1η πρόοδος «Κβαντικής Φυσικής Ι» ακ. έτους 2023-2024. Πάτρα, 6/11/2023, διδ. Ανδρέας Φ. Τερζής. **Εξατομικευμένα** θέματα, θα χρειαστούν, **Α,** ο τελευταίος αριθμός του Α.Μ. σας, **Β**, ο προτελευταίος αριθμός του Α.Μ. και **Γ**, ο προπροτελευταίος αριθμός του Α.Μ.

Θ1[3:0.5x6]. **Θ1.** Θεωρούμε την κυματοσυνάρτηση $N\cdot(x-(\Gamma+1)x_0)e^{-\lambda\cdot(x-(\Gamma+1)\cdot x_0)^2/2}\cdot e^{i\cdot(B+1)\cdot p_0\cdot x/\hbar}$.

Για την περίπτωση πού $x_0=0$ και $p_0=0$ να βρεθεί (**α1**) το N , (**α2**) η αβεβαιότητα της ορμής Δp.

(α1) $N^2\int x^2e^{-\lambda x^2}dx = N^2\frac{1}{(2\lambda)^1}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}=1 \longrightarrow N=\left(\frac{4\lambda^3}{\pi}\right)^{1/4}$

(α2) Πραγματική $\psi(x)$ άρα $\langle p\rangle=0$

$\langle p^2\rangle=\frac{3\hbar^2\lambda}{2}$ (περσινή πρόοδος Θ1) $\rightarrow$ $\Delta p=\hbar\sqrt{\frac{3\lambda}{2}}$

Για την περίπτωση πού $x_0\neq 0$ και $p_0=0$ να βρεθεί (**β1**) η μέση θέση $\langle x\rangle$ και (**β2**) η μέση ορμή $\langle p\rangle$.

(β1) Συμμετρική κατανομή γύρω από το $(\Gamma+1)x_0$. Άρα $\langle x\rangle=(\Gamma+1)x_0$.

(β2) Πραγματική $\psi(x)$, άρα $\langle p\rangle=0$

Για την περίπτωση πού $x_0=0$ και $p_0\neq 0$ να βρεθεί (**γ1**) το N, και (**γ2**) η μέση ορμή $\langle p\rangle$.

(γ1) Καθώς $\psi^*\psi=x^2e^{-\lambda x^2}\underbrace{\left(e^{-i(B+1)p_0x/\hbar}\right)\left(e^{i(B+1)p_0x/\hbar}\right)}_{e^0=1}$ ίδια με (α1), άρα $N=\left(\frac{4\lambda^3}{\pi}\right)^{1/4}$

(γ2) $\langle p\rangle=\int\psi^*\left(-i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{4\lambda^3}{\pi}\right)^{1/4}xe^{-\lambda x^2/2}e^{-i(B+1)p_0x/\hbar}(-i\hbar)\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{4\lambda^3}{\pi}\right)^{1/4}xe^{-\lambda x^2/2}e^{+i(B+1)p_0x/\hbar}\right]dx=$

$=\left(\frac{4\lambda^3}{\pi}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,xe^{-\lambda x^2/2}e^{-i(B+1)p_0x/\hbar}(-i\hbar)\left[1-\lambda x^2+\frac{i(B+1)p_0}{\hbar}x\right]e^{-\lambda x^2/2}e^{i(B+1)p_0x/\hbar}=$

$=\left(\frac{4\lambda^3}{\pi}\right)^{1/2}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}dx(-i\hbar)(x-\lambda x^3)e^{-\lambda x^2}}_{\to 0}+\left(\frac{4\lambda^3}{\pi}\right)^{1/2}(-i\hbar)\frac{i(B+1)p_0}{\hbar}\underbrace{\int x^2e^{-\lambda x^2}dx}_{=\left(\frac{\pi}{4\lambda^3}\right)}=(B+1)p_0.$

ως περιττή συνάρτηση

Θ2[2:1+1]. **(α)** Να αποδείξετε, χρησιμοποιώντας τον συζυγή τελεστή, ότι ο τελεστής $\widehat{W}=(A+1)y\cdot p_y\cdot y-(B+2)x\cdot p_y\cdot x$ είναι ερμιτιανός. **(β)** Να βρεθεί το ελάχιστο γινόμενο των αβεβαιοτήτων του $\widehat{W}$ με την y συνιστώσα της ορμής (p_y).

(α) $\hat{W}^+=[(A+1)yp_yy-(B+2)xp_yx]^+=(A+1)(y(p_yy))^+-(B+2)(x(p_yx))^+=(A+1)(p_yy)^+y^+-(B+2)(p_yx)^+x^+=$

$=(A+1)y^+p_y^+y-(B+2)x^+p_y^+x^+=(A+1)yp_yy-(B+2)xp_yx=\hat{W}$

(β) Χρειαζόμαστε τον μετάθετη $[\hat{W},\hat{p}_y]$, οπότε τους $[xp_yx,p_y]=x\underbrace{[p_y,p_y]}_{\to 0}x=0$ και τον

$[yp_yy,p_y]=[(yp_y)y,p_y]=yp_y[y,p_y]+[yp_y,p_y]y=yp_yi\hbar+y\underbrace{[p_y,p_y]}_{0}y+[y,p_y]p_yy=i\hbar yp_y+i\hbar p_yy$

Άρα $[(\Delta\hat{W})(\Delta p_y)]_{min}=\frac{1}{2}|\langle i\hbar yp_y+i\hbar p_yy\rangle|=\frac{\hbar}{2}|\langle yp_y+p_yy\rangle|.$

Θ4[2:0.5x4]. Η κβαντική κατάσταση σωματιδίου μάζας m, σε ΑΠΔ μήκους L, περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση,

$\Psi(? \leq x \leq ?, t=0) = (A+B+1)|N|\sqrt{\frac{2}{L}}\left(\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right)$, να βρεθούν **(α)** η $\langle E\rangle$, **(β)** η $\Psi(x,t)$, **(γ)** η μέση αρτιότητα και **(δ)** ο ρυθμός μεταβολής της. Προφανώς, έχουμε συμμετρικό Α.Π.Δ. δηλαδή $-L/2 \leq x \leq L/2$.

