}=0$

$$\boxed{\left(\frac{\hbar^2\gamma}{2m}+g\right)Ae^{-\gamma L}=-\frac{\hbar^2B}{2m}\gamma\sinh\gamma L}$$