1^{η} πρόοδος «Κβαντικής Φυσικής Ι» ακ. έτους 2021-2022. (6/11/2021) διδ. Ανδρέας Φ. Τερζής.

Θ1. Θεωρούμε την κυματοσυνάρτηση $N \cdot e^{-\lambda \cdot (x-(A+1)\cdot x_0)^2/2} \cdot e^{i\cdot(B+1)\cdot k\cdot x}$.

Για την περίπτωση πού $x_0 = 0$ και $k = 0$ να βρεθεί (α) το N, (β) η μέση θέση $\langle x \rangle$ και (γ) η αβεβαιότητα της ορμής Δp.

$\psi = N e^{-\lambda x^2/2}$ (α) $(\psi,\psi) = 1 \to N^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x^2} dx = N^2 \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} = 1 \to N = \left[\frac{\lambda}{\pi}\right]^{1/4}$.

(β) $\langle x \rangle = (\psi, \hat{x}\psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* x \psi\, dx = \left[\frac{\lambda}{\pi}\right]^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\lambda x^2} dx = 0$ (ολοκλήρωμα περιττής συνάρτησης σε συμμετρικές θέσεις).

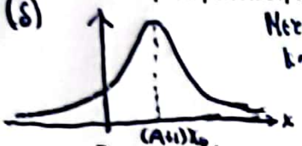
(γ) $\psi = \left[\frac{\lambda}{\pi}\right]^{1/4} e^{-\lambda x^2/2}$ είναι πραγματική συνάρτηση, άρα $\langle p \rangle = 0$.

$\langle p^2 \rangle = (\psi, \hat{p}^2\psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\lambda x^2/2} \left[-\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2}\right]\left[\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\lambda x^2/2}\right] \overset{\circledast}{=} \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/2}(-\hbar^2)\int_{-\infty}^{+\infty}(-\lambda+\lambda^2x^2)e^{-\lambda x^2}dx = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/2}\hbar^2\lambda I_0 - \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/2}\hbar^2\lambda^2 I_2 =$

$= \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/2}\hbar^2\lambda\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^{1/2} - \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/2}\hbar^2\lambda^2\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^{1/2} = \hbar^2\lambda - \frac{\hbar^2\lambda}{2} = \frac{\hbar^2\lambda}{2} \longrightarrow (\Delta p) = \sqrt{\langle p^2\rangle - \langle p\rangle} = \hbar\sqrt{\frac{\lambda}{2}}$.

Για την περίπτωση πού $x_0 \neq 0$ και $k = 0$ να βρεθεί (δ) το $\langle x \rangle$ και (ε) το Δx.

(δ)



Μετατοπισμένη γκαουσιανή κατά $(A+1)x_0$, άρα $\langle x \rangle = (A+1)x_0$

(ε) $\langle x^2 \rangle = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\lambda(x-(A+1)x_0)^2}dx \overset{y = x-(A+1)x_0}{=\!=} \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty}(y+(A+1)x_0)^2 e^{-\lambda y^2}dy$

$= \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/2}\int y^2 e^{-\lambda y^2}dy + 2\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/2}(A+1)x_0\underbrace{\int y e^{-\lambda y^2}dy}_{\to 0} + \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/2}(A+1)^2x_0^2\int e^{-\lambda y^2}dy =$

$= \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/2} I_2 + \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/2}(A+1)^2x_0^2 I_0 = \frac{1}{2\lambda} + (A+1)^2x_0^2 \to (\Delta x)^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = 1/2\lambda$.

Για την περίπτωση πού $x_0 \neq 0$ και $k \neq 0$ να βρεθεί (στ) η μέση ορμή $\langle p \rangle$.

$\psi = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\lambda x^2/2} e^{i(B+1)kx}$, $\langle p \rangle = (\psi, \hat{p}\psi) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\lambda x^2/2} e^{-i(B+1)kx}(-i\hbar)\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\lambda x^2/2} e^{i(B+1)kx}\right]dx =$

$= \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/2}(-i\hbar)\int e^{-\lambda x^2/2} e^{-i(B+1)kx}(-\lambda x + i(B+1)k)e^{-\lambda x^2/2}e^{+i(B+1)kx}dx = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/2}(-i\hbar)\underbrace{\int(-\lambda x)e^{-\lambda x^2}dx}_{0} + \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/2}(-i\hbar)\int(i(B+1)k)e^{-\lambda x^2}dx =$

$= \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/2}(B+1)\hbar k\underbrace{\int e^{-\lambda x^2}dx}_{I_0} = (B+1)\hbar k$.

