ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: **Α.Μ.:**

2

2η πρόοδος «Κβαντικής Φυσικής Ι» ακ. έτους 2023-2024. Πάτρα, 4/12/2022, διδ. Ανδρέας Φ. Τερζής. **Εξατομικευμένα** θέματα, θα χρειαστούν, **Α,** ο τελευταίος αριθμός του Α.Μ. σας, **Β**, ο προτελευταίος αριθμός του Α.Μ. και **Γ**, ο τρίτος από το τέλος αριθμός του Α.Μ. σας. *Τα θέματα που λύνονται χωρίς την αντικατάσταση των Α,Β και Γ, ΜΗΔΕΝΙΖΟΝΤΑΙ.* **Θ1**[3.5:0.5x7]. Έστω ερμητιανός τελεστής $\widehat{W} = |w|(2\cdot|1><1| + |2><2|)$. Γνωρίζουμε για την Χαμιλτονιανή ότι, $\widehat{H}|1> = (A+1)\varepsilon(|1> + |2>)$, $\widehat{H}|2> = (A+1)\varepsilon(|2> + |1>)$. Να βρεθούν **(α1)** οι ιδιοτιμές και **(α2)** οι ιδιοσυναρτήσεις του $\widehat{H}$. Αν την χρονική στιγμή *t*=0, μετρώ το φυσικό μέγεθος που σχετίζεται με τον $\widehat{W}$ και βρίσκω τιμή $|w|$. Να βρεθεί η $\Psi(x,t)$ ως συνάρτηση, **(β1)** των $|\pm\rangle = \frac{|1\rangle\pm|2\rangle}{\sqrt{2}}$ και **(β2)** των $|1\rangle, |2\rangle$. Να βρεθούν **(γ)** η πιθανότητα να βρω σε μία μέτρηση $2|w|$, **(δ)** η μέση τιμή του τελεστή $\langle\widehat{W}\rangle(t)$ και **(ε)** ο τελεστής που χρειάζεται για τον υπολογισμό του ρυθμός μεταβολής του, υπό μορφή πίνακα.

(α1) $E_+ = 2(A+1)\varepsilon$ & $E_- = 0$ με (α2) $|+\rangle = (|1\rangle + |2\rangle)/\sqrt{2}$ & $|-\rangle = (|1\rangle - |2\rangle)/\sqrt{2}$.
Αφού μετρώ $+|w|$, $|\Psi(x,0)\rangle = |2\rangle$ οπότε $c_+ = \langle +|2\rangle = 1/\sqrt{2}$ & $c_- = \langle -|2\rangle = -1/2$. Οπότε

(β1) $|\Psi(x,t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle e^{-2(A+1)\varepsilon t/\hbar}$ ~~$\frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle$~~ $\sim \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle e^{-i(A+1)\varepsilon t/\hbar} - \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle e^{i(A+1)\varepsilon t/\hbar}$ $(\tilde{\varepsilon} \equiv (A+1)\varepsilon/\hbar)$

(β2) Άρα $|\Psi(x,t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{|1\rangle+|2\rangle}{\sqrt{2}}\right)e^{-i\tilde{\varepsilon}t} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{|1\rangle-|2\rangle}{\sqrt{2}}\right)e^{i\tilde{\varepsilon}t} = |1\rangle\left(\frac{e^{-i\tilde{\varepsilon}t} - e^{i\tilde{\varepsilon}t}}{2}\right) + |2\rangle\left(\frac{e^{-i\tilde{\varepsilon}t} + e^{i\tilde{\varepsilon}t}}{2}\right) = -i\sin\tilde{\varepsilon}t\,|1\rangle + \cos\tilde{\varepsilon}t\,|2\rangle$

(γ) $P_{2|w|} = |\langle 1|\Psi(x,t)\rangle|^2 = |-i\sin\tilde{\varepsilon}t|^2 = \sin^2\tilde{\varepsilon}t = \sin^2((A+1)\varepsilon t/\hbar)$.

