Κβαντική Φυσική Ι

Ενότητα 28: Νανοδομές και παραδείγματα

Ανδρέας Τερζής
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Φυσικής

Σκοποί ενότητας

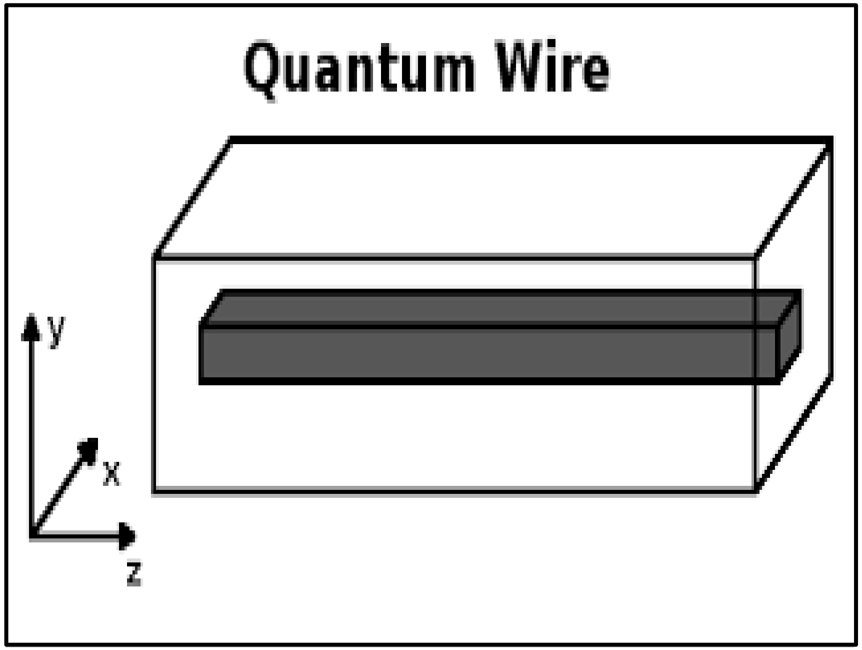
- Σκοπός της ενότητας είναι να παραθέσει κάποιες ακόμη νανοδομές με εφαρμογές για την καλύτερη κατανόησή τους.

Περιεχόμενα ενότητας

- Κβαντικό σύρμα
- Ο ισότροπος και ανισότροπος αρμονικός ταλαντωτής
- Δισκοειδές απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού

Το κβαντικό σύρμα

Εικόνα 1: Κβαντικό σύρμα



- Το κβαντικό σύρμα αποτελεί ένα ηλεκτρικά αγώγιμο σύρμα στο οποίο λαμβάνουν χώρα κβαντομηχανικά φαινόμενα.
- Προσομοιώνεται σαν απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού στους άξονες x και y και ελεύθερο σωμάτιο στον z(στον άξονα z μπορεί να έχει άπειρη έκταση).
- Έτσι, οι ιδιοτιμές της ενέργειας δίνονται από την σχέση $E_{n_x,n_y,k_z} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m}\left(\frac{{n_x}^2}{{L_x}^2} + \frac{{n_y}^2}{{L_y}^2}\right) + \frac{\hbar^2{k_z}^2}{2m}$.
- Η κυματοσυνάρτηση θα είναι

$$\psi_{n_x,n_y,k_z} = \frac{2}{\sqrt{L_x L_y}} sin\frac{n_x \pi x}{L_x} sin\frac{n_y \pi y}{L_y} e^{ik_z z}.$$

Ισότροπος αρμονικός ταλαντωτής δύο διαστάσεων

- Με τον όρο αυτό εννοούμε ότι έχουμε δύο μονοδιάστατους αρμονικούς ταλαντωτές με ίδια ιδιοσυχότητα, δηλ. $\omega_x = \omega_y = \omega$(όπου ω_x, ω_y είναι οι συχνότητες στις διαστάσεις x και y αντίστοιχα).
- Το δυναμικό είναι $V(x, y) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 y^2$.
- Οι αντίστοιχες εξισώσεις Schrödinger είναι

$$-\frac{\hbar^2}{2m}X'' + \frac{1}{2}m\omega^2 X = E_x X,$$
$$-\frac{\hbar^2}{2m}Y'' + \frac{1}{2}m\omega^2 Y = E_y Y.$$

