1η πρόοδος «Κβαντικής Φυσικής Ι» ακ. έτους 2022-2023. Πάτρα, 6/11/2021, διδ. Ανδρέας Φ. Τερζής. **Εξατομικευμένα** θέματα, θα χρειαστούν, **Α,** ο τελευταίος αριθμός του Α.Μ. σας και **Β**, ο προτελευταίος αριθμός του Α.Μ.

Θ1[0.5+0.5+1]. Θεωρούμε την κυματοσυνάρτηση $(4\lambda^3/\pi)^{1/4}\cdot x\cdot e^{-\lambda\cdot x^2/2}$. Να βρεθούν, **(α)** η μέση θέση $\langle x\rangle$, **(β)** η αβεβαιότητα της ορμής Δp και **(γ)** το $V(x)$. (α) $\langle x\rangle = \left(\frac{4\lambda^3}{\pi}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-\lambda x^2}dx = 0$ (περιττή συνάρτηση). (β) $\langle p\rangle = 0$ (για πολλούς λόγους!!)

$\langle p^2\rangle = -\hbar^2\int\left(\frac{4\lambda^3}{\pi}\right)^{1/2} x e^{-\lambda x^2/2}\left(x e^{-\lambda x^2/2}\right)'' dx = \hbar^2\left(\frac{4\lambda^3}{\pi}\right)^{1/2} 3\lambda\int x^2 e^{-\lambda x^2}dx - \hbar^2\left(\frac{4\lambda^3}{\pi}\right)^{1/2}\lambda^2\int x^4 e^{-\lambda x^2}dx = \hbar^2\left(\frac{4\lambda^3}{\pi}\right)^{1/2}3\lambda\frac{1}{2\lambda}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} - \hbar^2\left(\frac{4\lambda^3}{\pi}\right)^{1/2}\lambda^2\frac{1\cdot 3}{(2\lambda)^2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} = \frac{3\hbar^2\lambda}{2}$

(γ) Από (β) $-\hbar^2\psi'' = \hbar^2\left(\frac{4\lambda^3}{\pi}\right)^{1/4}(3\lambda x - \lambda^2 x^3)e^{-\lambda x^2/2} = \hbar^2 3\lambda\psi - \hbar^2\lambda^2 x^2\psi$.

Όπου η εξίσωση Schrödinger δίνει $-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + V(x)\psi = E\psi \to \frac{\hbar^2}{2m}3\lambda\psi - \frac{\hbar^2}{2m}\lambda^2x^2\psi + V(x)\psi = E\psi \Longrightarrow V(x) = \frac{\hbar^2\lambda^2}{2m}x^2$

και $E = \frac{3\hbar^2\lambda}{2m}$ (αποτέλεσμα που χρησιμοποιούμε στην εκφώνηση της επόμενης άσκησης, Θ2).

Θ2[1.5]. Η χρονικά εξελιγμένη κυματοσυνάρτηση του Θ1, είναι $(4\lambda^3/\pi)^{1/4}\cdot x\cdot e^{-\lambda\cdot x^2/2}\cdot e^{-3i\cdot\lambda\cdot\hbar\cdot t/2m}$. Να βρεθούν, **(α)** η μέση parity για t=0, **(β)** ο ρυθμός μεταβολής της, **(γ)** Εξηγείστε με φυσικά επιχειρήματα τα αποτέλεσμα στα ερωτήματα (α), (β).

(α) $\langle P\rangle = \left(\frac{4\lambda^3}{\pi}\right)^{1/2}\int x e^{-\lambda x^2/2}\,\hat{P}\left(x e^{-\lambda x^2/2}\right)dx = \left(\frac{4\lambda^3}{\pi}\right)^{1/2}\int x e^{-\lambda x^2/2}(-x)e^{-\lambda(-x)^2/2}dx = -\left(\frac{4\lambda^3}{\pi}\right)^{1/2}\int x^2 e^{-\lambda x^2}dx = -\left(\frac{4\lambda^3}{\pi}\right)^{1/2}\frac{1}{2\lambda}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} = -1$.

(β) $\langle P\rangle(t) = \int\psi^*(x,t)\,\hat{P}\,\psi(x,t)dx = \langle P\rangle(t=0)$ καθώς το ψ^* έχει αντίθετο εκθέτη $(+3i\lambda\hbar t/(2m))$ $= -1$

(γ) Στο (α) $\langle P\rangle = -1$ μια και έχω περιττή κυματοσυνάρτηση (ιδιοτιμή περιττών το -1).

