ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: **Α.Μ.:**

2η πρόοδος «Κβαντικής Φυσικής Ι» ακ. έτους 2022-2023. Πάτρα, 5/12/2022, διδ. Ανδρέας Φ. Τερζής. **Εξατομικευμένα** θέματα, θα χρειαστούν, **Α,** ο τελευταίος αριθμός του Α.Μ. σας, **Β**, ο προτελευταίος αριθμός του Α.Μ. και **Γ**, ο τρίτος από το τέλος αριθμός του Α.Μ. σας

Θ1[1.5+1+0.5+1+1]. Έστω ερμητιανός τελεστής $\widehat{W} = |w|(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2|)$. Γνωρίζουμε για την Χαμιλτονιανή ότι, $\widehat{H}|1\rangle = (A+\Gamma+1)\varepsilon|1\rangle + \varepsilon|2\rangle$, $\widehat{H}|2\rangle = (A+\Gamma+1)\varepsilon|2\rangle + \varepsilon|1\rangle$. Να βρεθούν **(α)** οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις της ενέργειας. Αν την χρονική στιγμή *t*=0, μετρώ το φυσικό μέγεθος που σχετίζεται με τον *W* και βρίσκω μέση τιμή $7|w|/25$. Να αποδειχθεί ότι **(β)** η $\Psi(x,t) = \left(\frac{7}{5\sqrt{2}}\right)e^{-i\varepsilon t/\hbar}|+\rangle + \left(\frac{1}{5\sqrt{2}}\right)e^{i\varepsilon t/\hbar}|-\rangle$, όπου $|\pm\rangle = \frac{|1\rangle \pm |2\rangle}{\sqrt{2}}$. Να βρεθούν **(γ)** η πιθανότητα να βρω σε μία μέτρηση $|w|$, **(δ)** η μέση χρονοεξαρτώμενη τιμή του τελεστή *W* και **(ε)** ο ρυθμός μεταβολής του με την χρήση του μεταθέτη.

(α) Έστω $(A+\Gamma+1)=k$, $H = \begin{bmatrix} k\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & k\varepsilon \end{bmatrix}$ Η διαγωνοποίηση, δίνει $\lambda_- = (k-1)\varepsilon$ & $\lambda_+ = (k+1)\varepsilon$ με ιδιοσυναρτήσεις τις $|\pm\rangle = \frac{|1\rangle \pm |2\rangle}{\sqrt{2}}$.

Δίνεται $\langle W\rangle(t=0) = |c_{|w|}|^2 |w| + |c_{-|w|}|^2(-|w|) = \frac{7}{25}|w| \rightarrow |c_{|w|}|^2 - |c_{-|w|}|^2 = \frac{7}{25}$ & $|c_{|w|}|^2 + |c_{-|w|}|^2 = 1$

Άρα $|c_{|w|}|^2 = \frac{16}{25} \rightarrow |c_{|w|}| = \frac{4}{5}$ και $|c_{-|w|}| = \frac{3}{5}$. Οπότε η $|\psi(x,t=0)\rangle = \frac{4}{5}|1\rangle + \frac{3}{5}|2\rangle$.

(β) Έτσι $c_+ = \langle +|\psi(x,0)\rangle = \left(\frac{\langle 1| + \langle 2|}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{4|1\rangle + 3|2\rangle}{5}\right) = \frac{4\langle 1|1\rangle}{5\sqrt{2}} + \frac{3\langle 2|2\rangle}{5\sqrt{2}} = \frac{7}{5\cdot\sqrt{2}}$. Ανάλογα $c_- = \langle -|\psi(x,0)\rangle = \frac{1}{5\sqrt{2}}$.

Άρα $|\psi(x,t)\rangle = \frac{7}{5\sqrt{2}}e^{-i(k+1)\varepsilon t/\hbar}|+\rangle + \frac{1}{5\sqrt{2}}e^{-i(k-1)\varepsilon t/\hbar}|-\rangle \approx \frac{7}{5\sqrt{2}}e^{-i\varepsilon t/\hbar}|+\rangle + \frac{1}{5\sqrt{2}}e^{i\varepsilon t/\hbar}|-\rangle$ {ίσο μέχρι κοινό, πετάξαμε το $e^{-ik\varepsilon t/\hbar}$ }.