2ος τρόπος με $\langle\hat{W}\rangle(t) = |c_+|^2 w_+ + \ldots\ldots$

(δ) 1ος τρόπος με $\langle\hat{W}\rangle(t) = \langle\Psi(x,t)|\hat{W}|\Psi(x,t)\rangle = \ldots$,

3ος (και ευκολότερος) τρόπος $\langle\hat{W}\rangle(t) = P_{2|w|}(t)(+2|w|) + P_{|w|}(+|w|) = 2|w|\sin^2\tilde{\varepsilon}t + |w|\cos^2\tilde{\varepsilon}t = |w|(1+\sin^2\tilde{\varepsilon}t)$.

(ε) Χρειαζόμαστε τον $[\hat{W},\hat{H}] = |w|(A+1)\varepsilon\left(\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}\right) = |w|\varepsilon(A+1)\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix} =$

$= |w|\varepsilon(A+1)(|1\rangle\langle 2| - |2\rangle\langle 1|)$

.....

Επιβεβαίωση (δεν χρειάζεται να το κάνετε) ορθότητας αποτελέσματος (ε).

$\langle[\hat{W},\hat{H}]\rangle = (i\sin\tilde{\varepsilon}t\langle 1| + \cos\tilde{\varepsilon}\langle 2|)[|w|\varepsilon(A+1)(|1\rangle\langle 2| - |2\rangle\langle 1|)](-i\sin\tilde{\varepsilon}t|1\rangle + \cos\tilde{\varepsilon}t|2\rangle) =$

προσοχή! ⊕ $= 2i\sin\tilde{\varepsilon}t\cos\tilde{\varepsilon}t\,|w|\varepsilon(A+1)$

οπότε $\frac{d\langle\hat{W}\rangle(t)}{dt} = \frac{\langle[\hat{W},\hat{H}]\rangle}{i\hbar} = \frac{2|w|(A+1)\varepsilon}{\hbar}\sin\tilde{\varepsilon}t\cos\tilde{\varepsilon}t$, που επιβεβαιώνεται παραγωγίζοντας το αποτέλεσμα του ερωτήματος (δ).

Θ2[1.5:0.5x3]. Έστω η Χαμιλτονιανή έχει ιδιοτιμές $(B+1)\varepsilon$ και $-(B+1)\varepsilon$ με ιδιοσυναρτήσεις τις $|1\rangle$, $|2\rangle$. Θεωρούμε ερμητιανό τελεστής της μορφής $\widehat{W} = |w|(|1><1| + |2><2| + |1><2| + |2><1|)$, **(α)** να βρεθούν οι δυνατές τιμές του φυσικού μεγέθους που σχετίζεται με τον τελεστή. Αν την χρονική στιγμή *t*=0, γνωρίζουμε ότι $|\Psi(x,t=0)\rangle = (|1\rangle + |2\rangle)/\sqrt{2}$, να βρεθούν **(β)** η $|\Psi(x,t)\rangle$ και **(γ)** η χρονοεξαρτημένη πιθανότητα να μετρήσω την μεγαλύτερη ιδιοτιμή του $\widehat{W}$.

(α) Ο $\hat{W}$ έχει "ίδια" μορφή με τον $\hat{H}$ του Θ1, άρα ιδιοτιμές η $2|w|$ & 0. Οι ιδιοσυναρτ. επίσης θα είναι προφανώς η $|+\rangle$ (ή $|2|w|\rangle$) $= (|1\rangle+|2\rangle)/\sqrt{2}$ και η $|-\rangle$ (ή $|0\rangle$) $= (|1\rangle-|2\rangle)/\sqrt{2}$.

(β) Αφού $|\Psi(x,t)\rangle = c_1|1\rangle e^{-i(B+1)\varepsilon t/\hbar} + c_2|2\rangle e^{i(B+1)\varepsilon t/\hbar}$ με $c_1 = \langle 1|\Psi(x,0)\rangle = \langle 1|\left(\frac{|1\rangle+|2\rangle}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ και $c_2 = \langle 2|\Psi(x,0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$, έχουμε $|\Psi(x,t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle e^{-i(B+1)\varepsilon t/\hbar} + \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle e^{i(B+1)\varepsilon t/\hbar}$.