$\psi_1 = \sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ (άρτια) & $\psi_2 = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$. Η $\psi(x,0) = (A+B+1)|N|(\psi_1+\psi_2) = \tilde{N}(\psi_1+\psi_2)$ $(\tilde{N} = |N|(A+B+1))$

Από κανονικοποίηση $|\tilde{N}|^2 + |\tilde{N}|^2 = 2|\tilde{N}|^2 = 1 \rightarrow |\tilde{N}| = 1/\sqrt{2}$.

(α) Άρα $\langle E\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 E_1 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 E_2 = \frac{E_1+E_2}{2}$

(β) $\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1 e^{-iE_1t/\hbar} + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2 e^{-iE_2t/\hbar}$

ψ_1: άρτια ψ_2: περιττή

(γ) Μέση αρτιότητα $\langle P\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2(+1) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2(-1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

Το ίδιο αποτέλεσμα θα βγεί και από τον 'ορισμό', δηλαδή $\langle P\rangle = (\psi, \hat{P}\psi) =$

$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)e^{-iE_1t/\hbar} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)e^{-iE_2t/\hbar}, \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left(\frac{\pi(-x)}{L}\right)e^{-iE_1t/\hbar} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{2\pi(-x)}{L}\right)e^{-iE_2t/\hbar}\right) = \ldots = 0$

(δ) Λόγω του συμμετρικού δυναμικού έχουμε $[\hat{P}, \hat{H}] = 0$, άρα $\frac{d\langle P\rangle(t)}{dt} = 0$.

Θ5[3:1x3]. Α.Π.Δ. σε υπέρθεση δυο καταστάσεων με μέση ενέργεια $\left(\frac{A+1}{A+\Gamma+3}\right)\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2} + 4\left(\frac{\Gamma+2}{A+\Gamma+3}\right)\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$ και $\langle p\rangle(0) = \frac{16\hbar}{3L}\left(\frac{\sqrt{(A+1)(\Gamma+2)}}{A+\Gamma+3}\right)$. Να βρεθούν **(α)** η $\Psi(x,t)$, **(β)** η $\langle p\rangle(t)$ και **(γ)** η $\langle x\rangle(0)$. Δίνεται $x_{21} = -\frac{16L}{9\pi^2}$ και $p_{21} = -\frac{8\hbar}{3L}\cdot i$ $\left(|p_{21}| = \frac{8\hbar}{3L}, \delta^p_{21} = \frac{-\pi}{2}\right)$

$\langle E\rangle = \left(\frac{A+1}{A+\Gamma+3}\right)\underbrace{\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}}_{E_1} + \left(\frac{\Gamma+2}{A+\Gamma+3}\right)\underbrace{\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}4}_{E_2} = \underbrace{\left(\frac{A+1}{A+\Gamma+3}\right)}_{|c_1|^2}E_1 + \underbrace{\left(\frac{\Gamma+2}{A+\Gamma+3}\right)}_{|c_2|^2}E_2 \rightarrow |c_1| = \sqrt{\frac{A+1}{A+\Gamma+3}}$ & $|c_2| = \sqrt{\frac{\Gamma+2}{A+\Gamma+3}}$

Επίσης $\langle p\rangle(0) = 2|c_1||c_2||x_{21}|\cos(\varphi_{12} + \delta^p_{21}) = 2\cdot\sqrt{\frac{A+1}{A+\Gamma+3}}\sqrt{\frac{\Gamma+2}{A+\Gamma+3}}\left(\frac{8\hbar}{3L}\right)\cos\left(\varphi_{12} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{16\hbar}{3L}\left(\frac{\sqrt{(A+1)(B+2)}}{(A+\Gamma+3)}\right)$

$\rightarrow \cos\left(\varphi_{12} - \frac{\pi}{2}\right) = 1 \rightarrow \varphi_{12} - \frac{\pi}{2} = 0 \rightarrow \varphi_{12} = \frac{\pi}{2}$.

(α) Άρα $\Psi(x,t) = |c_1|e^{i\varphi_{12}}\psi_1 e^{-iE_1t/\hbar} + |c_2|\psi_2 e^{-iE_2t/\hbar} = \frac{\overbrace{e^{i\pi/2}}^{=i}\sqrt{A+1}}{\sqrt{A+\Gamma+3}}\psi_1 e^{-iE_1t/\hbar} + \frac{\sqrt{\Gamma+2}}{\sqrt{A+\Gamma+3}}\psi_2 e^{-iE_2t/\hbar}$.

(β) $\langle p\rangle(t) = 2|c_1||c_2|\frac{8\hbar}{3L}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{16\hbar}{3L}\frac{\sqrt{(A+1)(\Gamma+2)}}{(A+B+3)}\cos(\omega t)$

(γ) $\langle x\rangle(t) = \frac{L}{2} + 2|c_1||c_2||x_{21}|\cos(\omega t + \varphi_{12} + \delta^x_{21}) \underset{\delta^x_{21}=\pi}{\overset{|x_{21}| = \frac{16L}{9\pi^2}}{=}} \frac{L}{2} + \frac{32L}{9\pi^2}\frac{\sqrt{(A+1)(\Gamma+2)}}{(A+\Gamma+3)}\underbrace{\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} + \pi\right)}_{\sin\omega t}$