(γ) $P_{|w|} = |\langle 1|\psi(x,t)\rangle|^2 = \left|\langle 1|+\rangle\frac{7}{5\sqrt{2}}e^{-i\varepsilon t/\hbar} + \langle 1|-\rangle\frac{1}{5\sqrt{2}}e^{i\varepsilon t/\hbar}\right|^2 = \left|\frac{7}{5\cdot 2} + \frac{1}{5\cdot 2}e^{2i\varepsilon t/\hbar}\right|^2 =$

$= \left(\frac{7}{10} + \frac{1}{10}\cos\frac{2\varepsilon t}{\hbar}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\sin\frac{2\varepsilon t}{\hbar}\right)^2 = \frac{49}{100} + \frac{14}{100}\cos\frac{2\varepsilon t}{\hbar} + \frac{1}{100} = \frac{1}{2} + \frac{7}{50}\cos\left(\frac{2\varepsilon t}{\hbar}\right)$.

(δ) Α' τρόπος $\langle W\rangle(t) = P_{|w|}(t)|w| + P_{-|w|}(t)(-|w|) = \left(\frac{1}{2} + \frac{7}{50}\cos\left(\frac{2\varepsilon t}{\hbar}\right)\right)|w| + \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{50}\cos\left(\frac{2\varepsilon t}{\hbar}\right)\right)(-|w|) = \frac{7}{25}|w|\cos\left(\frac{2\varepsilon t}{\hbar}\right)$.

Β' τρόπος $\langle W\rangle(t) = |c_+|^2 W_{++} + |c_-|^2 W_{--} + 2|c_+||c_-||W_{-+}|\cos\left(\frac{2\varepsilon t}{\hbar} + \varphi_{+-} + \delta^{W}_{-+}\right) = 2\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}|w|\cos\left(\frac{2\varepsilon t}{\hbar} + 0 + 0\right)$.

αφού $W_{++} = \langle +|\hat{W}|+\rangle = 0$ & $W_{--} = \langle -|\hat{W}|-\rangle = 0$, ενώ $W_{-+} = \langle -|\hat{W}|+\rangle = |w|$.

(ε) Ο μεταθέτης $\hat{O} = [\hat{W}, \hat{H}] = (|w||1\rangle\langle 1| - |w||2\rangle\langle 2|)(k\varepsilon|1\rangle\langle 1| + k\varepsilon|2\rangle\langle 2| + \varepsilon|1\rangle\langle 2| + \varepsilon|2\rangle\langle 1|) -$

$-(k\varepsilon|1\rangle\langle 1| + k\varepsilon|2\rangle\langle 2| + \varepsilon|1\rangle\langle 2| + \varepsilon|2\rangle\langle 1|)(|w||1\rangle\langle 1| - |w||2\rangle\langle 2|) =$

$= 2k|w|\varepsilon(|1\rangle\langle 2| - |2\rangle\langle 1|)$

βγαίνει πιο ''γρήγορα'' με πίνακες $|w|\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\varepsilon\begin{bmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{bmatrix} - \varepsilon\begin{bmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{bmatrix}|w|\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = 2k\varepsilon|w|\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Τώρα $\langle\hat{O}\rangle = \langle\psi(x,t)|\hat{O}|\psi(x,t)\rangle = \left(\frac{7}{5\sqrt{2}}e^{i\varepsilon t/\hbar}\langle +| + \frac{1}{5\sqrt{2}}e^{-i\varepsilon t/\hbar}\langle -|\right)\left(2k\varepsilon|w|[|1\rangle\langle 2| - |2\rangle\langle 1|]\right)\left(\frac{7}{5\sqrt{2}}e^{-i\varepsilon t/\hbar}|+\rangle + \frac{1}{5\sqrt{2}}e^{i\varepsilon t/\hbar}|-\rangle\right) =$