Στο (β) ο ρυθμός μεταβολής είναι μηδέν, καθώς $[\hat{P},\hat{H}]=0$ μια και το δυναμικό $V(x) = \frac{\hbar^2\lambda^2}{2m}x^2$ είναι συμμετρικό $\hat{P}V(x) = V(-x) = V(x)$.

Θ3[0.5+0.75]. Για τον τελεστή που ορίζεται από την σχέση, $\widehat{W}\cdot\psi = (\psi-\psi^*)/2$, **(α)** να ελέγξετε αν είναι ερμιτιανός και **(β)** να βρείτε τις ιδιοτιμές και τις ιδιοσυναρτήσεις του. (α) $(\hat{W}\phi,\psi) = \int(\hat{W}\phi)^*\psi\,dx = \int\frac{(\phi-\phi^*)^*}{2}\cdot\psi\,dx = \frac12\int\phi^*\psi\,dx - \frac12\int\phi\psi\,dx$, (*)

ενώ $(\phi,\hat{W}\psi) = \int\phi^*\hat{W}\psi\,dx = \int\phi^*\frac12(\psi-\psi^*)dx = \frac12\int\phi^*\psi\,dx - \frac12\int\phi^*\psi^*dx \neq$ (*) άρα δεν είναι ερμιτιανός τελεστής

(β) $\hat{W}\psi = r\psi \to \hat{W}^2\psi = \hat{W}(\hat{W}\psi) = \hat{W}(r\psi) = r\hat{W}\psi = rr\psi = r^2\psi$. Ενώ $\hat{W}^2\psi = \hat{W}(\hat{W}\psi) = \hat{W}\left(\frac{\psi-\psi^*}{2}\right) = \frac{\hat{W}\psi}{2} - \frac{\hat{W}\psi^*}{2} = \frac12\left(\frac{\psi-\psi^*}{2}\right) - \frac12\left(\frac{\psi^*-(\psi^*)^*}{2}\right) = \frac14(\psi-\psi^*-\psi^*+\psi) = \frac12(\psi-\psi^*) = \hat{W}\psi$, οπότε $\hat{W}^2\psi = \hat{W}\psi \to r^2\psi = r\psi \to (r^2-r)\psi = 0 \to r\in\{0,1\}$

άρα $r=0$ ή $r=1$. Για $r=0 \to \hat{W}\psi = 0\psi = 0 = \frac12(\psi-\psi^*) \to \psi = \psi^*$, δηλαδή ιδιοτιμή 0 έχουν οι πραγματικές κυματοσυναρτήσεις.

Ενώ $r=1 \to \hat{W}\psi = \psi = \frac12(\psi-\psi^*) \longrightarrow \frac12\psi = -\frac12\psi^* \to \psi+\psi^* = 0 \to Re(\psi) = 0$, άρα η ψ είναι καθαρά φανταστική κυματοσυνάρτηση, δηλαδή $\psi(x) = i\,I(x)$.

Θ4[1]. Να ελέγξετε, χρησιμοποιώντας τον συζυγή τελεστή, αν οι τελεστές **(α)** $y\cdot p_y\cdot y$ και **(β)** $\frac{x^2\cdot p_x}{(A+2)} + \frac{y\cdot p_x}{(B+1)}$ είναι ερμιτιανοί.

(α) $\hat{W}^+ = (yp_yy)^+ = ((yp_y)y)^+ = y^+(yp_y)^+ = y^+p_y^+y^+ = yp_yy = \hat{W}$, άρα είναι.
← y & p_y ερμιτιανοί (άρα $y^+=y$, $p_y^+=p_y$)

(β) $(yp_x)^+ = p_x^+y^+ = p_xy = yp_x$ ← μπορώ να αλλάξω σειρά μια και το p_x είναι συνάρτηση μόνο του x.

ενώ $(x^2p_x)^+ = ((x^2)p_x)^+ = p_x^+(x^2)^+ = p_x^+(xx)^+ = p_x^+x^+x^+ = p_xxx = p_xx^2 \neq x^2p_x$ καθώς x & p_x δεν μετατίθενται
← ερμιτιανοί

άρα ο συνολικός τελεστής δεν είναι ερμιτιανός

Θ5[1]. Αν $\widehat{W} = \hat{y}\cdot\widehat{p_y}\cdot\hat{y}$, να βρεθεί το ελάχιστο γινόμενο των αβεβαιοτήτων του $\widehat{W}$ με την z συνιστώσα της στροφορμής.

