Θ1(α) $(\psi, \Pi_x\psi) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \phi^*(x,y,z)\, \Pi_x \psi(x,y,z)\, dx\,dy\,dz = \int \phi^*(x,y,z)\, \psi(-x,y,z)\, dx\,dy\,dz \overset{x'=-x}{=\!=} \int_{+\infty}^{-\infty} \iint d(-x')\, \phi^*(-x',y,z)\, \psi(x',y,z)\, dy\,dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \iint (\Pi_x \phi(x',y,z))^* \psi(x',y,z)\, dx'\,dy\,dz$

$= (\Pi_x \phi, \psi).$

Θ1(β) $(O\Pi_x)^+ = \Pi_x^+ O^+ = \Pi_x (x p_y)^+ = \Pi_x p_y^+ x^+ = \Pi_x p_y x \neq O\Pi_x$ καθώς $O\Pi_x \psi(x,y,z) = x p_y \Pi_x \psi =$

$= x\left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial y}\psi(-x,y,z)\right) = -i\hbar\, x \frac{\partial \psi(-x,y,z)}{\partial y}$. Ενώ $\Pi_x p_y x\, \psi(x,y,z) = \Pi_x\left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial y} x\psi\right) = \Pi_x\left(-i\hbar\, x \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) = -i\hbar\, \Pi_x\left(x\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = -i\hbar\,(-x)\frac{\partial \psi(-x,y,z)}{\partial y} = +i\hbar\, x \frac{\partial \psi(-x,y,z)}{\partial y}$

«Κβαντικής Φυσικής Ι» ακαδημαϊκού έτους 2021-2022. Τελικό διαγώνισμα, 4 φλεβάρη 2022.

Για τα **εξατομικευμένα** θέματα, θα χρειαστούν οι αριθμοί, **A**: ο τελευταίος αριθμός του Α.Μ. σας και **B**: ο προτελευταίος αριθμός του Α.Μ. σας. ***Ξεκινώντας την επίλυση των εξατομικευμένων θεμάτων να ξαναγράψετε με ευδιάκριτο τρόπο τα δεδομένα της άσκησης για τα δικά σας στοιχεία, δηλαδή αντικαθιστώντας τα αντίστοιχα A και B.***

Θ1.[0.5+0.5+1] **(α)** Να αποδείξετε χρησιμοποιώντας την σχέση ορισμού, ότι ο τελεστής της αρτιότητας, Π_x, που ορίζεται από την σχέση $\Pi_x\,\psi(x,y,z) = \psi(-x,y,z)$ είναι ερμητιανός.

(β) Έστω $O = x \cdot p_y$, να ελέγξετε αν ο τελεστής $O \cdot \Pi_x$ είναι ερμιτιανός, χρησιμοποιώντας τον συζυγή τελεστή.

(γ) Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του $(\Delta O)(\Delta l_z)$.

Θ1(γ) Χρειάζομαι τον μετάθετη $[xp_y, l_z] = [xp_y, (xp_y - yp_x)] =$

$= [xp_y, xp_y] - [xp_y, yp_x] = -y[x,p_x]p_y - x[p_y,y]p_x = i\hbar(xp_x - yp_y)$

$\Delta_{\rho\alpha}\left[(\Delta O)(\Delta l_z)\right]_{min} = \frac{1}{2}\left|\langle i\hbar(xp_x - yp_y)\rangle\right| = \frac{\hbar}{2}\left|\langle xp_x - yp_y\rangle\right|.$

Θ2.[1+0.5+0.5+0.5] Έστω ερμητιανός τελεστής $\hat{W} = |w|\left(|1><1| - \frac{B+2}{A+1}|2><2|\right)$. Γνωρίζουμε για την Χαμιλτονιανή ότι, $\hat{H}|1> = (A+1)\varepsilon|1> + \varepsilon|2>$, $\hat{H}|2> = (A+1)\varepsilon|2> + \varepsilon|1>$, ~~$\hat{H}|1> = \varepsilon|1> + \varepsilon|2>$, $\hat{H}|2> = \varepsilon|2> + \varepsilon|1>$~~

Να βρεθούν **(α)** οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις της ενέργειας.

