Κβαντική Φυσική Ι

Ενότητα 26: Ολοκλήρωση της αλγεβρικής μεθόδου για την μελέτη του αρμονικού ταλαντωτή

Ανδρέας Τερζής

Σχολή Θετικών Επιστημών

Τμήμα Φυσικής

Σκοποί ενότητας

- Σκοπός της ενότητας είναι να ολοκληρώσει την αλγεβρική μέθοδο για την μελέτη του κβαντικού αρμονικού ταλαντωτή και να δώσει κάποια παραδείγματα όπου φαίνεται η χρησιμότητά της.

Περιεχόμενα ενότητας

- Προσδιορισμός καταστάσεων με βάση τους $\alpha, \alpha^\dagger$.
- Τρόπος υπολογισμού μέσων τιμών με την αλγεβρικη μέθοδο
- Παράδειγμα

Παρατηρήσεις

- Στην προηγούμενη ενότητα δείξαμε πώς οι τελεστές $\hat{\alpha}^{\dagger}, \hat{\alpha}$ δρουν σε μια ιδιοκατάσταση. Θυμίζουμε ότι

$\hat{\alpha}^{\dagger}|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$ και $\hat{\alpha}\big|n\rangle = \sqrt{n}\big|n-1\rangle$.

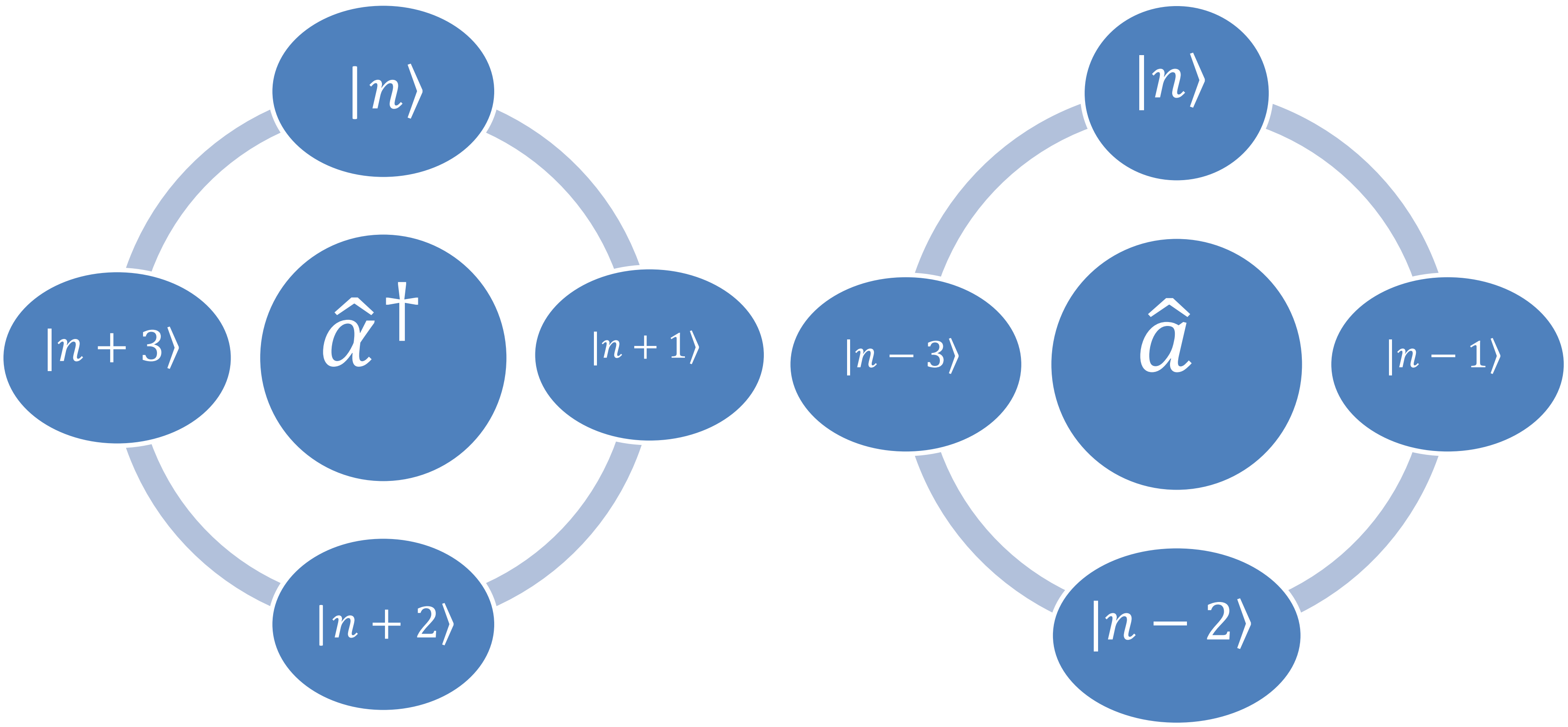
- Με τον τελεστή αναβίβασης $\hat{\alpha}^{\dagger}$ από μια κατάσταση ενέργειας E, μεταβαίνουμε σε μια κατάσταση ενέργειας $\mathrm{E}+1$ (στο φυσικό σύτημα μονάδων ή γενικά $\mathrm{E}+\hbar\omega$ σε οποιοδήποτε σύστημα).

