Σεπτέμβριος 2021 QM I, α.γ. τσεγιάς

Θ1 (α) $(\psi, \hat{W}_{x_0}\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\hat{W}_{x_0}\phi(x)dx = \int \psi(x)\phi(x_0-x)dx \xrightarrow{y=x_0-x} \int \psi(x_0-y)\phi(y)d(x_0-y) =$
$= -\int_{+\infty}^{-\infty} \psi(x_0-y)\phi(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\phi(y)\hat{W}_{x_0}\psi(y)dy = (\hat{W}_{x_0}\psi, \phi)$, άρα είναι ερμιτιανός.

(β) $\hat{W}_{x_0}\psi(x) = \xi\psi(x)$. $(\hat{W}_{x_0})^2\psi(x) = \hat{W}_{x_0}(\hat{W}_{x_0}\psi(x)) = \hat{W}_{x_0}\psi(x_0-x) = \psi(x_0-(x_0-x)) = \psi(x)$
και $(\hat{W}_{x_0})^2\psi(x) = \xi^2\psi(x)$ άρα $\xi^2 = 1 \rightarrow \boxed{\xi = \pm 1}$ ιδιοτιμές.
Οι ιδιοσυναρτήσεις προσδιορίζονται από τις σχέσεις $\psi(x_0-x) = \pm\psi(x)$
Με $\xi=1$, έχουμε (π.χ.) $\cos(x)$ & $x_0 = 2\nu\pi$ (ν: ακέραιος) και $\xi=-1$ με $\psi(x)=\sin(x)$ & $x_0=\nu\pi$.

Θ2 Ελάχιστη τιμή η $\frac{1}{2}|\langle[\hat{K}, \hat{\ell}_x]\rangle|$. Έχουμε $[K, \ell_x] = [\frac{p_y^2}{2m}, yp_z - zp_y] = \frac{1}{2m}[p_y^2, yp_z] =$
$= \frac{1}{2m}p_y[p_y, yp_z] + \frac{1}{2m}[p_y, yp_z]p_y = \frac{1}{2m}p_y[p_y, y]p_z + \frac{1}{2m}[p_y, y]p_z p_y = \frac{-i\hbar}{2m}p_y p_z - \frac{i\hbar}{2m}p_z p_y$.
Άρα $[(\Delta\hat{K})(\Delta\hat{\ell}_x)]_{\text{ελάχιστο}} = \frac{\hbar}{4m}|\langle\hat{p}_x\hat{p}_y + \hat{p}_y\hat{p}_x\rangle|$.

Θ3 (α) Ο τελεστής της Χαμιλτονιανής είναι ερμιτιανός, δηλαδή $H_{12} = H_{21}^*$.
Άρα $\delta = (-\delta)^* = -\delta^*$, αυτό μπορεί να συμβεί όταν $\delta = ik$ (k: πραγματικός)
(β) Διαγωνοποιούμε την $\hat{H} = \begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon} & ik \\ -ik & \tilde{\varepsilon} \end{bmatrix}$, όπου $\tilde{\varepsilon} = (A+2)\varepsilon$. Τέτοιας μορφής $\hat{H}$
έχουν διαγωνοποιηθεί 'δεκάδες' φορές, οπότε έχουμε ιδιοτιμές $\tilde{\varepsilon} \pm k$.
(γ) Με ιδιοδιανύσματα $|\tilde{\varepsilon}\pm k\rangle = [|1\rangle \mp i|2\rangle]/\sqrt{2}$ (ή $[\pm|1\rangle + |2\rangle]/\sqrt{2}$).
(δ) Οι ιδιοτιμές του $\hat{W}$ είναι (διαγωνοποίηση $|w|\begin{bmatrix}1 & -i\\ i & 1\end{bmatrix}$), $0|w|$ & $2|w|$, με
ιδιοσυναρτήσεις $|0|w|\rangle = (|1\rangle - |2\rangle)/\sqrt{2}$ και $|2|w|\rangle = (|1\rangle + |2\rangle)/\sqrt{2}$. Αφού η μέτρηση
δίνει θετική τιμή, έχουμε $|\psi(x, t=0)\rangle = (|1\rangle + |2\rangle)/\sqrt{2} = |\tilde{\varepsilon} - k\rangle$, που είναι
ιδιοκατάσταση της ενέργειας. Δηλαδή έχουμε στάσιμη κατάσταση και
$|\psi(x,t)\rangle = |\tilde{\varepsilon} - k\rangle = (|1\rangle + |2\rangle)/\sqrt{2}$.
(ε) Οπότε ο ρυθμός μεταβολής της $\langle\hat{W}\rangle(t)$ είναι μηδέν.