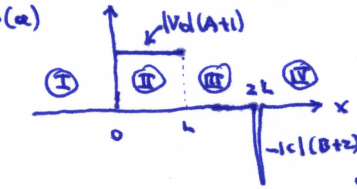
Αν την χρονική στιγμή t=0, μετρώ το φυσικό μέγεθος που σχετίζεται με τον W και βρίσκω αρνητική τιμή. Να βρεθούν **(β)** η $\Psi(x,t)$, **(γ)** η μέση τιμή του τελεστή W και **(δ)** ο ρυθμός μεταβολής του με την χρήση του μεταθέτη. Είναι η άσκηση Θ4, της 2ης προόδου (κε. 6ος 21-22).

Θ3.[0.5x4] **(α)** Να σχεδιάσετε το δυναμικό, $V(x) = |V_0|(A+1)\big(\Theta(x) - \Theta(L-x)\big) - |c|(B+2)\delta(x-2L)$.

(β) Για ηλεκτρόνιο με αρνητική ενέργεια γράψτε τις κυματοσυναρτήσεις σε όλες τις περιοχές και **(γ)** τις συνοριακές συνθήκες στο $x = 2L$.

(δ) Για την μελέτη σκέδασης από $(-\infty \to +\infty)$ με ενέργεια προσπίπτοντος ηλεκτρονίου, $E = |V_0|(A+1)$ γράψτε τις κυματοσυναρτήσεις σε όλες τις περιοχές

Θ3(α)



(β) $E<0$, περιοχή I & III & IV $\psi'' + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi = 0$, $\gamma^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2}$

άρα $\psi_I = Ae^{\gamma x}$, $\psi_{IV} = De^{-\gamma x}$ (τετραγωνικά ολοκλ.)

$\psi_{III} = C_- e^{-\gamma x} + C_+ e^{\gamma x}$

Στην περιοχή II $\psi'' + \frac{2m}{\hbar^2}\underbrace{(E - |V_0|(A+1))}_{=-(\gamma')^2}\psi = 0$

οπότε $\psi_{II} = B_+ e^{\gamma' x} + B_- e^{-\gamma' x}$.

(γ) $\psi_{III}(2L) = \psi_{IV}(2L) \to C_- e^{-2\gamma L} + C_+ e^{2\gamma L} = De^{-\gamma 2L}$.

και $-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\psi'_{IV}(2L^+) - \psi'_{III}(2L^-)\right] - |c|(B+2)\psi(2L) = 0 \to$

$\to -\gamma De^{-2\gamma L} - \gamma(C_+ e^{2\gamma L} - C_- e^{-2\gamma L}) = \frac{2m|c|(B+2)}{\hbar^2}\psi(2L).$

(δ) $\psi_I = e^{ikx} + Ae^{-ikx}$, e^{ikx}: προσπίπτων, e^{-ikx}: ανακλώμενο

$\psi_{II} = Bx + B'$

$\psi_{III} = C_+ e^{ikx} + C_- e^{-ikx}$

$\psi_{IV} = De^{ikx}$, e^{ikx}: διεκπόμενο

$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} = \frac{2m|V_0|(A+1)}{\hbar^2}$

$\psi_{II} = Bx + B'$ γιατί η Eq. Schrödinger είναι $\psi'' = 0$.

Θ4.[0.5+0.5+1] Κβαντικός αρμονικός ταλαντωτής βρίσκεται στην κατάσταση,

$|\psi(x,t=0)> = |c_0|\, e^{i\varphi_{01}}|0> + |c_1||1>$. Ενώ δίνεται ότι $\psi_0 = \pi^{(-\frac{1}{4})}\, e^{-x^2/2}$ και $\psi_1 = \sqrt{2}\,\pi^{(-\frac{1}{4})}\, x\, e^{-x^2/2}$.

Να βρεθούν **(α)** το $p_{10} = (\psi_1, \hat{p}\psi_0)$ με τον υπολογισμό του ολοκληρώματος και **(β)** το x_{10} με την αλγεβρική μέθοδο.

