2η πρόοδος «Κβαντικής Φυσικής Ι» ακ. έτους 2021-2022. Πάτρα, 6/12/2021. Ανδρέας Φ. Τερζής.

Θ1[3]. Α.Π.Δ. σε υπέρθεση δυο καταστάσεων με μέση ενέργεια $\frac{5\hbar^2\pi^2}{4mL^2}$ και $\langle p\rangle(0) = \frac{8\hbar}{3L}$. Να βρεθούν **(α)** η $\Psi(x,t)$, **(β)** η $\langle p\rangle(t)$ και **(γ)** η $\langle x\rangle(t)$. Δίνεται $x_{21} = -\frac{16L}{9\pi^2}$ και $p_{21} = -\frac{8\hbar}{3L}\cdot i$ $= \frac{8\hbar}{3L}e^{-i\frac{\pi}{2}}$, $\delta^p_{21} = -\frac{\pi}{2}$ & $x_{21} = \frac{16L}{9\pi^2}e^{i\pi}$, $\delta^x_{21} = \pi$.

$|c_1|^2+|c_2|^2 = 1$, $\underbrace{\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}}_{E_1}|c_1|^2 + \underbrace{\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}4}_{E_2}\cdot|c_2|^2 = \frac{5\hbar^2\pi^2}{4mL^2} \to |c_1|^2+4|c_2|^2 = \frac{5}{2} \to 1-|c_2|^2+4|c_2|^2 = \frac{5}{2} \to 3|c_2|^2 = \frac{3}{2}$

άρα $|c_1|^2 = |c_2|^2 = \frac{1}{2}$, δηλαδή $|c_1| = |c_2| = 1/\sqrt{2}$.

$\langle p\rangle(t=0) = 2|c_1||c_2||p_{21}|\cos(\phi_{12}+\delta^p_{21}) = |p_{21}|\cos(\phi_{12}-\frac{\pi}{2}) = \frac{8\hbar}{3L}\sin(\phi_{12}) = \frac{8\hbar}{3L}$ ← δεδομένο άσκησης $\rightarrow \phi_{12} = \pi/2$.

Άρα (α) $\boxed{\Psi(x,t) =} \frac{e^{i\pi/2}}{\sqrt{2}}\psi_1 e^{-iE_1t/\hbar} + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2 e^{-iE_2t/\hbar} = \boxed{\frac{i\psi_1 e^{-iE_1t/\hbar}+\psi_2 e^{-iE_2t/\hbar}}{\sqrt{2}}}$

(β) $\boxed{\langle p\rangle(t)} = 2|c_1||c_2||p_{21}|\cos(\omega t+\phi_{12}+\delta^p_{21}) = \frac{8\hbar}{3L}\cos(\omega t+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}) = \boxed{\frac{8\hbar}{3L}\cos\omega t}$, $\omega = \frac{E_2-E_1}{\hbar} = \frac{3\hbar\pi^2}{2mL^2}$.

(γ) $\langle x\rangle(t) = |c_1|^2x_{11}+|c_2|^2x_{22}+2|c_1||c_2||x_{21}|\cos(\omega t+\phi_{12}+\delta^x_{21}) = (|c_1|^2+|c_2|^2)\frac{L}{2}+\frac{16L}{9\pi^2}\cos(\omega t+\frac{\pi}{2}+\pi) \Rightarrow$

$$\boxed{\langle x\rangle(t) = \frac{L}{2}+\frac{16L}{9\pi^2}\sin(\omega t)}$$

$$\frac{(A+1)|c|}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)+\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)\right] = |N|\left[\psi_1+\psi_3\right]$$

$||$ όπου $N = \frac{(A+1)|c|}{\sqrt{2}}$

Θ2[2]. Α.Π.Δ. με $\Psi(x,0) = \frac{(A+1)|c|}{\sqrt{L}}\cdot\left[\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)+\sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)\right]$. Να βρεθούν **(α)** η μέση ενέργεια και **(β)** η $\Psi(x,t)$.

Από νορμαλισμό $\Psi(x,0) \rightarrow |N|^2+|N|^2 = 1 \rightarrow |N| = 1/\sqrt{2}$

Άρα (α) $\boxed{\langle E\rangle} = \frac{1}{2}E_1+\frac{1}{2}E_3 = \frac{1}{2}\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}+\frac{1}{2}\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}3^2 = \frac{10}{2}\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2} = \boxed{\frac{5\hbar^2\pi^2}{2mL^2}}$

(β) $\boxed{\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1 e^{-iE_1t/\hbar}+\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_3 e^{-iE_3t/\hbar}}$

Θ3[2]. Αν τελεστής $\widehat{W} = (A+2)\cdot\hat{p}_x+(B+1)\cdot\hat{p}_y$ να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του $(\Delta W)(\Delta l_z)$.