- Τα επιμέρους αποτελέσματα είναι

$X(x) = N_{n_x} e^{-\frac{x^2}{2}} H_{n_x}(x)$, με $\mathrm{E}_{n_x} = n_x + \frac{1}{2}$ και

$Y(y) = N_{n_y} e^{-\frac{y^2}{2}} H_{n_y}(y)$, με $\mathrm{E}_{n_y} = n_y + \frac{1}{2}$

Κυματοσυνάρτηση και ενέργεια

- Η συνολική κυματοσυνάρτηση είναι

$\psi = N_{n_x} N_{n_y} e^{-(x^2+y^2)/2} H_{n_x}(x) H_{n_y}(y)$, όπου N_{n_x}, N_{n_y} οι σταθερές κανονικοποίησης.

- Οι ιδιοτιμές της ενέργειας δίνονται από την σχέση

$$\mathrm{E} = n_x + n_y + 1.$$

- Όπως παρατηρούμε στον ισότροπο αρμονικό ταλαντωτή μπορούμε να έχουμε εκφυλισμένες καταστάσεις, π.χ. για $(n_x = 0, n_y = 1)$ και $(n_x = 1, n_y = 0)$.

Εφαρμογή

- Να βρεθεί η κυματοσυνάρτηση που αντιστοιχεί σε δυναμικό
$$V(x,y)=\frac{1}{2}m\omega^2x^2+\frac{1}{2}m\omega^2xx_0+\frac{1}{2}m\omega^2y^2.$$
- Έχουμε $V(x)=\frac{1}{2}m\omega^2x^2+\frac{1}{2}m\omega^2xx_0=$
$$\frac{1}{2}m\omega^2\left(x^2+x_0x+\frac{{x_0}^2}{4}-\frac{{x_0}^2}{4}\right)=$$
$$\frac{1}{2}m\omega^2\left(x+\frac{x_0}{2}\right)^2-\frac{m\omega^2{x_0}^2}{8}$$
- Στην διάσταση x έχουμε λοιπόν έναν μετατοπισμένο αρμονικό ταλαντωτή. Είναι μετατοπισμένος κατά $\frac{x_0}{2}$ προς τ' αριστερά. Το δυναμικό

έχει ελάχιστο για $x=-\frac{x_0}{2}$, το $y=-\frac{m\omega^2{x_0}^2}{8}$.

Αποτελέσματα

- Η λύση για τον άξονα x μπορεί να βρεθεί απ' ευθείας. Θα είναι μετατοπισμένη κατά ${}^{x_0}/_2$:

$X(x) = N_{n_x} e^{-\frac{\left(x+{}^{1}/_{2}\right)^2}{2}} H_{n_x}\left(x + \frac{1}{2}\right)$, όπου έχουμε κάνει χρήση του φυσικού συστήματος μονάδων κι έχουμε θέσει $x_0 = 1$.

- Η λύση στην διάσταση y παραμένει ως έχει, διότι η μορφή του δυναμικού στην διάσταση y δεν έχει αλλάξει.

Ανισότροπος αρμονικός ταλαντωτής δύο διαστάσεων

- Με τον όρο αυτό εννοούμε τον ταλαντωτή στον οποίο σε κάθε διάσταση αντιστοιχούν διαφορετικές συχνότητες.
- Το δυναμικό είναι δηλ. της μορφής

$$V(x, y) = \frac{1}{2} m {\omega_x}^2 x^2 + \frac{1}{2} m {\omega_y}^2 y^2$$

με $\omega_x \neq \omega_y$.

- Σ’ αυτήν την περίπτωση δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το φυσικό σύστημα μονάδων, γιατί θα είχαμε $\omega_x = \omega_y = 1$, πράγμα άτοπο.

Αποτελέσματα

- Η κυματοσυνάρτηση θα είναι

$$\psi(x,y) = N_{n_x} N_{n_y} e^{-\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 \frac{1}{2}} e^{-\left(\frac{y}{y_0}\right)^2 \frac{1}{2}} H_{n_x}\left(\frac{x}{x_0}\right) H_{n_y}\left(\frac{y}{y_0}\right)$$

- Η ενέργεια θα είναι

$$\mathrm{E}_{n_x,n_y} = \left(n_x + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_x + \left(n_y + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_y,$$

με $n_x, n_y = 0,1,\ldots$ και $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_x}}, y_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_y}}$.