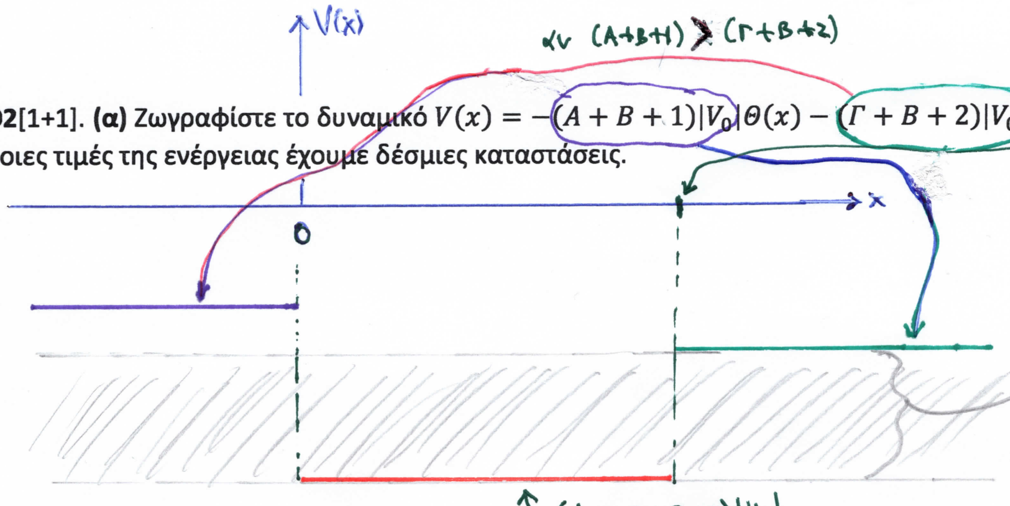
$= -2k\varepsilon|w|\frac{7}{25\cdot 2}e^{2i\varepsilon t/\hbar} + 2k\varepsilon|w|\frac{7}{25\cdot 2}e^{-2i\varepsilon t/\hbar} = \frac{-7\cdot 2}{25}k\varepsilon|w|i\sin\left(\frac{2\varepsilon t}{\hbar}\right) \rightarrow \frac{d\langle\hat{W}\rangle(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\langle\hat{O}\rangle = -\frac{14k\varepsilon|w|}{\hbar}\sin\left(\frac{2\varepsilon t}{\hbar}\right)$.

Επιπλέον, ερώτηση για εξέταση!

Αν δοκιμάσουμε την σχέση $\langle\hat{O}\rangle(t) = O_{++}|c_+|^2 + O_{--}|c_-|^2 + 2|c_+||c_-||O_{-+}|\cos\left(\frac{2\varepsilon t}{\hbar} + \varphi_{+-} + \delta^{O}_{-+}\right)$ βγάζει λάθος αποτέλεσμα (δοκιμάστε, το). Γιατί?

αν $(A+B+1) > (\Gamma+B+2)$

Θ2[1+1]. **(α)** Ζωγραφίστε το δυναμικό $V(x) = -(A+B+1)|V_0|\theta(x) - (\Gamma+B+2)|V_0|\theta((\Gamma+A+3)L - x)$, και **(β)** βρείτε για ποιες τιμές της ενέργειας έχουμε δέσμιες καταστάσεις.



ΔΕΣΜΙΕΣ $V_{min} < E < V(\pm\infty)$

άρα

$-(A+2B+\Gamma+3)|V_0| < E < -(A+B+1)|V_0|$

$(A+2B+\Gamma+3)|V_0|$

$L' =$ $\quad V_0' =$

Θ3[1]. Θεωρούμε συμμετρικό τετραγωνικό πηγάδι δυναμικού, με πάχος $(\Gamma+2)L/(B+2)$ και βάθος $(B+2)^2|V_0|/(\Gamma+2)^2$. Να βρεθεί ο αριθμός των δέσμιων καταστάσεων, αν $L\frac{\sqrt{2m|V_0|}}{\hbar} = 0.26$.

