3η πρόοδος «Κβαντικής Φυσικής Ι» ακαδημαϊκού έτους 2022-2023 (16/1/2023), διδ. Ανδρέας Φ. Τερζής

Προσεγγιστικές τιμές φυσικών σταθερών, $\hbar \sim 10^{-34} J\cdot s$, $e \sim 1.5\times 10^{-19} C$ και $m \sim 10^{-30} kg$

Θ1. Κβαντικός αρμονικός ταλαντωτής βρίσκεται στην κατάσταση, $|\psi(x,t=0)>=|c_0|(A-11)\,|0>+|c_1||1>$. Να βρεθούν **(α)** το $x_{10}=(\psi_1,\hat{x}\psi_0)$ με τον υπολογισμό του ολοκληρώματος και **(β)** το p_{10} με την αλγεβρική μέθοδο. Δίνεται ότι, $\psi_0=\pi^{\left(-\frac{1}{4}\right)}\, e^{-x^2/2}$ και $\psi_1=\sqrt{2}\,\pi^{\left(-\frac{1}{4}\right)}\, x\, e^{-x^2/2}$. Αν γνωρίζουμε ότι η μέση ενέργεια είναι 3/4, να βρεθεί **(γ)** η κυματοσυνάρτηση την τυχαία χρονική στιγμή, t, **(δ)** η μέση χρονοεξαρτώμενη θέση και **(ε)** η μέση χρονοεξαρτώμενη ορμή.

(στ) Αν η μέση ενέργεια είναι $\frac{3}{4}\, eV$, να βρεθεί η κυκλική συχνότητα του ταλαντωτή σε *rad/s*.

(α) $x_{10}=(\psi_1,\hat{x}\psi_0)=\int\psi_1 x\psi_0 dx=\pi^{-1/4}\sqrt{2}\pi^{-1/4}\int x^2e^{-x^2}dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, και $|x_{10}|=1/\sqrt{2}$ & $\delta^x_{10}=0$

(β) $p_{10}=\langle 1|\hat{p}|0\rangle=\langle \cancel{1}|\left(\frac{\hat{a}-\hat{a}^+}{\sqrt{2}i}\right)|0\rangle=\langle 1|\left(\frac{\hat{a}|0\rangle-\hat{a}^+|0\rangle}{\sqrt{2}i}\right)=\frac{-\langle 1|1\rangle}{\sqrt{2}i}=\frac{i}{\sqrt{2}}$, και $|p_{10}|=\frac{1}{\sqrt{2}}$ & $\delta^p_{10}=\frac{\pi}{2}$.

(γ) $\langle E\rangle=|\tilde{c}_0|^2\frac{1}{2}+|c_1|^2\frac{3}{2}=\frac{3}{4}\rightarrow|\tilde{c}_0|^2+3|c_1|^2=\frac{3}{2}$ & $|\tilde{c}_0|^2+|c_1|^2=1\longrightarrow|c_1|=\frac{1}{2}$ & $|\tilde{c}_0|=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

όπου θέσαμε $\tilde{c}_0=(A-11)|c_0|$ με μέτρο $|\tilde{c}_0|$ και φάση $\varphi_{01}=\pi$, αφού $A-11<0\rightarrow\tilde{c}_0<0$.

άρα $|\psi(x,t)\rangle=\frac{e^{i\varphi_{01}}\sqrt{3}}{2}e^{-it/2}|0\rangle+\frac{1}{2}e^{-3it/2}|1\rangle=\frac{-\sqrt{3}e^{-it/2}|0\rangle+e^{-3it/2}|1\rangle}{2}$.

(δ) $\langle x\rangle(t)=x_{00}|\tilde{c}_0|^2+x_{11}|c_1|^2+2|\tilde{c}_0||c_1||x_{10}|\cos(\omega t+\varphi_{01}+\delta^x_{10})=2\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t+\pi+0)=-\sqrt{\frac{3}{8}}\cos t$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $\omega=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1$. & $x_{00}=x_{11}=0$ μέση θέση για $|0\rangle$ & $|1\rangle$.

(ε) $\langle p\rangle(t)=p_{00}|\tilde{c}_0|^2+p_{11}|c_1|^2+2|\tilde{c}_0||c_1||p_{10}|\cos(\omega t+\varphi_{01}+\delta^p_{10})=2\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t+\pi+\frac{\pi}{2})=+\sqrt{\frac{3}{8}}\sin t$.

αφού $p_{00}=p_{11}=0$ (γιατί?)

(στ) $\langle E\rangle=3/4$ στο φυσικό σύστημα μονάδων, άρα $\langle E\rangle=\frac{3}{4}\hbar\omega=\frac{3}{4}eV$, άρα $\hbar\omega=1eV\rightarrow$

$\rightarrow\omega=\frac{1eV}{10^{-34}J\cdot s}=\frac{1{,}5\cdot 10^{-19}J}{10^{-34}J\cdot s}=1{,}5\cdot 10^{15}$ rad/s.