Αν γνωρίζουμε ότι η μέση ενέργεια και η μέση θέση είναι 1 και $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, να βρεθεί **(γ)** η κυματοσυνάρτηση την τυχαία χρονική στιγμή, t. Είναι το Θ5 της φετινής 3ης προόδου, με διαφορετικά τα (α) $p_{10} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int x e^{-x^2/2}\left(-i\frac{\partial}{\partial x}e^{-x^2/2}\right)dx = \frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int x^2 e^{-x^2}dx = \frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{i}{\sqrt{2}}$. (β) $\langle x_{10}\rangle = \langle 1|\frac{\hat{a}+\hat{a}^+}{\sqrt{2}}|0\rangle = \frac{\langle 1|1\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Θ5.[0.5+0.5] Για ηλεκτρόνιο μάζας m εγκλωβισμένο σε τετράγωνη κβαντική τελεία πλευράς πάχους L, να βρεθεί **(α)** η κυματοσυνάρτηση της θεμελιώδους ενεργειακής κατάστασης, **(β)** η ενέργεια της 1ης εκφυλισμένης ενεργειακής κατάστασης. $E = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}(n_x^2 + n_y^2)$, (α) $\psi_{11} = \frac{2}{L}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{L}\right)$ $0<x<L$, $0<y<L$ και μηδέν αλλού.

(β) $E_{12} = E_{21} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}(1^2 + 2^2) = \frac{5\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$

Θ6.[0.5+0.5+0.5+1] Θεωρούμε ότι η κυματοσυνάρτηση του ατόμου υδρογόνου, είναι

$\Psi(\vec{r}, t=0) = |N|\left[\sqrt{(A+1)}\psi_{100}(\vec{r}) + \sqrt{(B+1)}\psi_{211}(\vec{r})\right].$

Να υπολογίστε **(α)** την $\Psi(\vec{r},t)$, **(β)** την μέση ενέργεια, **(γ)** την $\langle l_x^2 + l_y^2\rangle(t)$ την τυχαία χρονική στιγμή t και **(δ)** την μέση τιμή της x- συνιστώσας της στροφορμής, την χρονική στιγμή t=0.

Ανδρέας Φ. Τερζής,

καλή προσπάθεια

Άρα $|N|^2(A+B+2) = 1$

(α) $\psi(\vec{r},t) = \sqrt{\frac{A+1}{A+B+2}}\psi_{100}e^{-iE_1 t} + \sqrt{\frac{B+1}{A+B+2}}\psi_{211}e^{-iE_2 t}$, με $E_1 = -\frac{1}{2}$ & $E_2 = -\frac{1}{8}$

(β) $\langle E\rangle = \frac{A+1}{A+B+2}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{B+1}{A+B+2}\left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{-(4A+4+B+1)}{8(A+B+2)} = -\frac{4A+B+5}{8(A+B+2)}$

(γ) $\langle l_x^2 + l_y^2\rangle = \langle l^2\rangle - \langle l_z^2\rangle = \left[\frac{A+1}{A+B+2}0(0+1) + \frac{B+1}{A+B+2}1(1+1)\right] - \left[\frac{A+1}{A+B+2}0^2 + \frac{B+1}{A+B+2}1^2\right]$

$= \frac{B+1}{A+B+2}$.

Θ6(δ) Το $\hat{l}_x = (\hat{l}_+ + \hat{l}_-)/2$. Οι $\hat{l}_+$ & $\hat{l}_-$ πάνω στην ψ_{100} κάνουν μηδέν, καθώς δεν υπ. η κατάσταση, πάνω ή κάτω του 0. Το $\hat{l}_+$ στην ψ_{211} κάνει 0, δεν υπάρχει $m=2$, για $l=1$ και ο $\hat{l}_-$ στην ψ_{211}, δίνει πολλαπλάσιο του ψ_{210} που είναι ορθογώνια κατάσταση των ψ_{100} & ψ_{211}. Άρα $\langle \hat{l}_x\rangle(t=0) = 0$.