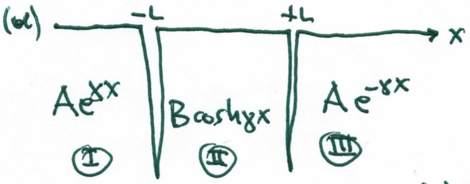
$$\lambda = L'\sqrt{\frac{2mV_0'}{\hbar^2}} = \left(\frac{\Gamma+2}{B+2}\right)L\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}\left(\frac{B+2}{\Gamma+2}\right)^2|V_0|} = L\sqrt{\frac{2m|V_0|}{\hbar^2}} = 0{,}26$$

Χρησιμοποιώ την εξίσωση $\cos\theta = \frac{\theta}{\lambda} + m\left(\frac{\pi}{2\lambda}\right)$

$\to \frac{\pi}{2\cdot 0{,}26} \sim 2\pi > 1$, άρα μόνο η λύση $m=0$ (θεμελιώδης).

Θ4[0.75+0.75+0.5]. Θεωρούμε συμμετρικό δυναμικό $V(x) = -g\delta(x+L) - g\delta(x-L)$. Για δέσμιες καταστάσεις και για άρτιες λύσεις, **(α)** να γράψετε την μορφή των κυματοσυναρτήσεων και **(β)** τις απαραίτητες συνοριακές συνθήκες. **(γ)** Να βρεθεί η συνθήκη (αλγεβρική εξίσωση) από την οποία υπολογίζονται οι τιμές της ενέργειας.

(α)



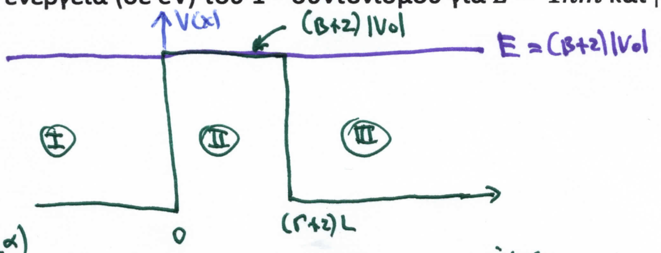
(β) Σ.Σ. $x=+L$ $\quad \psi_{II} = \psi_{III} \to B\cosh\gamma L = Ae^{-\gamma L}$ (1)

ασυνέχεια $\psi' \to -\gamma Ae^{-\gamma L} - B\gamma\sinh\gamma L = \frac{-2m|g|}{\hbar^2}Ae^{-\gamma L}$

$\to B\gamma\sinh\gamma L = \left(\frac{2mg}{\hbar^2} - \gamma\right)Ae^{-\gamma L}$ (2)

(γ) διαιρώ $\frac{(2)}{(1)} \to \boxed{\tanh\gamma L = \frac{2mg}{\gamma\hbar^2} - 1}$

Θ5[1]. Για καταστάσεις σκέδασης από $(-\infty \to \infty)$, ορθογώνιου φράγμα δυναμικού, πάχους $(\Gamma+2)L$ και βάθους $(B+2)|V_0|$, με $E = (B+2)|V_0|$, **(α)** να γράψετε την μορφή των κυματοσυναρτήσεων και **(β)** τις συνοριακές συνθήκες. **(γ)** Να βρεθεί η ενέργεια (σε eV) του 1ου συντονισμού για $L = 1nm$ και $|V_0| = 1eV$.



(α)

$\psi_I = e^{ikx} + Ae^{-ikx}$ & $\psi_{III} = Ce^{ikx}$ $\quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$.

προσπίπτον $\quad$ ανακλώμενο $\quad$ διερχόμενο

περιοχή II $\quad \psi'' = 0 \to \psi_{II} = Bx + B'$

(β) Σ.Σ $x=0$ $\quad 1 + A = B'$

$ik(1-A) = B$

$x = (\Gamma+2)L$ $\quad B\cdot(\Gamma+2)L + B' = Ce^{i(\Gamma+2)Lk}$

$B = ikCe^{i(\Gamma+2)Lk}$

(γ) 1ος συντονισμός για $n=1$ όπου είναι

$E = V_0 + \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}n^2$

Αφού $\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2} \sim 0{,}376\frac{1}{L^2}$ σε eV & L σε nm

$E = (B+2) + \frac{0{,}376}{(\Gamma+2)^2L^2}$ σε eV.

σε nm