Θ2. Θεωρούμε την κυματοσυνάρτηση $N \cdot (A + B) \cdot x \cdot e^{-\lambda \cdot x^2/2}$.

Να βρείτε την (α) μέση θέση και την (β) μέση ορμή.

(α) Η ψ είναι περιττή συνάρτηση, η $|\psi|^2$ είναι άρτια οπότε το $\langle x \rangle = 0$

(β) Αφού η ψ είναι πραγματική συνάρτηση $\langle p \rangle = 0$.

Θ3. Αν γνωρίζουμε ότι η κυματοσυνάρτηση $N \cdot e^{-\lambda \cdot x^2/2} \cdot e^{-i\cdot k\cdot t}$ είναι λύση της εξίσωσης Schrödinger, να βρείτε (α) το δυναμικό $V(x)$ και να αποδείξετε ότι (β) $k = \frac{h\cdot\lambda}{4\pi\cdot m}$.

Άρα γνωρίζουμε ότι επαληθεύει την εξίσωση $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V(x)\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$

$\circledast$ Υπολογισμός 2ης παραγώγου, χρήσιμος και στο Θ1(γ). $\frac{\partial^2}{\partial x^2}(e^{-\lambda x^2/2}) = \frac{\partial}{\partial x}(-\lambda x e^{-\lambda x^2/2}) = (-\lambda + \lambda^2x^2)e^{-\lambda x^2/2}$

Έτσι η εξ. Schrödinger είναι, κάνοντας χρήση και το $\frac{\partial\psi}{\partial t}$, που παραγωγίζω το e^{-ikt}.

$-\frac{\hbar^2}{2m}[-\lambda + \lambda^2x^2]\psi + V(x)\psi = i\hbar(-ik)\psi \longrightarrow$

$\left(\left[\frac{\lambda\hbar^2}{2m} - \hbar k\right] + \left[V(x) - \frac{\hbar^2\lambda^2x^2}{2m}\right]\right)\psi = 0 \to \hbar k = \frac{\lambda\hbar^2}{2m} \to k = \frac{\lambda h}{4\pi m}$ (β) & $\boxed{V(x) = \frac{\hbar^2\lambda^2}{2m}x^2}$ (α)

για να ισχύει για κάθε x

Θ4. Να ελέγξετε αν ο τελεστής της κινητικής ενέργειας είναι ερμητιανός, χρησιμοποιώντας την σχέση ορισμού.

$(\psi, \hat{T}\phi) = \left(\psi, \frac{\hat{p}^2}{2m}\phi\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)dx = -\frac{\hbar^2}{2m}\int\psi^*\frac{d^2\phi}{dx^2}dx = -\frac{\hbar^2}{2m}\underbrace{\left[\psi^*\frac{d\phi}{dx}\right]\Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{0\ (\delta\acute{\iota}\nu\varepsilon\tau\alpha\iota)} + \frac{\hbar^2}{2m}\int\frac{d\psi^*}{dx}\frac{d\phi}{dx}dx =$

$= \frac{\hbar^2}{2m}\underbrace{\left[\phi\frac{d\psi^*}{dx}\right]\Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{\to 0} - \frac{\hbar^2}{2m}\int\frac{d^2\psi^*}{dx^2}\phi\,dx = \int\left[\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\right)\psi\right]^*\phi\,dx = \int\left[\frac{\hat{p}^2}{2m}\psi\right]^*\phi\,dx = \left(\frac{\hat{p}^2}{2m}\psi, \phi\right)$, άρα είναι ερμητιανός.

Θ5. Να ελέγξετε αν ο τελεστής $x^2 \cdot (A + 2) \cdot p_x + y \cdot (B + 1) \cdot p_x$ είναι ερμιτιανός, χρησιμοποιώντας τον συζυγή τελεστή.

$[x^2(A+2)p_x + y(B+1)p_x]^\dagger = (A+2)(x^2p_x)^\dagger + (B+1)(y p_x)^\dagger = (A+2)p_x^\dagger(x^2)^\dagger + (B+1)p_x^\dagger y^\dagger =$

$= (A+2)p_x^\dagger x^\dagger x^\dagger + (B+1)p_x^\dagger y^\dagger \underset{\uparrow}{=} (A+2)p_x x\cdot x + (B+1)p_x y = (A+2)p_x x^2 + (B+1)p_x y =$

αφού $\hat{x}, \hat{y}, \hat{p}_x$ ερμητιανοί

← εδώ αλλάζω σειρά

$= (A+2)p_x x^2 + (B+1)y p_x \neq (A+2)x^2p_x + (B+1)y p_x$

δεν μπορώ να αλλάξω σειρά

άρα δεν είναι ερμητιανός