1η πρόοδος «Κβαντικής Φυσικής Ι» ακ. έτους 2020-2021.

Θ1.[1+1] Για την κυματοσυνάρτηση $\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\lambda\cdot x^2/2} e^{i\cdot(A+1)\cdot p\cdot x}$.

Να βρεθεί (**α**) η αβεβαιότητα της θέσης όταν *p*=0 και (**β**) και η μέση ορμή για μη μηδενικό *p*.

(α) $p=0$, $\langle x\rangle = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/2}\int x e^{-\lambda x^2}dx = 0$, $\langle x^2\rangle = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/2}\int x^2 e^{-\lambda x^2}dx = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/2}\frac{1}{(2\lambda)^1}\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^{1/2} = \frac{1}{2\lambda}$

Αρα $\Delta x = \left(\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2\right)^{1/2} = 1/\sqrt{2\lambda}$

(β) $p\neq 0$, $\langle p\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(\hat{p}\psi)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\lambda x^2/2}\, e^{-i(A+1)px}\cdot\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\lambda x^2/2} e^{i(A+1)px}\right]\right)dx =$

$= \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x^2/2}(-i\hbar)\left(-\lambda x + i(A+1)p\right)e^{-\lambda x^2/2}dx = i\lambda\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/2}\hbar\underbrace{\int x e^{-\lambda x^2}dx}_{0} + i\cdot i\hbar\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/2}\int p(A+1)e^{-\lambda x^2}dx =$

$= 0 + \hbar(A+1)p\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/2}\int e^{-\lambda x^2}dx = (A+1)\hbar p\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/2}\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^{1/2} = \hbar(A+1)p.$

Θ2.[1] Να ελέγξετε αν ο τελεστής $x^2\cdot p_x$ είναι ερμιτιανός, χρησιμοποιώντας τον συζυγή τελεστή.

$(x^2p_x)^+ = p_x^+(x^2)^+ = p_x^+(xx)^+ = p_x^+x^+x^+ = p_x xx = p_x x^2 \neq x^2 p_x$ καθώς $[x,p_x]=i\hbar$

λόγω ερμιτιανότητας $\hat{x}$ & $\hat{p}_x$

ή $(x^2p_x)^+ = (x(xp_x))^+ = (xp_x)^+x^+ = p_x^+x^+x^+ = p_x x\cdot x = p_x x^2.$

Αρα ο τελεστής x^2p_x δεν είναι ερμιτιανός.

Θ3.[1] Να ελέγξετε αν δύο οποιεσδήποτε διαφορετικές συνιστώσες της στροφορμής μπορούν να μετρηθούν ταυτόχρονα.

$[\ell_x,\ell_y] = [(yp_z - zp_y),(zp_x - xp_z)] = [yp_z, zp_x] - [yp_z, xp_z] - [zp_y, zp_x] + [zp_y, xp_z] =$ {οι μεταθέτες που μηδενίζω έχουν στοιχεία που μετατίθενται}

$= y[p_z, zp_x] + [y, zp_x]p_z + z[p_y, xp_z] + [z, xp_z]p_y = yz[p_z,p_x] + y[p_z,z]p_x + z[y,p_x]p_z + [y,z]p_xp_z +$

$+ x[z,p_z]p_y + [z,x]p_zp_y \underset{[z,p_z]=i\hbar}{\overset{\text{αφού}}{=}} -i\hbar yp_x + i\hbar xp_y = i\hbar(xp_y - yp_x) = i\hbar\ell_z \neq 0$

άρα ΔΕΝ μπορούν να μετρηθούν ταυτόχρονα.

Σε όλα τα θέματα που ακολουθούν θεωρούμε ηλεκτρόνιο εντοπισμένο σε περιοχή [0,L].

Θ4. [1+1] Αν το ηλεκτρόνιο βρίσκεται στην 1η διεγερμένη κατάσταση να βρεθεί (**α**) η μέση θέση του. Αν το *L*=1nm να βρεθεί (**β**) η ενέργεια σε eV.

Θ4 στο Τεστ 2, (α) $\langle x\rangle = L/2$ & (β) $E_2 \sim 4/3$ eV.