Εφαρμογή

- Ισότροπος αρμονικός ταλαντωτής δύο διαστάσεων βρίσκεται την $t = 0$, σε κατάσταση που αντιστοιχεί σε ισοπίθανη κατάληψη των καταστάσεων $(n_x, n_y) = (1{,}0)$ και $(0{,}1)$. Να βρεθούν

Α) Η κυματοσυνάρτηση του συστήματος

Β) Η μέση θέση

Ερώτημα Α

- Ισοπίθανη κατάληψη σημαίνει $\mathrm{P}_1 = P_2 = \frac{1}{2}$. Άρα

$$c_1 = c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Επομένως η κυματοσυνάρτηση είναι

$$\psi(x, y, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} N_0 N_1 e^{-\frac{x^2}{2}} H_1(x) e^{-\frac{y^2}{2}} H_0(y) + \frac{1}{\sqrt{2}} N_0 N_1 e^{-\frac{x^2}{2}} H_0(x) e^{-\frac{y^2}{2}} H_1(y)$$

ή $\psi(x, y, t) = \frac{N_0 N_1}{\sqrt{2}} e^{-\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)} (x + y) e^{-2it}$ (καθώς $\mathrm{E}_{0,1} = \mathrm{E}_{1,0} = 2$), δηλαδή πρακτικά χρονοανεξάρτητη (στάσιμη) κατάσταση, αφού

$\psi^*(t)\psi(t) = \frac{{N_0}^2 {N_1}^2}{2} e^{-(x^2+y^2)} (x + y)^2.$

Ερώτημα Β

- Για την μέση θέση έχουμε

$$\langle \vec{r} \rangle = \langle \psi | \vec{r} | \psi \rangle = \langle \psi | x\hat{x} + y\hat{y} | \psi \rangle =$$
$$\langle \psi | x | \psi \rangle \hat{x} + \langle \psi | y | \psi \rangle \hat{y}.$$

Ισχύει ότι $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle_x|0\rangle_y + \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_x|1\rangle_y$,

$$\langle \psi | = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1|_x\langle 0|_y + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 0|_x\langle 1|_y, x = \frac{\alpha_x + a_x{}^\dagger}{\sqrt{2}}.$$

- Άρα

$$\langle \psi | x | \psi \rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1|_x\langle 0|_y + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 0|_x\langle 1|_y\right)\frac{\alpha_x + a_x{}^\dagger}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle_x|0\rangle_y + \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_x|1\rangle_y\right) \Rightarrow$$
$$2\sqrt{2}\langle x \rangle = \langle 1|_x\langle 0|_y a_x{}^\dagger|1\rangle_x|0\rangle_y + \langle 1|_x\langle 0|_y \alpha_x|1\rangle_x|0\rangle_y + \langle 1|_x\langle 0|_y a_x{}^\dagger|0\rangle_x|1\rangle_y +$$
$$\langle 1|_x\langle 0|_y \alpha_x|0\rangle_x|1\rangle_y + \langle 0|_x\langle 1|_y a_x{}^\dagger|1\rangle_x|0\rangle_y + \langle 0|_x\langle 1|_y \alpha_x|1\rangle_x|0\rangle_y + \langle 0|_x\langle 1|_y a_x{}^\dagger|0\rangle_x|1\rangle_y +$$
$$\langle 0|_x\langle 1|_y \alpha_x|0\rangle_x|1\rangle_y =$$

$$\sqrt{2}\langle 1|_x|2\rangle_x\langle 0|_y|0\rangle_y + \langle 1|_x|0\rangle_x\langle 0|_y|0\rangle_y + \langle 1|_x|1\rangle_x\langle 0|_y|1\rangle_y + 0 + \sqrt{2}\langle 0|_x|2\rangle_x\langle 1|_y|0\rangle_y + \langle 0|_x|0\rangle_x\langle 1|_y|0\rangle_y +$$
$$+\langle 0|_x|1\rangle_x\langle 1|_y|1\rangle_y + 0 = 0.$$

Ερώτημα Β-παρατηρήσεις

- Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε και τον όρο $\langle \psi | y | \psi \rangle$.
- Προφανώς οι τελεστές $\alpha_x, a_x{}^\dagger$ δρουν μόνο στις ιδιοκαταστάσεις $|0\rangle_x, |1\rangle_x$, ενώ οι τελεστές $\alpha_y, a_y{}^\dagger$ στις ιδιοκαταστάσεις $|0\rangle_y, |1\rangle_y$.

