3η πρόοδος «Κβαντικής Φυσικής Ι» ακαδημαϊκού έτους 2023-2024 (15/1/2024), διδ. Ανδρέας Φ. Τερζής

Θ1. Κβαντικός αρμονικός ταλαντωτής βρίσκεται στην κατάσταση, $|\psi(x,t=0)> = \overbrace{(11-B)\cdot|c_1|}^{|c_1'|}\, e^{i\,\varphi_{12}}|1> + |c_2||2>$.

Να βρεθούν **(α)** το $x_{21} = (\psi_2, \hat{x}\psi_1)$ με τον υπολογισμό του ολοκληρώματος και **(β)** το p_{21} με την αλγεβρική μέθοδο.

Αν γνωρίζουμε ότι για $t = 0$, η μέση θέση και η μέση ορμή είναι 0 και -1 , να βρεθούν **(γ)** η κυματοσυνάρτηση την τυχαία χρονική στιγμή t, **(δ)** η μέση ενέργεια και **(ε)** η μέση χρονοεξαρτώμενη ορμή. $\psi_1 = \frac{\sqrt{2}}{\pi^{\left(\frac{1}{4}\right)}}\, x\, e^{-x^2/2}$ και $\psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\pi^{\left(\frac{1}{4}\right)}}(2\,x^2-1)\, e^{-x^2/2}$.

(α) $x_{21} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int e^{-x^2} x^2(2x^2-1)\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int 2x^4 e^{-x^2}dx - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int x^2 e^{-x^2}dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, 2\,\frac{1\cdot 3}{2^2}\sqrt{\pi} - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1 \rightarrow |x_{21}| = 1,\ \delta^x_{21} = 0.$

(β) $p_{21} = \langle 2|\hat{p}|1\rangle = \langle 2|\left(\frac{\hat{a} - \hat{a}^+}{i\sqrt{2}}\right)|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}i}\langle 2|\hat{a}|1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}i}\langle 2|\hat{a}^+|1\rangle = \frac{1}{i\sqrt{2}}\underbrace{\langle 2|0\rangle}_{0} - \frac{1}{\sqrt{2}i}\sqrt{2}\langle 2|2\rangle = i \rightarrow |p_{21}| = 1,\ \delta^p_{21} = \frac{\pi}{2}.$

(γ) $\langle x\rangle(t=0) = 2|c_1'||c_2||x_{21}|\cos(\varphi_{12} + \delta^x_{21}) = 2|c_1'||c_2|\cos(\varphi_{12}) = 0 \rightarrow \cos(\varphi_{12}) = 0 \rightarrow \varphi_{12} = \pi/2.$

$\langle p\rangle(t=0) = 2|c_1'||c_2||p_{21}|\cos(\varphi_{12} + \delta^p_{21}) = 2|c_1'||c_2|\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 2|c_1'||c_2|\cos\pi = -2|c_1'||c_2| = -1 \rightarrow |c_1'||c_2| = \frac{1}{2}$

& $|c_1'|^2 + |c_2|^2 = 1 \rightarrow |c_1'| = |c_2| = 1/\sqrt{2}$. Άρα $|\psi(x,t)\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle e^{-i\frac{3t}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle e^{-i\frac{5t}{2}}$.

(δ) $\langle E\rangle = P_{|1\rangle}\frac{3}{2} + P_{|2\rangle}\frac{5}{2} = \frac{1}{2}\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\frac{5}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{5}{2}\right) = 2$

(ε) $\langle p\rangle(t) = 2|c_1'||c_2||p_{21}|\cos(\omega t + \varphi_{12} + \delta^p_{21}) = 2\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(\omega t) = -\cos(t)$

αφού $\omega = E_2 - E_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = 1$

Θ2. Για ηλεκτρόνιο μάζας m εγκλωβισμένο σε κβαντική τελεία με $L_x = L_y = \frac{L_z}{2} = L$ να βρεθεί **(α)** η **κυματοσυνάρτηση** της 1ης **διεγερμένης** ενεργειακής κατάστασης, **(β)** η **ενέργεια** της 1ης **εκφυλισμένης** ενεργειακής κατάστασης.

