



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα ΠΠ

Κβαντική Φυσική Ι

Ενότητα 25: Ασκήσεις

Ανδρέας Τερζής
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Φυσικής

Άσκηση 25.1

- Ένας αρμονικός ταλαντωτής βρίσκεται στις δύο πρώτες ενεργειακές καταστάσεις του.
 1. Προσδιορίστε ακριβώς αυτήν την κατάσταση, αν γνωρίζουμε ότι $\langle E \rangle = \frac{5}{4}$, $\langle p \rangle = 0$.
 2. Υπολογίστε την μέση τιμή της θέσης χρησιμοποιώντας την σχέση
$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* (x) x \psi(x) dx.$$



Απάντηση

$$1. \psi(x) = \frac{1}{2}\psi_0 + \psi_1$$

$$2. \langle x \rangle = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$



Άσκηση 25.2

Αρμονικός ταλαντωτής υπάρχει ίση πιθανότητα να βρίσκεται στις δύο πρώτες ενεργειακές καταστάσεις. (α) Να γραφεί η κυματοσυνάρτηση $\psi(x, t)$ του ταλαντωτή. Ποια ή ποιες συνοριακές συνθήκες ικανοποιεί η κυματοσυνάρτηση αυτή; (β) Έχει ορισμένη αρτιότητα η κυματοσυνάρτηση αυτή; Αν, ναι τι αρτιότητα έχει; Αν όχι, εξηγήστε γιατί όχι. (γ) Παριστάνει στάσιμη κατάσταση αυτή η κυματοσυνάρτηση; Αποδείξτε την απάντησή σας. (δ) Υπολογίστε την μέση τιμή της ολικής ενέργειας.



Απάντηση

A) $\psi(x, t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\sqrt{\pi}}} [1 + \sqrt{2}x e^{-i\omega t}]$, με συνοριακές συνθήκες $\psi(x \rightarrow \pm\infty) = 0$.

B) Δεν έχει ορισμένη αρτιότητα.

Γ) $P(x, t) = \frac{e^{-x^2}}{2\sqrt{\pi}} [1 + 2x^2 + 2\sqrt{2}x \cos\omega t]$, που είναι χρονοεξαρτώμενη πιθανότητα, άρα δεν παριστάνει στάσιμη κατάσταση.

$$\Delta) \langle E \rangle = \hbar\omega$$



Άσκηση 25.3

- Ένας αρμονικός ταλαντωτής βρίσκεται στις δύο πρώτες ενεργειακές καταστάσεις, ενώ υπάρχει πιθανότητα $2/3$ να βρίσκεται στη θεμελιώδη κατάσταση.
- (α) Να γραφεί η κυματοσυνάρτηση $\psi(x, t)$ του ταλαντωτή. Να εξηγηθεί κάθε όρος της και να δοθεί η πλήρης έκφρασή του.
- (β) Έχει ορισμένη αρτιότητα (ισοτιμία ή parity) η κυματοσυνάρτηση αυτή;
- (γ) Παριστάνει στάσιμη κατάσταση αυτή η κυματοσυνάρτηση; Αποδείξτε την απάντησή σας.
- (δ) Υπολογίστε την μέση τιμή της ολικής ενέργειας.



Απάντηση

$$(\alpha) \psi(x, t) = \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{it}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2}} x e^{-\frac{3it}{2}}$$

(β) Όχι, διότι είναι γραμμικός συνδυασμός άρτιας και περιττής συνάρτησης.

(γ) Όχι, διότι η πιθανότητα είναι χρονοεξαρτώμενη:

$$P(x, t) dx = \frac{2dx}{3\sqrt{\pi}} e^{-x^2} (1 + x^2 + 2x \cos t)$$

$$(\delta) \langle E \rangle = \frac{5}{6}$$



Άσκηση 25.4

- Μονοδιάστατο κβαντικό σύστημα περιγράφεται από την χαμιλτονιανή $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + 5m\omega^2 x x_0$.
- Αν είναι γνωστό ότι βρίσκεται στην θεμελιώδη του κατάσταση, (α) να βρεθεί η μέση ενέργειά του (σε $\hbar\omega$) και (β) η μέση θέση του. Ισχύει $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$.

Απάντηση: Έχουμε μετατοπισμένο αρμονικό ταλαντωτή. Η χαμιλτονιανή μπορεί να γραφεί ως

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x + 5x_0)^2 - \frac{25}{2}\hbar\omega. \langle E \rangle = -12\hbar\omega, \langle x \rangle = -5x_0$$



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, **Ανδρέας Τερζής**. Ανδρέας Τερζής
«**Κβαντική Φυσική Ι. Ασκήσεις**». Έκδοση: **1.0**. Πάτρα **2015**. Διαθέσιμο από τη
δικτυακή διεύθυνση: <https://eclass.upatras.gr/courses/PHY1957/>



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.