Εφαρμογή

- Να βρεθούν οι ιδιοκαταστάσεις ενέργειας δυναμικού $V(x,y) = \frac{1}{4}m\omega^2(x+y)^2$.
- Όπως παρατηρούμε σε αυτήν την περίπτωση $\mathrm{V(x,y)} \neq \mathrm{V}_x + V_y$.
- Θα πραγματοποιήσουμε αλλαγή μεταβλητής, δηλ. θέτουμε $u = \frac{(x+y)}{\sqrt{2}}$ και $w = \frac{(x-y)}{\sqrt{2}}$.

Εξίσωση Schrödinger

- Έτσι θα έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial w}\right).$$

- Άρα $\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{2}(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial w^2} + \frac{\partial^2}{\partial w \partial u} + \frac{\partial^2}{\partial u \partial w})$
- Ανάλογα προκύπτει ότι

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{2}(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial w^2} - \frac{\partial^2}{\partial w \partial u} - \frac{\partial^2}{\partial u \partial w})$$

- Επομένως $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial w^2}$.
- Η εξίσωση Schrödinger θα είναι λοιπόν

$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi(x,y)}{\partial x^2} \ -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi(x,y)}{\partial y^2} + \frac{1}{4}m\omega^2(x+y)^2 = E\psi(x,y)$ ή

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi(u,w)}{\partial u^2} \ -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi(u,w)}{\partial w^2} + \frac{1}{4}m\omega^2 u^2 = E\psi(u,w).$$

Η κυματοσυνάρτηση και η ενέργεια

- Για το δυναμικό έχουμε ότι
$$V(u,w)=\frac{1}{2}m\omega^2u^2+0=V_u(u)+V_w(w).$$
- Συνεπώς έχουμε στην u διάσταση αρμονικό ταλαντωτή και στην w ελεύθερο σωμάτιο.
- Οπότε η κυματοσυνάρτηση είναι
$$\psi(x,y)=\psi(u,w)=N_{n_u}e^{-\left(\frac{u}{u_0}\right)^2\frac{1}{2}}H_{n_u}\left(\frac{u}{u_0}\right)e^{ik_w w}.$$
- Η ενέργεια είναι $\mathrm{E}=\mathrm{E}_u+E_w=\hbar\omega\left(n_u+\frac{1}{2}\right)+\frac{\hbar^2k^2}{2m}$.
- Παρατήρηση: Ο μετασχηματισμός συντεταγμένων που μόλις πραγματοποιήσαμε είναι ουσιαστικά μια στροφή κατά 45°:
$$\binom{u}{w}=\begin{pmatrix}cos\,{}^{\pi}/_{4} & sin\,{}^{\pi}/_{4}\\ -sin\,{}^{\pi}/_{4} & cos\,{}^{\pi}/_{4}\end{pmatrix}\binom{y}{x}.$$

Εξίσωση Schrödinger σε πολικές συντεταγμένες

- Πρέπει να μετατρέψουμε τους όρους κινητικής ενέργειας από καρτεσιανές σε πολικές συντεταγμένες. Δηλαδή πρέπει να βρούμε την έκφραση

$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ σε πολικές συντεταγμένες.

- Ο μετασχηματισμός συντεταγμένων ανάμεσα στα δύο συστήματα είναι

$$x=\rho cos\varphi, y=\rho sin\varphi, \rho=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}, tan\varphi=\frac{y}{x}.$$

- Άρα $\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\varphi}=cos\varphi\frac{\partial}{\partial\rho}-\frac{sin\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}$ και

$$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\varphi}=sin\varphi\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{cos\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

- $\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=$

$$\left(cos\varphi\frac{\partial}{\partial\rho}-\frac{sin\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left(cos\varphi\frac{\partial}{\partial\rho}-\frac{sin\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)+$$

$$\left(sin\varphi\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{cos\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left(sin\varphi\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{cos\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)=\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