Θ2. Για ηλεκτρόνιο μάζας m εγκλωβισμένο σε τετραγωνική κβαντική τελεία πλευράς L, να βρεθεί **(α)** η **κυματοσυνάρτηση** της 2ης **διεγερμένης** ενεργειακής κατάστασης, **(β)** η **ενέργεια** της 1ης **εκφυλισμένης** κατάστασης.

$E_{n_xn_y}=\underbrace{\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}}_{E_0}(n_x^2+n_y^2)$ Φτιάχνω πίνακα

n_x	n_y	$\frac{E}{E_0}=n_x^2+n_y^2$	
1	1	2	
1	2	5	1η διεγερμένη & 1η εκφυλισμένη
2	1	5	
2	2	8	← 2η διεγερμένη

(α) $\Psi_{22}=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{2\pi y}{L}\right)\Theta(x)\Theta(L-x)\Theta(y)\Theta(L-y)=\frac{2}{L}\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi y}{L}\right)\Theta(x)\Theta(y)\Theta(L-x)\Theta(L-y)$.

(β) $E_{12}=E_{21}=\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\cdot(1^2+2^2)=\frac{5\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$

Θ3. Ηλεκτρόνιο που κινείται πάνω στην επιφάνεια σφαίρας, βρίσκεται στην κατάσταση, $|N|\sqrt{(A+11)}[\, i\cdot|10> - |11>]$. Να υπολογιστούν **(α)** η αβεβαιότητα της *x*- συνιστώσας της στροφορμής και **(β)** η μέση ενέργεια σε *eV* (να φαίνονται οι πράξεις). Ακτίνα σφαίρας 1*nm*.

$|\tilde N| = |N|\sqrt{A+11} \rightarrow |\psi\rangle = |\tilde N|\, i|10\rangle - |\tilde N||11\rangle$ άρα $\langle\psi|\psi\rangle = 2|\tilde N|^2 = 1 \rightarrow |\tilde N| = \frac{1}{\sqrt2}$

$|\psi\rangle = \frac{i|10\rangle - |11\rangle}{\sqrt2}$ (α) $\langle \hat l_x\rangle = \frac{(-i\langle 10| - \langle 11|)}{\sqrt2}\left(\frac{\hat l_+ + \hat l_-}{2}\right)\frac{(i|10\rangle - |11\rangle)}{\sqrt2} = \frac{(-i\langle 10| - \langle 11|)(i\hat l_+|10\rangle + i\hat l_-|10\rangle - \hat l_-|11\rangle)}{\sqrt2\cdot 2\cdot\sqrt2} = \frac{(-i\langle 10| - \langle 11|)}{4}(i\sqrt2|11\rangle + i\sqrt2|1-1\rangle - \sqrt2|10\rangle) = (i\sqrt2\langle 10|10\rangle - i\sqrt2\langle 11|11\rangle)/4 = 0.$ Για τον υπολογισμό του $\langle l_x^2\rangle$, αυτώ το l_x στο

$\hat l_x = \left(\frac{\hat l_+ + \hat l_-}{2}\right)$ $= (i\sqrt2\hat l_-|11\rangle + i\sqrt2\hat l_+|1-1\rangle - \sqrt2\hat l_+|10\rangle - \sqrt2\hat l_-|10\rangle)/2 = (2i|10\rangle + 2i|10\rangle - 2|11\rangle - 2|1-1\rangle)/2$, οπότε

$\langle \hat l_x^2\rangle = (-i\langle 10| - \langle 11|)(2i|10\rangle - |11\rangle - |1-1\rangle)/4 = (2\langle 10|10\rangle + \langle 11|11\rangle)/4 = 3/4 \longrightarrow (\Delta l_x)^2 = \langle l_x^2\rangle - \langle l_x\rangle^2 = 3/4 \rightarrow \Delta l_x = \frac{\sqrt3}{2}$

(β) και οι δύο ιδιοκαταστάσεις έχουν $l=1$, άρα $\langle E\rangle = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2ma^2}$ ″ $\hbar^2/ma^2$ από $\langle E\rangle = \frac{\langle l^2\rangle}{2I}$ ← ροπή αδράνειας

$$\langle E\rangle = \frac{(10^{-34})^2\cdot 1\cdot(1+1)}{2\cdot 10^{-30}\cdot(10^{-9})^2}\left(\frac{J^2 s^2}{kg\cdot m^2}\right)_{=J} = \frac{10^{-68}}{10^{-48}} J = 10^{-20} J.$$ σε eV, διαιρώ με $1.5\cdot 10^{-19}$, άρα

$$\langle E\rangle = \frac{10^{-20}}{1{,}5\cdot 10^{-19}} = \frac{2\cdot 10^{-1}}{3} \sim 0{,}067\,eV$$