Θ5. [1+1] Αν $\psi(x,t=0) = \left(\frac{\psi_2-\psi_1}{\sqrt{2}}\right)$, να υπολογιστεί (**α**) η μέση ενέργεια και (**β**) η $\langle p\rangle(t)$.

$\psi(x,t=0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2$ άρα $c_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\pi}$, δηλαδή $|c_1| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ & $\varphi_{12} = \pi$. ενώ $|c_2| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(α) $\langle E\rangle = |c_1|^2E_1 + |c_2|^2E_2 = \frac{1}{2}E_1 + \frac{1}{2}E_2 = \frac{E_1+E_2}{2} = \frac{5E_1}{2}$

(β) $\langle p\rangle(t) = |c_1|^2p_{11} + |c_2|^2p_{22} + 2|c_1||c_2||p_{21}|\cos(\omega t + \varphi_{12} + \delta^p_{21}) = \left(\begin{matrix}\text{αφού}\\ p_{11}=p_{22}=0\end{matrix}\right) = |p_{21}|\cos(\omega t + \pi + \delta^p_{21})$

$p_{21} = -\frac{8\hbar i}{3L} = \frac{8\hbar}{3L}e^{-i\pi/2}$, άρα $|p_{21}| = \frac{8\hbar}{3L}$, $\delta^p_{21} = -\frac{\pi}{2}$, $\langle p\rangle(t) = \frac{8\hbar}{3L}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{8\hbar}{3L}\sin(\omega t)$

όπου $\omega = \frac{E_2 - E_1}{\hbar} = \frac{3\hbar\pi^2}{2mL^2}$.

Θ6. [1+1] Αν την χρονική στιγμή *t*=0 μετρήσω την μέση ενέργεια και την μέση θέση και βρω $\left(\frac{B}{10}+2\right)E_1$ και *L*/2, αντίστοιχα, να υπολογιστεί (**α**) η μέση ενέργεια και (**β**) η κυματοσυνάρτηση την τυχαία χρονική στιγμή *t*.

$\langle x\rangle(t=0) = |c_1|^2x_{11} + |c_2|^2x_{22} + 2|c_1||c_2||x_{21}|\cos(\omega \overset{0}{t} + \varphi_{12} + \delta^x_{21}) = \frac{L}{2} + 2|c_1||c_2||x_{21}|\cos(\varphi_{12} + \delta^x_{21}) = \frac{L}{2}$

$\rightarrow \cos(\varphi_{12} + \delta^x_{21}) = 0$ αφού $x_{21} = -\frac{16L}{9\pi^2} = \frac{16L}{9\pi^2}e^{i\pi}$, δηλαδή $|x_{21}| = \frac{16L}{9\pi^2}$ και $\delta^x_{21} = \pi$

έχουμε $\cos(\pi + \varphi_{12}) = 0 \rightarrow \cos\varphi_{12} = 0 \rightarrow \varphi_{12} = \frac{\pi}{2}$.

επίσης $\langle E\rangle = |c_1|^2E_1 + |c_2|^2E_2 = |c_1|^2E_1 + 4|c_2|^2E_1 = (|c_1|^2 + 4|c_2|^2)E_1 = \left(\frac{B}{10}+2\right)E_1 \rightarrow |c_1|^2 + 4|c_2|^2 = \frac{B}{10} + 2 \quad (1)$

ενώ ισχύει $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1 \quad (2) \xrightarrow[(1)-(2)]{} 3|c_2|^2 = \frac{B}{10} + 1 \rightarrow |c_2|^2 = \frac{1}{3} + \frac{B}{30} = \frac{B+10}{30}$

και $|c_1|^2 = 1 - |c_2|^2 = \frac{20-B}{30}$.

(β) Αρα $\psi(x,t) = |c_1|e^{i\varphi_{12}}\psi_1 e^{-iE_1t/\hbar} + |c_2|\psi_2 e^{-iE_2t/\hbar} = \sqrt{\left(\frac{20-B}{30}\right)}\, i\,\psi_1 e^{-iE_1t/\hbar} + \sqrt{\frac{B+10}{30}}\,\psi_2 e^{-iE_2t/\hbar}$.

(α) Η μέση ενέργεια δεν μεταβάλλεται με τον χρόνο, οπότε $\langle E\rangle = \left(\frac{B}{10}+2\right)E_1$