Κβαντική Φυσική Ι

Ενότητα 30: Θεωρία στροφορμής

Ανδρέας Τερζής
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Φυσικής

Σκοποί ενότητας

- Σκοπός της ενότητας είναι να παραθέσει την αλγεβρική θεωρία της στροφορμής.

Περιεχόμενα ενότητας

- Η εξίσωση ιδιοτιμών για τον τελεστή l^2.
- Οι τελεστές αναβίβασης και καταβίβασης l_+, l_-.

Ο τελεστής l^2

- Ισχύει ότι $l^2 = {l_x}^2 + {l_y}^2 + {l_z}^2$ με

$$l_x = i\hbar\left(sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{cos\varphi}{tan\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),$$

$$l_y = i\hbar\left(-cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{sin\varphi}{tan\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),$$

$$l_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

- Άρα έχουμε

$$l^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] \quad (1)$$

Εξίσωση ιδιοτιμών για τον l^2

- Στην προηγούμενη ενότητα, λύσαμε το πρόβλημα ιδιοτιμών για τον l_z. Είπαμε ότι $l_z\Phi(\varphi) = \mathrm{m}\hbar\Phi(\varphi)$, με $\Phi(\varphi) = e^{im\varphi}$.
- Τότε η (1) παίρνει την μορφή
$$-\hbar^2\left[\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right] - \frac{m^2}{sin^2\theta} = \Lambda$$
- Ο Λ είναι ένας νέος τελεστής. Το πρόβλημα ιδιοτιμών του είναι ουσιαστικά λυμένο, καθώς αποτελεί το μέρος της χαμιλτονιανής του ατόμου του υδρογόνου, που εξαρτάται από το θ. Δηλ.
$$\Lambda\Theta(\theta) = \hbar^2 l(l+1)\Theta(\theta)$$
- Συμπεραίνουμε από τα παραπάνω ότι οι κοινές ιδιοσυναρτήσεις των l^2 και l_z είναι οι σφαιρικές αρμονικές, δηλ.
$$l^2 Y_{lm}(\theta,\varphi) = \hbar^2 l(l+1)Y_{lm}(\theta,\varphi)$$
$$l_z Y_{lm}(\theta,\varphi) = m\hbar Y_{lm}(\theta,\varphi)$$
- Θυμίζουμε ότι οι τελεστές l^2, l_z μπορούν να μετρηθούν ταυτόχρονα.

Οι τελεστές l_+, l_-

- Θυμίζουμε τις μεταθετικές σχέσεις
$$[l_x, l_y] = il_z, [l_y, l_z] = il_x, [l_z, l_x] = il_y$$
- Έχουμε θεωρήσει $\hbar = 1$.
- Η αλγεβρική θεωρία της στροφορμής έχει παρόμοια λογική με αυτήν του αρμονικού ταλαντωτή.
- Ξεκινάμε από την παρατήρηση ότι
$$l^2 = {l_x}^2 + {l_y}^2 + {l_z}^2 = (l_x + il_y)(l_x - il_y) + {l_z}^2.$$
- Αυτή η ισότητα ισχύει αν τα l_x, l_y, l_z ήταν πραγματικοί αριθμοί. Αν τα θεωρήσουμε τελεστές, πρέπει να είμαστε πιο προσεχτικοί.
- Ορίζουμε δύο νέους τελεστές τους $l_+ = l_x + il_y, l_- = l_x - il_y$.
- Βρίσκουμε ότι

$[l_z, l_+] = [l_z, l_x + il_y] = [l_z, l_x] + i[l_z, l_y] = il_y + l_x = l_+$ και $[l_z, l_-] = -l_-$,
$$l_+ l_- = (l_x + il_y)(l_x - il_y) = ({l_x}^2 + {l_y}^2) - i(l_x l_y - l_y l_x) = l^2 - {l_z}^2 + l_z.$$

Η δράση των τελεστών l_+, l_-

- Γράφουμε τις εξισώσεις ιδιοτιμών των l^2, l_z στον συμβολισμό Dirac: $l^2|l,m\rangle = l(l+1)|l,m\rangle, l_z|l,m\rangle = m|l,m\rangle$,

όπου $|l,m\rangle = Y_{lm}$.

- $l_+|l,m\rangle = [l_z, l_+]|l,m\rangle = l_z l_+|l,m\rangle - l_+ l_z|l,m\rangle \Rightarrow$
$$l_z(l_+|l,m\rangle) = (m+1)(l_+|l,m\rangle)$$
- Άρα $l_+|l,m\rangle = \mathrm{C}|l,m+1\rangle$. Είναι ο τελεστής αναβιβασμού, διότι αυξάνει το m κατά ένα.
- Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι $l_-|l,m\rangle = \mathrm{D}|l,m-1\rangle$.

Να θυμίσουμε τον περιορισμό $|m| \le l$.

Ο l_- είναι λοιπόν ο τελεστής υποβιβασμού. Οι C, D είναι σταθερές που θα προσδιοριστούν στην συνέχεια.

Προσδιορισμός σταθερών C, D.

- Έχουμε $l_+|l,m\rangle = \mathrm{C}|l,m+1\rangle$ και $\langle l,m|(l_+)^+ = C^+\langle l,m+1|$. Άρα
- $\langle l,m|l_-l_+|l,m\rangle = C^2$.
- Επίσης, $l_-l_+ = l^2 - {l_z}^2 - l_z$
- Επομένως $l_-l_+\big|l,m\rangle = \left(l^2 - {l_z}^2 - l_z\right)\big|l,m\rangle =$
$$[l(l+1) - m^2 - m]|l,m\rangle$$
- Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $C = \sqrt{l(l+1) - m(m+1)}$.
- Με την ίδια λογική βρίσκουμε ότι $D = \sqrt{l(l+1) - m(m-1)}$.

Τελικές εκφράσεις

- Άρα εν τέλει θα έχουμε

$$l_+|l,m\rangle = \sqrt{l(l+1)-m(m+1)}|l,m+1\rangle$$
$$l_-|l,m\rangle = \sqrt{l(l+1)-m(m-1)}|l,m-1\rangle$$

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημείωμα Αναφοράς

 Ανδρέας Τερζής . «Κβαντική Φυσική Ι. Θεωρία στροφορμής». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: https://eclass.upatras.gr/courses/PHY1957/

Σημείωμα Αδειοδότησης