Θ4. Να υπολογισθούν **(α)** η μέση θέση και **(β)** μέση κινητική ενέργεια, στην θεμελιώδη κατάσταση του ατόμου του υδρογόνου ($\psi_{100}(\vec r) = |N|e^{-r}$). Χρήσιμο ολοκλήρωμα, $\int_0^\infty dr\, r^n\, e^{-\lambda\cdot r} = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}$. $\int \psi_{100}^* \psi_{100} r^2 dr\, d\Omega = 1 \rightarrow |N|^2\int e^{-2r} r^2 dr\, 4\pi = 1$

$\longrightarrow |N|^2 \frac{2!}{2^3} 4\pi = 1 \rightarrow |N|^2\pi = 1 \rightarrow |N|^2 = \pi^{-1} \rightarrow |N| = (\sqrt\pi)^{-1}$ άρα $\psi_{100} = e^{-r}/\sqrt\pi$.

(α) $\langle r\rangle = \int \psi_{100}^* r\, \psi_{100} r^2 dr\, 4\pi = \frac{4\pi}{\pi}\int e^{-2r} r^3 dr = 4\,\frac{3!}{2^4} = \frac{3}{2}.$

(β) $\langle T\rangle = \langle E\rangle - \langle V\rangle = -\frac{1}{2} - \langle V\rangle$. Τώρα $\langle V\rangle = (\psi_{100}, -\frac{1}{r}\psi_{100}) = -|N|^2\int e^{-2r}\frac{r^2}{r}dr\,4\pi = -\frac{1}{\pi}\,\frac{1!}{2^2}\,4\pi = -1$

↑ ενέργεια θεμελιώδους ψ_{100}

άρα $\langle T\rangle = -\frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2}.$

Θ5. Θεωρούμε ότι η κυματοσυνάρτηση του ατόμου υδρογόνου, είναι $\Psi(\vec r, t=0) = |N|\big[i\cdot\sqrt{(A+B+1)}\psi_{100}(\vec r) + \psi_{210}(\vec r) + \psi_{211}(\vec r)\,\big]$. Να υπολογίστε **(α)** την $\Psi(\vec r, t)$, **(β)** την μέση ενέργεια, **(γ)** την $\langle l_x^2 + l_y^2\rangle(t)$ και **(δ)** την $\langle l_x\,\rangle(t)$ την τυχαία χρονική στιγμή *t*. κανονικοποίηση, $|N|^2(A+B+1+1+1) = 1 \rightarrow |N| = 1/\sqrt{A+B+3}$.

(α) $\Psi(\vec r, t) = i\sqrt{\frac{A+B+1}{A+B+3}}\,\psi_{100}\, e^{it/2} + \frac{1}{\sqrt{A+B+3}}(\psi_{210} + \psi_{211})\, e^{it/8}$, καθώς ψ_{100} έχει $E_1 = -\frac12$ & ψ_{210}, ψ_{211} $E_2 = -\frac{1}{2\cdot 2^2} = -\frac{1}{8}$.

(β) $\langle E\rangle = \left(\frac{A+B+1}{A+B+3}\right)\left(-\frac12\right) + \left(\frac{2}{A+B+3}\right)\left(-\frac18\right) = -\left(\frac{4(A+B+1)+2}{8(A+B+3)}\right) = \frac{-(2A+2B+3)}{4(A+B+3)}$

(γ) $\langle l_x^2 + l_y^2\rangle = \langle l^2\rangle - \langle l_z^2\rangle = \left[\left(\frac{A+B+1}{A+B+3}\right)0\cdot(0+1) + \frac{2}{A+B+3}1(1+1)\right] - \left[\left(\frac{A+B+1}{A+B+3}\right)0^2 + \frac{1}{(A+B+3)}0^2 + \frac{1}{(A+B+3)}1^2\right] =$

$= \frac{4}{A+B+3} - \frac{1}{A+B+3} = \frac{3}{A+B+3}$

(δ) Ο $\hat l_x = \frac{\hat l_+ + \hat l_-}{2}$ στο ψ_{100} δίνει πάντα μηδέν. Για τις $\psi_{210} + \psi_{211}$ έχουμε ίδια χρονοεξάρτηση $e^{it/8}$, οπότε δεν χρειάζεται να την λάβουμε υπόψη μας.

$\langle \hat l_x\rangle = \frac{(\langle 210| + \langle 211|)}{\sqrt{A+B+3}}\left(\frac{\hat l_+ + \hat l_-}{2}\right)\frac{(|210\rangle + |211\rangle)}{\sqrt{A+B+3}} = (\langle 210| + \langle 211|)(\hat l_+|210\rangle + \hat l_-|210\rangle + \hat l_-|211\rangle)/(2(A+B+3)) =$

$= (\langle 210| + \langle 211|)(\sqrt2|211\rangle + \sqrt2|21-1\rangle + \sqrt2|210\rangle)/2(A+B+3) = (\sqrt2\langle 210|210\rangle + \sqrt2\langle 211|211\rangle)/(2(A+B+3)) = \frac{\sqrt2}{(A+B+3)}$