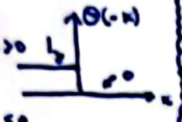
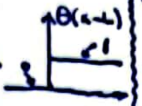
3η πρόοδος «Κβαντικής Φυσικής Ι» ακαδημαϊκού έτους 2021-2022. Δευτέρα 24/1/2022. διδ. Ανδρέας Φ. Τερζής

Θ1.(α) Να σχεδιάσετε το δυναμικό, $V(x) = |V_0|\big((A+B)\,\theta(-x) + (2A+1)\,\theta(x-L)\big)$ και **(β)** να εξηγείστε για ποιες τιμές της ενέργειας έχουμε δέσμιες καταστάσεις.

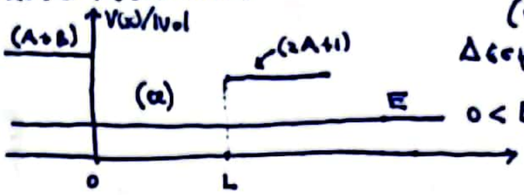
$\theta(-x) = \begin{cases} 0, & -x<0 \to x>0 \\ 1, & -x>0 \to x<0 \end{cases}$



$\theta(x-L) = \begin{cases} 0, & x-L<0 \to x<L \\ 1, & x-L>0 \to x>L \end{cases}$



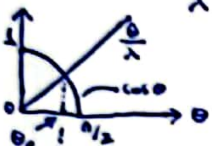
Έστω $(A+B) > (2A+1)$



(β) Δέσμιες για, $0 < E < (2A+1)|V_0|$

Θ2. Για τετραγωνικό πηγάδι δυναμικού με πάχος $(2A+1)\,L$ και δυναμικό, $(A+B)|V_0|$ και χρησιμοποιώντας την σχέση $\cos\theta = \frac{\theta}{\lambda} + m\frac{\pi}{2\lambda}$ να **(α)** αποδείξτε ότι πάντα υπάρχει η θεμελιώδης κατάσταση και **(β)** να βρείτε την συνθήκη για να έχουμε μία διεγερμένη κατάσταση. **(γ)** Ζωγραφίστε προσεγγιστικά τις δυο πρώτες ενεργειακές καταστάσεις.

(α) $m=0 \to \cos\theta = \frac{\theta}{\lambda}$



πάντα ∃ τομή $\cos\theta$ & θ/λ οπότε και λύση, θ_0

(β) Πρέπει για $m=1$, το σημείο τομής να είναι μικρότερο του 1

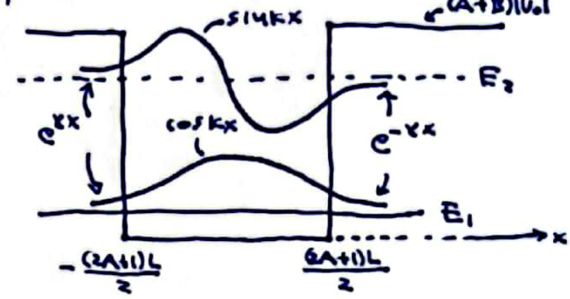
Άρα $\frac{\pi}{2\lambda} < 1 \to \lambda > \frac{\pi}{2}$. Τώρα $\lambda = \sqrt{\frac{2m(A+B)|V_0|}{\hbar^2}}\,\frac{(2A+1)L}{2}$

$\to \sqrt{\frac{2m(A+B)(2A+1)^2|V_0|L^2}{4\frac{\hbar^2}{(2\pi)^2}}} > \frac{\pi}{2}$

$\to \frac{\sqrt{8m(A+B)(2A+1)^2|V_0|L^2}}{h} > 1$, η συνθήκη.