Θ4 Έχουμε $\left[1 + \frac{(B+\Delta)^2}{(\Gamma+3)^2}\right]|c|^2 = 1 \rightarrow |c| = (\Gamma+3)/\sqrt{(\Gamma+3)^2 + (B+\Delta)^2}$.
(α) $\langle E\rangle = |c|^2E_1 + |c|^2\left(\frac{B+\Delta}{\Gamma+3}\right)^2E_2 = |c|^2\left[1 + 4\left(\frac{B+\Delta}{\Gamma+3}\right)^2\right]E_1 = \frac{[(\Gamma+3)^2 + 4(B+\Delta)^2]}{(\Gamma+3)^2 + (B+\Delta)^2}E_1$.

(β) Αφού $\langle p\rangle(t) = 2|c_1||c_2|\cos(\omega t + \phi_{12} + \delta_{21}^p)|P_{21}|$ με $P_{21} = -\frac{8\hbar i}{3L} = \frac{8\hbar}{3L}e^{-i\pi/2}$ $\left(|P_{21}| = \frac{8\hbar}{3L}, \delta_{21}^p = -\frac{\pi}{2}\right)$
και αφού $c_1 = |c|i = |c|e^{i\pi/2} \rightarrow \phi_{12} = \frac{\pi}{2}$.
Άρα $\langle p\rangle(t) = 2|c_1||c_2|\frac{8\hbar}{3L}\cos(\omega t) = 2\cdot\frac{(B+\Delta)(\Gamma+3)}{(\Gamma+3)^2 + (B+\Delta)^2}\cdot\frac{8\hbar}{3L}\cos(\omega t)$, με $\omega = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}$.

Θ5 Ενέργεια θεμελιώδους $n_x = n_y = n_z = 1$, με $E_{n_x,n_y,n_z} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$
Άρα $E_{111} = \frac{3\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$. Έχουμε $E_{111} = 3\left[\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\right] \sim \frac{3}{L^2}\frac{1}{3}eV$, αν L σε nm.
Αφού $E_{111} = (A+B+\Gamma+1)eV$, έχουμε
$$L = \frac{10}{[A+B+\Gamma+1]^{1/2}} \text{ Å}.$$

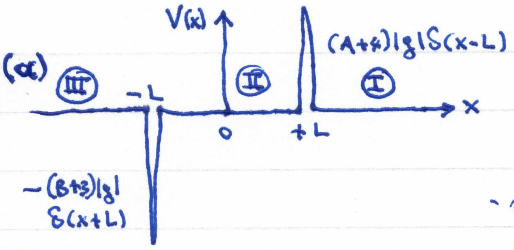
Θ6. (α) $x_{10} = (\psi_1, \hat{x}\psi_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/4}} x e^{-x^2/2} \cdot x \cdot \frac{1}{\pi^{1/4}} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int x^2 e^{-x^2} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(β) $p_{10} = \langle 1|\hat p|0\rangle = \langle 1|\left(\frac{\hat a - \hat a^+}{i\sqrt2}\right)|0\rangle = \frac{\langle 1|(\hat a|0\rangle - \hat a^+|0\rangle)}{\sqrt2\, i} = \frac{\langle 1|(0 - |1\rangle)}{\sqrt2\, i} = \frac{-\langle 1|1\rangle}{\sqrt2\, i} = \frac{i}{\sqrt2}$ (φ.Σ.Μ.)

(γ) Από $\langle E\rangle = |c_0|^2\frac12 + |c_1|^2\frac32 = 1$ & $|c_1|^2+|c_0|^2=1$, βρίσκουμε $|c_0|=|c_1|=1/\sqrt2$

Έχουμε ότι $\langle p\rangle(t) = 2|c_0||c_1||p_{10}|\cos(\omega t + \phi_{01} + \delta^p_{10}) = \frac{1}{\sqrt2}\cos(\omega t + A\pi + \frac{\pi}{2})$, καθώς $p_{10} = \frac{i}{\sqrt2} = \frac{1}{\sqrt2}e^{i\frac{\pi}{2}}$, άρα $|p_{10}| = \frac{1}{\sqrt2}$ και $\delta^p_{10} = \frac{\pi}{2}$, ενώ δίνεται ότι το $c_0 = |c_0|e^{iA\cdot\pi}$ άρα $\phi_{01} = A\pi$. Οπότε $\langle p\rangle(t) = \frac{(-1)^{(A+1)}}{\sqrt2}\sin(\omega t)$, $\omega=1$ (φ.Σ.Μ)

Θ7. (α)



$\psi_I(x>L) = e^{-ikx} + Ae^{ikx}$

$\psi_{II}(|x|\le L) = B_+e^{ikx} + B_-e^{-ikx}$

$\psi_{III}(x<-L) = Ce^{-ikx}$

Όπου $E = \frac{\hbar^2k^2}{2m}$.