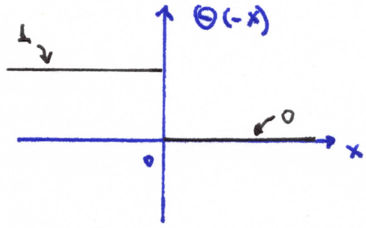
(γ) $P_{2|w|} = |\langle 2|w||\Psi(x,t)\rangle|^2 = \left|\left(\frac{\langle 1| + \langle 2|}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle e^{-i\tilde{\varepsilon}t} + \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle e^{i\tilde{\varepsilon}t}\right)\right|^2 = \left|\frac{1}{2}e^{-i\tilde{\varepsilon}} + \frac{1}{2}e^{i\tilde{\varepsilon}}\right|^2 = \cos^2\tilde{\varepsilon}t$.

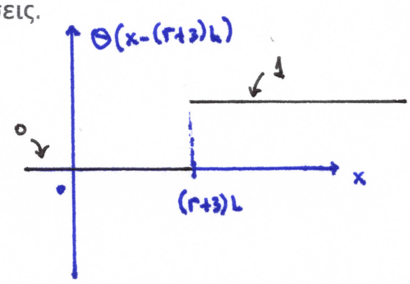
$\tilde{\varepsilon} = \frac{(B+1)\varepsilon}{\hbar}$

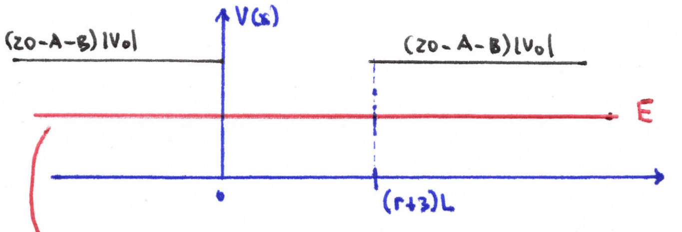
(α) $\Theta(-x) = \begin{cases} 1 & -x>0 \rightarrow x<0 \\ 0 & -x<0 \rightarrow x>0 \end{cases}$ $\Theta(x-(\Gamma+3)L) = \begin{cases} 1 & x-(\Gamma+3)L>0 \rightarrow x>(\Gamma+3)L \\ 0 & x-(\Gamma+3)L<0 \rightarrow x<(\Gamma+3)L \end{cases}$

προσοχή $(A+B)_{max} = 18$ άρα $20-A-B>0$ πάντα.

Θ3[2:1+1]. **(α)** Ζωγραφίστε το δυναμικό $V(x) = (20-A-B)|V_0|(\Theta(-x)+\Theta(x-(\Gamma+3)L))$, και **(β)** βρείτε για ποιες τιμές της ενέργειας έχουμε δέσμιες καταστάσεις.







(β) Δέσμιες για $0<E<(20-A-B)|V_0|$

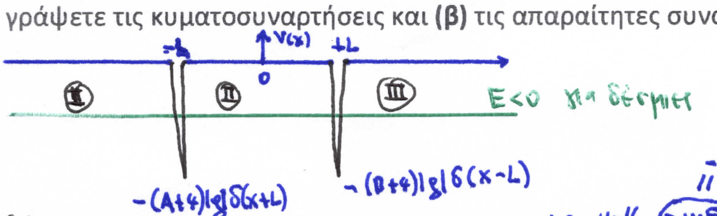
Θ4[1]. Θεωρούμε συμμετρικό τετραγωνικό πηγάδι δυναμικού, με πάχος $2nm$ και βάθος $(B+11)^2\ eV$. Να ελέγξετε αν υπάρχει η 1η διεγερμένη ενεργειακή κατάσταση. Πάχος $2L = 2nm \rightarrow L = 1nm = 10^{-9}\ m$.

Χρειαζόμαστε το $\lambda = L\sqrt{U_0} = L\sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}} = 10^{-9}\frac{\sqrt{2\cdot 9\cdot 10^{-31}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}(B+11)^2}}{10^{-34}} = \frac{\sqrt{30}\cdot 10^{-24}}{10^{-24}}(B+11) = \sqrt{30}(B+11)$

Για να έχουμε την 1η διεγερμένη, πρέπει το $\frac{\pi}{2\lambda}$ $(n=1)$ να είναι μικρότερο του 1, το οποίο και ισχύει καθώς $\frac{\pi}{2\lambda} = \frac{\pi}{2\cdot\sqrt{30}(B+11)}$. Άρα "πάντα" υπάρχει.