Κυκλικό απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού

- Η εξίσωση Schrödinger σε πολικές, σύμφωνα με όσα είπαμε γράφεται ως
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\psi(\rho,\varphi)+\mathrm{V}(\mathrm{\rho})\mathrm{\psi}(\mathrm{\rho},\mathrm{\varphi})=\mathrm{E}\mathrm{\psi}(\mathrm{\rho},\mathrm{\varphi}).$$
- Το δυναμικό για κυκλικό απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού είναι $V(\rho)=\begin{cases}\infty, \rho>\alpha\\ 0, \rho\leq\alpha\end{cases}$, όπου ρ ηακτίνα του πηγαδιού.
- Για την μελέτη του θα χρησιμοποιήσουμε πολικές συντεταγμένες και άρα για την περιγραφή του αφετηρία είναι η παραπάνω εξίσωση Schrödinger.

Μέθοδος χωριζομένων μεταβλητών

- Θεωρούμε λύση της μορφής

$$\psi = R(\rho)Q(\varphi).$$

- Η φιλοσοφία είναι η ίδια με αυτή των καρτεσιανών συντεταγμένων, δηλ. αντικαθιστούμε την λύση στην εξίσωση, και στην συνέχεια διαιρούμε με την λύση. Καταλήγουμε λοιπόν ότι

$\frac{R''}{R} + \frac{1}{\rho}\frac{R'}{R} + \frac{1}{\rho^2}\frac{Q''}{Q} = -\frac{2mE}{\hbar^2}$ (αφού $V(\rho) = 0$, για $\rho \leq \alpha$.

- Θέτουμε $\kappa^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ κι έχουμε

$\rho^2 \frac{R''}{R} + \rho \frac{R'}{R} + \kappa^2 \rho^2 = -\frac{Q''}{Q} = \nu^2$. Υπενθυμίζουμε ότι θέτουμε με μια

σταθερά ν^2, διότι είναι ο μόνος τρόπος για να ισούται το πρώτο μέλος(μια συνάρτηση του ρ) με το δεύτερο(μια συνάρτηση του φ).

Η γωνιακή εξίσωση της μεθόδου χωριζομένων μεταβλητών

- Οι εξισώσεις που λαμβάνουμε είναι

$Q'' + \nu^2 Q = 0$, με λύσεις της μορφής $Q(\varphi) = e^{i\nu\varphi}$.

- Η σταθερά ν είναι ακέραιος, διότι επιθυμούμε περιοδικότητα των λύσεων. Με λίγα λόγια, είναι λογικό να επιθυμούμε να ισχύει

$$Q(\varphi) = Q(\varphi + 2\pi) \Rightarrow e^{i\nu(\varphi+2\pi)} = e^{i\nu\varphi} \Longrightarrow e^{i\nu 2\pi} = 1.$$

Από την τελευταία ισότητα καταλαβαίνουμε ότι η σταθερά ν είναι ακέραιος.

Η ακτινική εξίσωση της μεθόδου χωριζομένων μεταβλητών

- Η ακτινική εξίσωση που προκύπτει είναι

$$\rho^2 \frac{R''}{R} + \rho \frac{\mathrm{R}'}{R} + \kappa^2 \rho^2 - \nu^2 = 0.$$

- Ορίζουμε νέα μεταβλητή, την $\kappa\rho$, και η εξίσωση γίνεται

$$\frac{d^2 R}{d(\kappa\rho)^2} + \frac{1}{(\kappa\rho)} \frac{dR}{d(\kappa\rho)} + \left(1 - \frac{\nu^2}{(\kappa\rho)^2}\right) = 0.$$

- Η εξίσωση αυτή είναι η εξίσωση Bessel με λύσεις τις συναρτήσεις Bessel ν τάξης $J_\nu(\kappa\rho)$ και τις Newmann (ή Bessel δεύτερης τάξης) $\mathrm{N}_\nu(\kappa\rho)$.