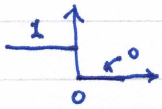
(β) Συνοριακές συνθήκες με συνέχεια της κυματοσυνάρτησης και ασυνέχεια της παραγώγου της, στα σημεία $x=\pm L$.

Δηλαδή $\psi_I(L)=\psi_{II}(L) \to e^{-ikL} + Ae^{ikL} = B_+e^{ikL} + B_-e^{-ikL}$ & $\psi_{III}(-L)=\psi_{II}(-L) \to Ce^{ikL} = B_+e^{-ikL} + B_-e^{ikL}$

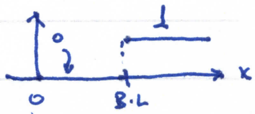
και $\psi_I'(L) - \psi_{II}'(L) = \frac{2m}{\hbar^2}(A+4)|g|\psi_I(L) \to ik(Ae^{ikL} - e^{-ikL}) - ik(B_+e^{ikL} - B_-e^{-ikL}) = \frac{2m(A+4)|g|}{\hbar^2} \times (e^{-ikL} + Ae^{ikL})$

& $\psi_{II}'(-L) - \psi_{III}'(-L) = -\frac{2m}{\hbar^2}(B+3)|g|\psi_{III}(-L) \to ik(B_+e^{-ikL} - B_-e^{ikL}) + ikCe^{ikL} = -\frac{2m(B+3)|g|}{\hbar^2}Ce^{ikL}$.

Θ8. Καθώς $\Theta(-x) = \begin{cases} 0 & -x<0 \to x>0 \\ 1 & -x>0 \to x<0 \end{cases}$

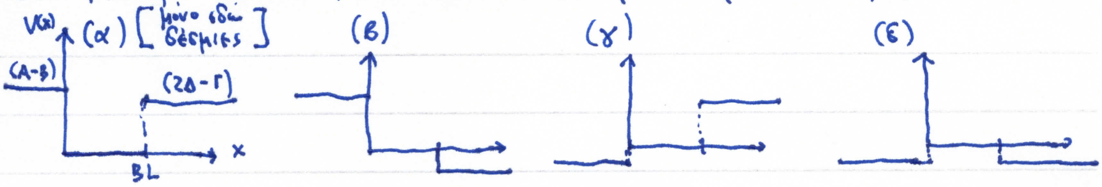


& $\Theta(x-B\cdot L) = \begin{cases} 0 & x<BL \\ 1 & x>BL \end{cases}$



Στην περιοχή $0\le x\le B\cdot L$, έχουμε $V(x)=0$, ενώ εκτός έχουμε σημαντική εξάρτηση απο τους συντελ

(A−B)	(2Δ−Γ)	περίπτωση
+	+	(α)
+	−	(β)
−	+	(γ)
−	−	(δ)



Θ9. Προφανώς $\ell=m=0$, μια και $\eta=0$ και $\ell\le n-1$, $|m|\le\ell$. Από συνθήκη νορμαλισμού έχουμε $|N| = [\Delta^4 + (B+1)^2]^{-1/2}$. (α) $\psi(\vec r,t) = \frac{\Delta^2}{|N|}\psi_{100}\cdot e^{-E_1 t} + \frac{(B+1)}{|N|}\psi_{200}e^{-E_2 t}$, με $E_n = -1/2n^2$, $n=1,2$ στο φ.Σ.Μ.

(β) $\langle E\rangle = \frac{\Delta^4}{|N|^2}E_1 + \frac{(B+1)^2}{|N|^2}E_2 = \frac{4\Delta^4 + (B+1)^2}{-8[\Delta^4 + (B+1)^2]}$ (γ) $\langle \ell_x^2+\ell_y^2\rangle(t=0) = \langle \ell^2-\ell_z^2\rangle = \langle\ell^2\rangle - \langle\ell_z^2\rangle = \dots = 0$.

(δ) Αφού $\hat\ell_x = \frac{\hat\ell_+ + \hat\ell_-}{2}$, χρειαζόμαστε τα $\hat\ell_-\psi_{100} = \sqrt{0(0+1)-0(0-1)}\,\psi_{..} = 0$, $\hat\ell_+\psi_{100}=0$ και $\hat\ell_-\psi_{200}=0$ και $\hat\ell_+\psi_{200}=0$. Οπότε $\langle\hat\ell_x\rangle(t)=0$.