$B_{min} = 0$

Θ5[1:0.5x2]. Θεωρούμε δυναμικό $V(x) = -(A+4)|g|\cdot\delta(x+L)-(B+4)|g|\cdot\delta(x-L)$. Για δέσμιες καταστάσεις, **(α)** να γράψετε τις κυματοσυναρτήσεις και **(β)** τις απαραίτητες συνοριακές συνθήκες για την <u>παράγωγο</u> των κυματοσυναρτήσεων.



(α) εξ. Schrödinger στις τρεις περιοχές $\psi'' + \underbrace{\frac{2mE}{\hbar^2}}_{-\gamma^2}\psi = 0$

Άρα $\psi_I = Ae^{\gamma x}$

$\psi_{II} = B_+e^{\gamma x} + B_-e^{-\gamma x}$

$\psi_{III} = Ce^{-\gamma x}$

(β) $-\frac{\hbar^2}{2m}\int(\psi'')dx - \int|c|\delta(x)\psi(x)dx = \int E\psi dx$, $\varepsilon\rightarrow 0$

$-\frac{\hbar^2}{2m}[\psi'(x_0^+)-\psi'(x_0^-)] - |c|\psi(x_0) = 0$

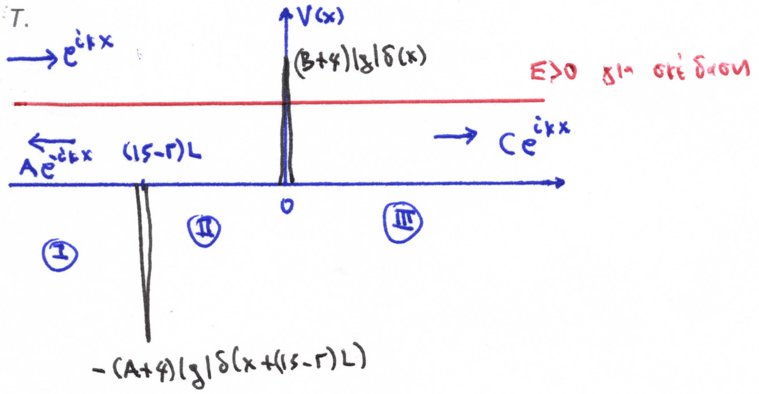
Σ.Σ. $x=-L$

$\gamma(B_+e^{-\gamma L} - B_-e^{\gamma L}) - \gamma Ae^{-\gamma L} = \frac{-2m(A+4)|g|}{\hbar^2}Ae^{-\gamma L}$

Σ.Σ. $x=+L$

$-\gamma Ce^{-\gamma L} - \gamma(B_+e^{\gamma L} - B_-e^{-\gamma L}) = \frac{-2m(B+4)|g|}{\hbar^2}Ce^{-\gamma L}$

Θ6[1]. Θεωρούμε δυναμικό $V(x) = -(A+4)|g|\cdot\delta(x+(15-\Gamma)\cdot L)+(B+4)|g|\cdot\delta(x)$. Για καταστάσεις σκέδασης $(-\infty\rightarrow +\infty)$, να γράψετε τις κυματοσυναρτήσεις και να δείξετε ποιους συντελεστές χρειαζόμαστε για τον υπολογισμό του R και T.



$\psi_I = \underbrace{e^{ikx}}_{\text{προσπίπτον}} + \underbrace{Ae^{-ikx}}_{\text{ανακλώμενο}}$

$\psi_{II} = B_+e^{ikx} + B_-e^{-ikx}$

$\psi_{III} = Ce^{ikx}$ (διερχόμενο)

Για το $R = |A|^2$ χρειάζομαι το A και για το $T = |C|^2$ χρειάζομαι το C.

Ίδια εξίσωση Schrödinger και στις τρεις περιοχές

$\psi'' + \underbrace{\frac{2mE}{\hbar^2}}_{k^2}\psi = 0$