Χρειαζόμαστε τον μεταθέτη $[yp_yy, L_z] = [yp_yy,(xp_y-yp_x)] = [yp_yy,xp_y] - [yp_yy,yp_x] =$

$= \underbrace{[yp_yy,x]}_{0}p_y - y\underbrace{[yp_yy,p_x]}_{0} + x[yp_yy,p_y] - [yp_yy,y]p_x = xyp_y[y,p_y] + x[yp_y,p_y]y - y[p_yy,y]p_x - \underbrace{[y,y]}_{0}p_xyp_x =$

$= i\hbar xyp_y + xy\underbrace{[p_y,p_y]}_{0}y + x[y,p_y]p_yy - yp_y\underbrace{[y,y]}_{0}p_x - y[p_y,y]yp_x = i\hbar xyp_y + i\hbar xp_yy + i\hbar y^2p_x$.

Άρα $(\Delta\hat{W})(\Delta L_z) \geq \frac12|\langle[\hat{W},L_z]\rangle| = \underbrace{\frac{\hbar}{2}\left|\langle xyp_y\rangle + \langle xp_yy\rangle + \langle y^2p_x\rangle\right|}$

← η ελάχιστη τιμή.

Θ6[0.75]. Θεωρούμε σωμάτιο μάζας m, περιορισμένο σε ΑΠΔ αρχικού μήκους L, του οποίου ξαφνικά τριπλασιάζουμε το μήκος. Αν ήταν αρχικά στην 1η διεγερμένη του κατάσταση, να γράψετε την έκφραση από την οποία υπολογίζουμε τον συντελεστή στη νέα κυματοσυνάρτηση, για την 3η διεγερμένη κατάσταση.

1η διεγερμένη, $n=2$, και $\psi_2 = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\Theta(x)\Theta(L-x)$, Α.Π.Δ. $[0,L]$

3η διεγερμένη, $n'=4$ και $\psi_{4'} = \sqrt{\frac{2}{3L}}\sin\left(\frac{4\pi x}{3L}\right)\Theta(x)\Theta(3L-x)$, Α.Π.Δ. $[0,3L]$

Άρα $c_{4'} = (\psi_{4'}, \psi(x,0)) = (\psi_{4'}, \psi_2) = \int_0^L \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\sqrt{\frac{2}{3L}}\sin\left(\frac{4\pi x}{3L}\right)dx$

Θ7[1]. Σωματιδίου μάζας m, σε ΑΠΔ μήκους L, η κβαντική κατάσταση του περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση, με $|c_1| = |c_4| = |c|$

$\Psi(0 \le x \le L, t=0) = ((A+1)|c_1|\,|sin(\pi x/L) + (B-10)|c_4|\,|sin(4\pi x/L))/\sqrt{L}$, να βρεθούν **(α)** η $\langle E\rangle$ και **(β)** η $\Psi(x,t)$.

(α) $(\psi,\psi)=1 \rightarrow \left(\frac{A+1}{\sqrt{2}}\right)^2|c|^2 + \left(\frac{B-10}{\sqrt{2}}\right)^2|c|^2 = 1$, μια και $\psi(x,0) = \underbrace{\frac{A+1}{\sqrt{2}}|c|}_{\tilde{c}_1}\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \underbrace{\frac{B-10}{\sqrt{2}}|c|}_{\tilde{c}_4}\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right) = \tilde{c}_1\psi_1 + \tilde{c}_4\psi_4$.

$\rightarrow |c|^2 = 2/[(A+1)^2 + (B-10)^2]$

οπότε $\langle E\rangle = |\tilde{c}_1|^2E_1 + |\tilde{c}_4|^2E_4 = \frac{(A+1)^2}{(A+1)^2+(B-10)^2}E_1 + \frac{(B-10)^2}{(A+1)^2+(B-10)^2}E_1\cdot 4^2 = \left(\frac{(A+1)^2+16(B-10)^2}{(A+1)^2+(B-10)^2}\right)E_1$.

(β) $\psi(x,t) = \tilde{c}_1 e^{-iE_1t/\hbar}\psi_1 + \tilde{c}_4 e^{-iE_4t/\hbar}\psi_4 = \frac{(A+1)}{[(A+1)^2+(B-10)^2]^{1/2}}e^{-iE_1t/\hbar}\psi_1 + \frac{(B-10)}{[(A+1)^2+(B-10)^2]^{1/2}}e^{-iE_4t/\hbar}\psi_4$.