Περίπτωση αζιμουθιακής συμμετρίας

- Αζιμουθιακή συμμετρία σημαίνει ότι δεν υπάρχει εξάρτηση από την γωνία φ.
- Για να μην υπάρχει γωνιακή εξάρτηση θα πρέπει $\nu = 0$.
- Άρα η ακτινική λύση γίνεται $R(\rho) = J_0(\kappa\rho)$.
- Με εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών έχουμε

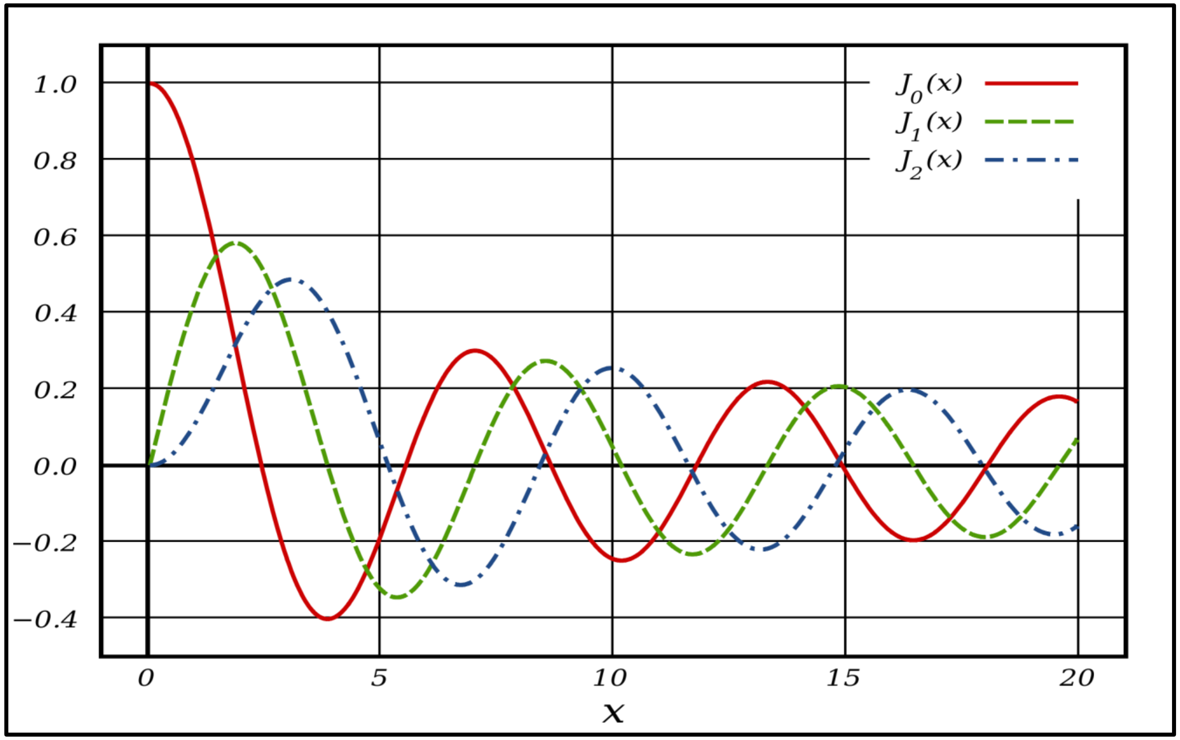
$$R(a) = 0 \Rightarrow J_0(\kappa\alpha) = 0 \Longrightarrow \kappa_n \mathrm{\alpha} = x_n, n = 1,2..,$$

όπου x_n τα σημεία στα οποία μηδενίζεται η J_0.

- Άρα οι ιδιοτιμές της ενέργεια είναι $\mathrm{E} = \frac{\hbar^2}{2ma^2} {x_n}^2$ και οι

ιδιοσυναρτήσεις είναι $\psi(\rho, \varphi) = \mathrm{NJ}_0\left(\frac{x_n \rho}{\alpha}\right)$, όπου N η σταθερά νορμαλισμού.

Γραφική απεικόνιση των Bessel πρώτης τάξης



Απεικονίζονται οι τρεις πρώτες συναρτήσεις Bessel πρώτης τάξης ($\nu = 0, \nu = 1, \nu = 2$). Η μεταβλητή x είναι η $\kappa\rho$($x = \kappa\rho$).

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών,Ανδρέας Τερζής ,2014. Ανδρέας Τερζής . «Κβαντική Φυσική Ι. Νανοδομές και παραδείγματα». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: https://eclass.upatras.gr/courses/PHY1957/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνα 1: http://it.wikipedia.org/wiki/Filo_quantico

Εικόνα 2: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bessel_Functions_(1st_Kind,_n%3D0,1,2).svg