Θέμα Θ6, 3ης προόδου ακ. έτους 21-22.

Θ3. Ηλεκτρόνιο που κινείται πάνω στην επιφάνεια σφαίρας, βρίσκεται στην κατάσταση, $|N|\sqrt{(A+11)}[\,i\cdot|10> - |11>]$. Να υπολογιστούν **(α)** η αβεβαιότητα της x- συνιστώσας της στροφορμής και **(β)** η μέση ενέργεια σε eV (να φαίνονται οι πράξεις). Ακτίνα σφαίρας 1nm.

Θέμα Θ3, 3ης προόδου ακ. έτους 22-23.

Θ4. Να υπολογισθούν **(α)** η αβεβαιότητα της θέση και **(β)** μέση κινητική ενέργεια, στην 1η διεγερμένη κατάσταση του ατόμου του υδρογόνου ($\psi_{200}(\vec{r}) = |N|\left(1 - \frac{r}{2}\right)e^{-r/2}$. Χρήσιμο ολοκλήρωμα, $\int_0^\infty dr\, r^n\, e^{-\lambda\cdot r} = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}$. Νορμαλισμός $N^2\int e^{-r}\left(1-\frac{r}{2}\right)^2 r^2 dr\, 4\pi = 1$

$= 4\pi N^2\int e^{-r}\left(r^2 - r^3 + \frac{r^4}{4}\right)dr = 4\pi N^2\left(2! - 3! + \frac{4!}{4}\right) = 8\pi N^2 = 1 \rightarrow |N| = 1/\sqrt{8\pi}$.

(α) $\langle r\rangle = 4\pi\frac{1}{8\pi}\int e^{-r}\left(r^3 - r^4 + \frac{r^5}{4}\right)dr = \frac{4\pi}{8\pi}\left(3! - 4! + \frac{5!}{4}\right) = \frac{1}{2}(6 - 24 + 30) = 6$

$\langle r^2\rangle = \frac{1}{2}\int e^{-r}\left(r^4 - r^5 + \frac{r^6}{4}\right)dr = \frac{1}{2}\left(4! - 5! + \frac{6!}{4}\right) = \frac{1}{2}(24 - 120 + 180) = \frac{84}{2} = 42$

Άρα $(\Delta r)^2 = \langle r^2\rangle - \langle r\rangle^2 = 42 - 6^2 = 42 - 36 = 6 \rightarrow \Delta r = \sqrt{6}$

(β) Βρίσκουμε αρχικά την $\langle V\rangle = -\frac{4\pi}{8\pi}\int e^{-r}\left(r - r^2 + \frac{r^3}{4}\right)dr = -\frac{1}{2}\left(1! - 2! + \frac{3!}{4}\right) = -\frac{1}{2}\left(1 - 2 + \frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2}\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

$\langle T\rangle = E_2 - \langle V\rangle = -\frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.

Θ5. Θεωρούμε ότι η κυματοσυνάρτηση του ατόμου υδρογόνου, είναι $\Psi(\vec{r}, t=0) = |N|\left[i\cdot\sqrt{(A+B+1)}\psi_{100}(\vec{r}) + \psi_{210}(\vec{r}) + \psi_{211}(\vec{r})\right]$.

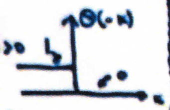
Να υπολογίστε **(α)** την $\Psi(\vec{r}, t)$, **(β)** την μέση ενέργεια, **(γ)** την $\langle l_x^2 + l_y^2\rangle(t)$ και **(δ)** την $\langle l_x\rangle(t)$ την τυχαία χρονική στιγμή t.

Θέμα Θ5, 3ης προόδου ακ. έτους 22-23.