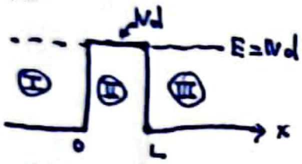
Αν θέλουμε μόνο μία διεγερμένη τότε και $m=2 \to \frac{2\cdot\pi}{2\lambda} > 1 \to \frac{\pi}{\lambda} > 1$

(γ)



Θ3. Θεωρούμε ηλεκτρόνιο μάζας m σε ορθογώνιο φράγμα δυναμικού με πάχος L και δυναμικό $|V_0|$, **(α)** γράψτε τις κυματοσυναρτήσεις για τις τρεις περιοχές και **(β)** τις συνοριακές συνθήκες, για σκέδαση από $(-\infty \to +\infty)$ με ενέργεια ίση με $|V_0|$.

(α)



$\psi_I = e^{ikx} + Ae^{-ikx}$

$\psi_{II} = Bx + B'$ $(\psi''_{II} = 0)$

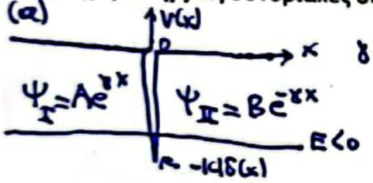
$\psi_{III} = Ce^{ikx}$, $k = \sqrt{\frac{2m|V_0|}{\hbar^2}}$

(β) Σ.Σ. στο $x=0$, $1+A = B'$ & $ik(1-A) = B$

Σ.Σ στο $x=L$, $B\cdot L + B' = Ce^{ikL}$ & $B = ikCe^{ikL}$

Θ4. Θεωρούμε ηλεκτρόνιο μάζας m με αρνητική ενέργεια ίση με E σε δυναμικό $-|c|\,\delta(x)$. Γράψτε **(α)** τις κυματοσυναρτήσεις για τις διάφορες περιοχές και **(β)** τις συνοριακές συνθήκες.

(α)



$\psi_I = Ae^{\gamma x}$ $\quad \psi_{II} = Be^{-\gamma x}$ $\quad \gamma = \sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}}$

(β) Σ.Σ στο $x=0$, $\psi_I(0) = \psi_{II}(0) \to A = B$

Καθώς $\lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\psi''\,dx - |c|\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(x)\psi(x)\,dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}E\psi(x)\,dx\right] \to -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\psi'(0^+) - \psi'(0^-)\right] - |c|\psi(0) = 0$

η ασυνέχεια της παραγώγου δίνει $-\frac{\hbar^2}{2m}(-\gamma B - \gamma A) = |c|A$ ή $|c|B$.

Θ5. το θέμα Θ1 της περσινής (ακ. έτος 20-21) 3ης προόδου.

Θ6. Για ηλεκτρόνιο μάζας m εγκλωβισμένο σε κβαντική τελεία με $L_x = L_y = \frac{L_z}{2} = L$ να βρεθεί **(α)** η κυματοσυνάρτηση της 1ης διεγερμένης ενεργειακής κατάστασης, **(β)** η ενέργεια της 1ης εκφυλισμένης ενεργειακής κατάστασης.

$E = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m}\left[\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2}\right] = \underbrace{\frac{\hbar^2\pi^2}{8mL^2}}_{E_0}(4n_x^2 + 4n_y^2 + n_z^2)$

πινακάκι καταστάσεων

n_x	n_y	n_z	E/E_0	
1	1	1	9	
1	1	2	12	← 1η διεγερμένη
1	2	1	21	3η διεγερμένη & 1η εκφυλισμένη
2	1	1	21	
1	1	3	17	← 2η διεγερμένη
1	2	3	24	
2	1	3	24	

(α) 1η διεγερμένη, από το πινακάκι

$\psi_{112} = \begin{cases} \frac{2\sqrt{2}}{L\sqrt{L}}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) & \text{για } 0<x<L,\ 0<y<L,\ 0<z<2L \\ 0 & \text{για όλους τους άλλους συνδυασμούς } (x,y,z). \end{cases}$

(β) Από το πινακάκι πάλι, η ενέργεια της 1ης εκφυλισμένης είναι

$E_{121} = E_{211} = 21E_0 = \frac{21\hbar^2\pi^2}{8mL^2}$.

Θ7. το θέμα Θ3 της περσινής 3ης προόδου.

Θ8. το θέμα Θ5 της περσινής 3ης προόδου.