$E_1 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$ & $E_4 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}4^2 = 16E_1$.

(θεμελιώδη & 1η διεγερμένη)

Θ8[1+0.5+0.5]. Α.Π.Δ. σε υπέρθεση δυο καταστάσεων με μέση ενέργεια $\frac{5\hbar^2\pi^2}{4mL^2}$ και $\langle p\rangle(0) = \frac{8\hbar}{3L}$. Να βρεθούν **(α)** η $\Psi(x,t)$, **(β)** η $\langle p\rangle(t)$ και **(γ)** η $\langle x\rangle(t)$. Δίνεται $x_{21} = -\frac{16L}{9\pi^2}$ και $p_{21} = -\frac{8\hbar}{3L}\cdot i$ $= \frac{8\hbar}{3L}e^{-i\frac{\pi}{2}}$, $\delta^p_{21} = -\frac{\pi}{2}$ & $x_{21} = \frac{16L}{9\pi^2}e^{i\pi}$, $\delta^x_{21} = \pi$.

$|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$, & $\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}|c_1|^2 + \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}4|c_2|^2 = \frac{5}{4}\frac{\hbar^2\pi^2}{mL^2} \rightarrow |c_1|^2 + 4|c_2|^2 = \frac{5}{2} \rightarrow 1 - |c_2|^2 + 4|c_2|^2 = \frac{5}{2} \rightarrow |c_2|^2 = \frac{1}{2}$

άρα και $|c_1|^2 = \frac{1}{2}$, δηλαδή $|c_1| = |c_2| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

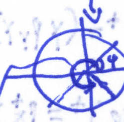
$\langle p\rangle(t=0) = 2|c_1||c_2||p_{21}|\cos(\varphi_{12}+\delta^p_{21}) = |p_{21}|\cos\left(\varphi_{12}-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{8\hbar}{3L}\sin(\varphi_{12}) = \frac{8\hbar}{3L}$ ← δεδομένο άσκησης $\rightarrow \varphi_{12} = \pi/2$.

Άρα (α) $\Psi(x,t) = \frac{e^{i\pi/2}}{\sqrt{2}}\psi_1 e^{-iE_1t/\hbar} + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2 e^{-iE_2t/\hbar} = \frac{i\psi_1 e^{-iE_1t/\hbar} + \psi_2 e^{-iE_2t/\hbar}}{\sqrt{2}}$

(β) $\langle p\rangle(t) = 2|c_1||c_2||p_{21}|\cos(\omega t + \varphi_{12} + \delta^p_{21}) = \frac{8\hbar}{3L}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{8\hbar}{3L}\cos\omega t$, $\omega = \frac{E_2-E_1}{\hbar} = \frac{3\hbar\pi^2}{2mL^2}$.

(γ) $\langle x\rangle(t) = |c_1|^2x_{11} + |c_2|^2x_{22} + 2|c_1||c_2||x_{21}|\cos(\omega t + \varphi_{12} + \delta^x_{21}) = (|c_1|^2+|c_2|^2)\frac{L}{2} + \frac{16L}{9\pi^2}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} + \pi\right)$

$\rightarrow \langle x\rangle(t) = \frac{L}{2} + \frac{16L}{9\pi^2}\sin(\omega t)$



$\cos\left(\varphi + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin\varphi$

Θ9[1]. Αφού $\Psi(x,t=0) = (i\,\psi_1 - 2\psi_2)/\sqrt{5}$, η $\Psi(x,t)$ είναι, $\Psi(x,t) = (i\,\psi_1\cdot e^{-i\varepsilon t/\hbar} - 2\psi_2\cdot e^{-i4\varepsilon t/\hbar})/\sqrt{5}$ με $\varepsilon = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$. Ενώ η μέση ενέργεια είναι $\langle E\rangle = \frac{1}{5}\cdot\varepsilon + \frac{4}{5}\cdot 4\varepsilon = \frac{17}{5}\cdot\varepsilon$. Ποια θα μπορούσε να είναι η εκφώνηση της άσκησης;

Σε Α.Π.Δ. η αρχική κατάσταση περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση $\psi(x,t=0) = (i\psi_1 - 2\psi_2)/\sqrt{5}$. Να βρεθούν (α) η $\psi(x,t)$ και (β) η $\langle E\rangle$.