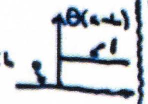
$3^{η}$ πρόοδος «Κβαντικής Φυσικής Ι» ακαδημαϊκού έτους 2021-2022. Δευτέρα 24/1/2022. διδ. Ανδρέας Φ. Τερζής

Θ1.(α) Να σχεδιάσετε το δυναμικό, $V(x) = |V_0|\big((A+B)\,\theta(-x) + (2A+1)\,\theta(x-L)\big)$ και **(β)** να εξηγείστε για ποιες τιμές της ενέργειας έχουμε δέσμιες καταστάσεις.

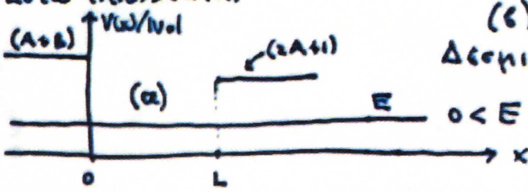
$\theta(-x) = \begin{cases} 0, & -x<0 \to x>0 \\ 1, & -x>0 \to x<0 \end{cases}$



$\theta(x-L) = \begin{cases} 0, & x-L<0 \to x<L \\ 1, & x-L>0 \to x>L \end{cases}$



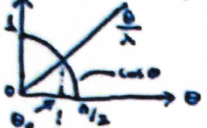
Έστω $(A+B) > (2A+1)$



(β) Δέσμιες για, $0 < E < (2A+1)|V_0|$

Θ2. Για τετραγωνικό πηγάδι δυναμικού με πάχος $(2A+1)\,L$ και δυναμικό, $(A+B)|V_0|$ και χρησιμοποιώντας την σχέση $\cos\theta = \frac{\theta}{\lambda} + m\frac{\pi}{2\lambda}$ να **(α)** αποδείξτε ότι πάντα υπάρχει η θεμελιώδης κατάσταση και **(β)** να βρείτε την συνθήκη για να έχουμε μία διεγερμένη κατάσταση. **(γ)** Ζωγραφίστε προσεγγιστικά τις δυο πρώτες ενεργειακές καταστάσεις.

(α) $m=0 \to \cos\theta = \frac{\theta}{\lambda}$



πάντα ∃ τομή $\cos\theta$ & θ/λ οπότε και λύση, θ_0.

(β) Πρέπει για $m=1$, το σημείο τομής να είναι μικρότερο του 1

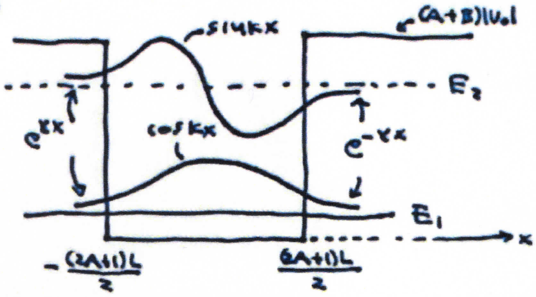
Άρα $\frac{\pi}{2\lambda} < 1 \to \lambda > \frac{\pi}{2}$. Τώρα $\lambda = \sqrt{\frac{2m(A+B)|V_0|}{\hbar^2}}\,\frac{(2A+1)L}{2}$

$\to \sqrt{\frac{2m(A+B)(2A+1)^2|V_0|L^2}{4\frac{\hbar^2}{(2\pi)^2}}} > \frac{\pi}{2}$

$\to \frac{\sqrt{8m(A+B)(2A+1)^2|V_0|L^2}}{h} > 1$, η συνθήκη.

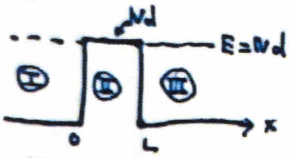
Αν θέλουμε μόνο μια διεγερμένη τότε και $m=2 \to \frac{2\cdot\pi}{2\lambda} > 1 \to \frac{\pi}{\lambda} > 1$

(γ)



Θ3. Θεωρούμε ηλεκτρόνιο μάζας m σε ορθογώνιο φράγμα δυναμικού με πάχος L και δυναμικό $|V_0|$. **(α)** γράψτε τις κυματοσυναρτήσεις για τις τρεις περιοχές και **(β)** τις συνοριακές συνθήκες, για σκέδαση από $(-\infty \to +\infty)$ με ενέργεια ίση με $|V_0|$.