Χρειάζομαι τον μεταθέτη $[\hat{W},\hat{\ell}_z] = [(A+2)p_x+(B+1)p_y,(xp_y-yp_x)] = (A+2)[p_x,(xp_y-yp_x)]+$
$+(B+1)[p_y,(xp_y-yp_x)] = (A+2)[p_x,xp_y]-(B+1)[p_y,yp_x] = (A+2)[p_x,x]p_y-(B+1)[p_y,y]p_x =$
$= -(A+2)i\hbar p_y+(B+1)i\hbar p_x$

Άρα $\boxed{(\Delta\hat{W})(\Delta\hat{\ell}_z)\big|_{min}} = \frac{1}{2}\left|\langle[\hat{W},\hat{\ell}_z]\rangle\right| = \boxed{\frac{\hbar}{2}\left|(B+1)\langle p_x\rangle-(A+2)\langle p_y\rangle\right|}$

Θ4[5]. Έστω ερμητιανός τελεστής $\hat{W} = |w|\left(|1><1| - \frac{B+2}{A+1}|2><2|\right)$. Γνωρίζουμε για την Χαμιλτονιανή ότι, $\hat{H}|1>=(A+1)\varepsilon|1>+\varepsilon|2>$, $\hat{H}|2>=(A+1)\varepsilon|2>+\varepsilon|1>$,

Να βρεθούν **(α)** οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις της ενέργειας. Αν την χρονική στιγμή *t*=0, μετρώ το φυσικό μέγεθος που σχετίζεται με τον *W* και βρίσκω αρνητική τιμή. Να βρεθούν **(β)** η $\Psi(x,t)$, **(γ)** η πιθανότητα να βρω σε μία μέτρηση $|w|$, **(δ)** η μέση τιμή του τελεστή *W* και **(ε)** ο ρυθμός μεταβολής του με την χρήση του μεταθέτη.

(α) Διαγωνοποίηση του $\begin{bmatrix}(A+1)\varepsilon & \varepsilon\\ \varepsilon & (A+1)\varepsilon\end{bmatrix}$ που δίνει $\lambda = (A+2)\varepsilon$ & $A\varepsilon$. ιδιοτιμές ενέργειας.

Με πράξεις που έχουμε κάνει πολλές φορές και μπορείτε να βρείτε στο "υλικό" του μαθήματος βρίσκουμε τις ιδιοσυναρτήσεις $|(A+2)\varepsilon\rangle = \frac{|1\rangle+|2\rangle}{\sqrt{2}}$ & $|A\varepsilon\rangle = \frac{|1\rangle-|2\rangle}{\sqrt{2}}$ (✱)

(β) Αρνητική ιδιοτιμή της $\hat{W}$ (η $-\frac{(B+2)}{(A+1)}|w|$) αντιστοιχεί στην $|2\rangle$, άρα

$|\Psi(x,t=0)\rangle = |2\rangle$ οπότε $|\Psi(x,t)\rangle = (\langle (A+2)\varepsilon|2\rangle)\,|(A+2)\varepsilon\rangle e^{-i(A+2)\varepsilon t/\hbar} + (\langle A\varepsilon|2\rangle)\,|A\varepsilon\rangle e^{-iA\varepsilon t/\hbar} \rightarrow$

$\rightarrow \boxed{|\Psi(x,t)\rangle = \frac{|(A+2)\varepsilon\rangle e^{-i(A+2)\varepsilon t/\hbar} - |A\varepsilon\rangle e^{-iA\varepsilon t/\hbar}}{\sqrt{2}}}$ (το − από $\langle A\varepsilon|2\rangle = -1/\sqrt{2}$).

(γ) Από την σχέση (✱) με λίγες πράξεις, βρίσκω ότι

$$|\Psi(x,t)\rangle = \underbrace{-i\sin\left(\frac{\varepsilon t}{\hbar}\right)|1\rangle} + \cos\left(\frac{\varepsilon t}{\hbar}\right)|2\rangle$$

άρα η ζητούμενη πιθανότητα $\boxed{P_{|w|} = \left|-i\sin\left(\frac{\varepsilon t}{\hbar}\right)\right|^2 = \sin^2\left(\frac{\varepsilon t}{\hbar}\right)}$.

(δ) Προφανώς, $\langle W\rangle(t) = \sin^2\left(\frac{\varepsilon t}{\hbar}\right)|w| + \cos^2\left(\frac{\varepsilon t}{\hbar}\right)\left[-\frac{(B+2)}{(A+1)}|w|\right]$.

(ε) $[\hat{W},\hat{H}]$: $\begin{bmatrix}|w| & 0\\ 0 & -\left(\frac{B+2}{A+1}\right)|w|\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(A+1)\varepsilon & \varepsilon\\ \varepsilon & (A+1)\varepsilon\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}(A+1)\varepsilon & \varepsilon\\ \varepsilon & (A+1)\varepsilon\end{bmatrix}\begin{bmatrix}|w| & 0\\ 0 & -\left(\frac{B+2}{A+1}\right)|w|\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\left(\frac{A+B+3}{A+1}\right)|w|\varepsilon.$

Άρα $\boxed{\frac{d\langle\hat{W}\rangle(t)}{dt}} = \frac{1}{i\hbar}\langle\Psi(x,t)|\,[\hat{W},\hat{H}]\,|\Psi(x,t)\rangle$; $= \left(\frac{A+B+3}{A+1}\right)|w|\varepsilon\,(|1\rangle\langle 2| - |2\rangle\langle 1|)$.

$$= \dots = \frac{i}{i\hbar}\frac{(A+B+3)}{(A+1)}|w|\varepsilon\cdot 2\cdot\sin\left(\frac{\varepsilon t}{\hbar}\right)\cos\left(\frac{\varepsilon t}{\hbar}\right) = \boxed{\frac{(A+B+3)}{(A+1)}\left(\frac{|w|\varepsilon}{\hbar}\right)\sin\left(\frac{2\varepsilon t}{\hbar}\right)}.$$