(α)



$\Psi_I = e^{ikx} + Ae^{-ikx}$

$\Psi_{II} = Bx + B'$ $(\Psi_{II}'' = 0)$

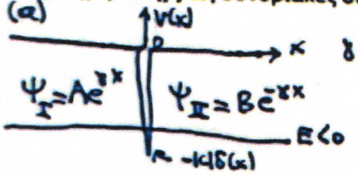
$\Psi_{III} = Ce^{ikx}$, $k = \sqrt{\frac{2m|V_0|}{\hbar^2}}$

(β) Σ.Σ. στο $x=0$, $1+A = B'$ & $ik(1-A) = B$

Σ.Σ στο $x=L$, $B\cdot L + B' = Ce^{ikL}$ & $B = ik\,Ce^{ikL}$

Θ4. Θεωρούμε ηλεκτρόνιο μάζας m με αρνητική ενέργεια ίση με E σε δυναμικό $-|c|\,\delta(x)$. Γράψτε **(α)** τις κυματοσυναρτήσεις για τις διάφορες περιοχές και **(β)** τις συνοριακές συνθήκες.

(α)



$\gamma = \sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}}$

(β) Σ.Σ στο $x=0$, $\Psi_I(0) = \Psi_{II}(0) \to A = B$

επίσης $\lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\psi''dx - |c|\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(x)\psi(x)dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}E\psi(x)dx\right] \to -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\psi'(0^+) - \psi'(0^-)\right] - |c|\psi(0) = 0$

η ασυνέχεια της παραγώγου είναι $-\frac{\hbar^2}{2m}(-\gamma B - \gamma A) = |c|A$ ή $|c|B$.

Θ5. το θέμα Θ1 της περσινής (ακ. έτος 20-21) $3^{ης}$ προόδου.

Θ6. Για ηλεκτρόνιο μάζας m εγκλωβισμένο σε κβαντική τελεία με $L_x = L_y = \frac{L_z}{2} = L$ να βρεθεί **(α)** η κυματοσυνάρτηση της $1^{ης}$ διεγερμένης ενεργειακής κατάστασης, **(β)** η ενέργεια της $1^{ης}$ εκφυλισμένης ενεργειακής κατάστασης.

$E = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m}\left[\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2}\right] = \underbrace{\frac{\hbar^2\pi^2}{8mL^2}}_{E_0}(4n_x^2 + 4n_y^2 + n_z^2)$

πινακάκι καταστάσεων

n_x	n_y	n_z	E/E_0	
1	1	1	9	
1	1	2	12	← $1^{η}$ διεγερμένη
1	2	1	21	$3^{η}$ διεγερμένη & $1^{η}$ εκφυλισμένη.
2	1	1	21	
1	1	3	17	← $2^{η}$ διεγερμένη
1	2	2	24	
2	1	2	24	

(α) $1^{η}$ διεγερμένη, από το πινακάκι

$\Psi_{112} = \begin{cases} \frac{2\sqrt{2}}{L\sqrt{L}}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) & \text{για } 0<x<L,\ 0<y<L,\ 0<z<2L \\ 0 & \text{για όλους τους άλλους συνδυασμούς } (x,y,z). \end{cases}$

(β) Από το πινακάκι πάλι, η ενέργεια της $1^{ης}$ εκφυλισμένης είναι

$E_{121} = E_{211} = 21E_0 = \frac{21\hbar^2\pi^2}{8mL^2}$.

Θ7. το θέμα Θ3 της περσινής $3^{ης}$ προόδου.

Θ8. το θέμα Θ5 της περσινής $3^{ης}$ προόδου.

Θ3. Ηλεκτρόνιο που κινείται πάνω στην επιφάνεια σφαίρας, βρίσκεται στην κατάσταση, $|N|\sqrt{(A+11)}[\, i\cdot|10> - |11>]$. Να υπολογιστούν **(α)** η αβεβαιότητα της x- συνιστώσας της στροφορμής και **(β)** η μέση ενέργεια σε eV (να φαίνονται οι πράξεις). Ακτίνα σφαίρας $1nm$. $|\tilde N| = |N|\sqrt{A+11} \rightarrow |\psi\rangle = |\tilde N|\, i|10\rangle - |\tilde N||11\rangle$ άρα $\langle\psi|\psi\rangle = 2|\tilde N|^2 = 1 \rightarrow |\tilde N| = \frac{1}{\sqrt2}$

$|\psi\rangle = \frac{i|10\rangle - |11\rangle}{\sqrt2}$ (α) $\langle \hat l_x\rangle = \frac{(-i\langle 10| - \langle 11|)}{\sqrt2}\left(\frac{\hat l_+ + \hat l_-}{2}\right)\frac{(i|10\rangle - |11\rangle)}{\sqrt2} = \frac{(-i\langle10| - \langle11|)(i\hat l_+|10\rangle + i\hat l_-|10\rangle - \hat l_-|11\rangle)}{\sqrt2\cdot2\cdot\sqrt2} = \frac{(-i\langle10| - \langle11|)}{4}$

$(i\sqrt2|11\rangle + i\sqrt2|1-1\rangle - \sqrt2|10\rangle) = (i\sqrt2\langle10|10\rangle - i\sqrt2\langle11|11\rangle)/4 = 0$. Για τον υπολογισμό του $\langle l_x^2\rangle$, αφού το l_x στο

$= (i\sqrt2\hat l_-|11\rangle + i\sqrt2\hat l_+|1-1\rangle - \sqrt2\hat l_+|10\rangle - \sqrt2\hat l_-|10\rangle)/2 = (2i|10\rangle + 2i|10\rangle - 2|11\rangle - 2|1-1\rangle)/2$, οπότε

$\hat l_x = \left(\frac{\hat l_+ + \hat l_-}{2}\right)$

$\langle \hat l_x^2\rangle = (-i\langle10| - \langle11|)(2i|10\rangle - |11\rangle - |1-1\rangle)/4 = (2\langle10|10\rangle + \langle11|11\rangle)/4 = 3/4 \longrightarrow (\Delta l_x)^2 = \langle l_x^2\rangle - \langle l_x\rangle^2 = 3/4 \rightarrow \Delta l_x = \frac{\sqrt3}{2}$

(β) και οι δύο ιδιοκαταστάσεις έχουν $l=1$, άρα $\langle E\rangle = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2ma^2}$ από $\langle E\rangle = \frac{\langle l^2\rangle}{2I}$ ← ροπή αδράνειας $\hbar^2/ma^2$

$\langle E\rangle = \frac{(10^{-34})^2\cdot1\cdot(1+1)}{2\cdot10^{-30}\cdot(10^{-9})^2}\left(\frac{J^2s^2}{kg\cdot m^2}\right) = J = \frac{10^{-68}}{10^{-48}}J = 10^{-20}J$. σε eV, διαιρώ με $1.5\cdot10^{-19}$, άρα

$\langle E\rangle = \frac{10^{-20}}{1,5\cdot10^{-19}} = \frac{2\cdot10^{-1}}{3} \sim 0,067 eV$

Θ4. Να υπολογισθούν **(α)** η μέση θέση και **(β)** μέση κινητική ενέργεια, στην θεμελιώδη κατάσταση του ατόμου του υδρογόνου ($\psi_{100}(\vec r) = |N|e^{-r}$). Χρήσιμο ολοκλήρωμα, $\int_0^\infty dr\, r^n\, e^{-\lambda\cdot r} = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}$. $\int\psi_{100}^*\psi_{100}r^2dr\,d\Omega = 1 \rightarrow |N|^2\int e^{-2r}r^2dr\,4\pi = 1$

$\longrightarrow |N|^2\frac{2!}{2^3}4\pi = 1 \rightarrow |N|^2\pi = 1 \rightarrow |N|^2 = \pi^{-1} \rightarrow |N| = (\sqrt\pi)^{-1}$ άρα $\psi_{100} = e^{-r}/\sqrt\pi$.

(α) $\langle r\rangle = \int\psi_{100}^* r\psi_{100}r^2dr\,4\pi = \frac{4\pi}{\pi}\int e^{-2r}r^3dr = 4\frac{3!}{2^4} = \frac32$.

(β) $\langle T\rangle = \langle E\rangle - \langle V\rangle = -\frac12 - \langle V\rangle$. Τώρα $\langle V\rangle = (\psi_{100}, -\frac1r\psi_{100}) = -|N|^2\int e^{-2r}\frac{r^2}{r}dr\,4\pi = -\frac1\pi\frac{1!}{2^2}4\pi = -1$

↑ ενέργεια θεμελιώδους ψ_{100}

άρα $\langle T\rangle = -\frac12 - (-1) = \frac12$.

Θ5. Θεωρούμε ότι η κυματοσυνάρτηση του ατόμου υδρογόνου, είναι $\Psi(\vec r, t=0) = |N|\left[i\cdot\sqrt{(A+B+1)}\psi_{100}(\vec r) + \psi_{210}(\vec r) + \psi_{211}(\vec r)\,\right]$. Να υπολογίστε **(α)** την $\Psi(\vec r, t)$, **(β)** την μέση ενέργεια, **(γ)** την $\langle l_x^2 + l_y^2\rangle(t)$ και **(δ)** την $\langle l_x\ \rangle(t)$ την τυχαία χρονική στιγμή t. κανονικοποίηση, $|N|^2(A+B+1+1+1) = 1 \rightarrow |N| = 1/\sqrt{A+B+3}$

(α) $\Psi(\vec r,t) = i\sqrt{\frac{A+B+1}{A+B+3}}\psi_{100}e^{it/2} + \frac{1}{\sqrt{A+B+3}}(\psi_{210}+\psi_{211})e^{it/8}$, καθώς ψ_{100} έχει $E_1 = -\frac12$ & ψ_{210}, ψ_{211} $E_2 = -\frac{1}{2\cdot2^2} = -\frac18$.

(β) $\langle E\rangle = \left(\frac{A+B+1}{A+B+3}\right)\left(-\frac12\right) + \left(\frac{2}{A+B+3}\right)\left(-\frac18\right) = -\frac{4(A+B+1)+2}{8(A+B+3)} = \frac{-(2A+2B+3)}{4(A+B+3)}$

(γ) $\langle l_x^2 + l_y^2\rangle = \langle l^2\rangle - \langle l_z^2\rangle = \left[\left(\frac{A+B+1}{A+B+3}\right)0\cdot(0+1) + \frac{2}{A+B+3}1(1+1)\right] - \left[\left(\frac{A+B+1}{A+B+3}\right)0^2 + \frac{1}{(A+B+3)}0^2 + \frac{1}{(A+B+3)}1^2\right] =$

$= \frac{4}{A+B+3} - \frac{1}{A+B+3} = \frac{3}{A+B+3}$

(δ) ο $\hat l_x = \frac{\hat l_+ + \hat l_-}{2}$ στο ψ_{100} δίνει πάντα μηδέν. Για τις $\psi_{210} + \psi_{211}$ έχουμε ίδια χρονοεξάρτηση $e^{it/8}$, οπότε δεν χρειάζεται να την λάβουμε υπόψη μας.

$\langle \hat l_x\rangle = \frac{(\langle210| + \langle211|)}{\sqrt{A+B+3}}\left(\frac{\hat l_+ + \hat l_-}{2}\right)\frac{(|210\rangle + |211\rangle)}{\sqrt{A+B+3}} = (\langle210| + \langle211|)(\hat l_+|210\rangle + \hat l_-|210\rangle + \hat l_-|211\rangle)/(2(A+B+3)) =$

$= (\langle210| + \langle211|)(\sqrt2|211\rangle + \sqrt2|21-1\rangle + \sqrt2|210\rangle)/2(A+B+3) = (\sqrt2\langle210|210\rangle + \sqrt2\langle211|211\rangle)/(2(A+B+3)) = \frac{\sqrt2}{(A+B+3)}$