- Με τον τελεστή καταβίβασης $\hat{\alpha}$ μεταβαίνουμε από μια κατάσταση ενέργειας E, σε μια κατάσταση ενέργειας

$\mathrm{E}-1$(στο φυσικό σύστημα μονάδων ή γενικά $\mathrm{E}-\hbar\omega$ σε οποιοδήποτε σύστημα).

- Παρακάτω φαίνεται σχηματικά ένα παράδειγμα διαδοχικής δράσης των τελεστών $\hat{\alpha}^{\dagger}, \hat{\alpha}$ έχοντας ως αφετηρία την κατάσταση $|n\rangle$.

Η δράση των τελεστών $\hat{\alpha}^{\dagger}, \hat{\alpha}$



Η θεμελιώδης κατάσταση

- Ο τελεστής καταβίβασης μας μεταβαίνει σε καταστάσεις όλο και χαμηλότερης ενέργειας.
- Αυτό δεν είναι δυνατόν να συμβαίνει επ' αόριστον. Η ενέργεια επιβάλλεται να έχει κάποια ελάχιστη τιμή που θ' αντιστοιχεί στην θεμελιώδη κατάσταση.
- Αυτό απαιτείται, διότι αν η ενέργεια φτάσει σε μικρότερες τιμές από το δυναμικό $V(x)$ η κυματοσυνάρτηση δεν θα είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη.
- Άρα θα υπάρχει μια ιδιοκατάσταση της ενέργειας στην οποία όταν δράσει ο τελεστής $\hat{\alpha}$, δεν θα είναι δυνατόν να μεταβούμε σε μια κατάσταση χαμηλότερης ενέργειας(δεν θα μπορούμε περαιτέρω να εφαρμόσουμε τον τελεστή $\hat{\alpha}$). Θα ισχύει δηλ. $\hat{\alpha}|n\rangle = 0$. Σε αυτήν την περίπτωση η κατάσταση $|n\rangle$ είναι η θεμελιώδης και συμβολίζεται με $|0\rangle$. Έχουμε λοιπόν $\hat{\alpha}|0\rangle = 0$. Αυτή είναι ουσιαστικά η συνθήκη για τετραγωνικά ολοκληρώσιμες κυματοσυναρτήσεις στον αρμονικό ταλαντωτή.

Εύρεση θεμελιώδους

- Με βάση την συνθήκη $\hat{\alpha}|0\rangle = 0$, θα προσδιορίσουμε την μορφή που έχει η θεμελιώδης κατάσταση $|0\rangle$.
- $a|0\rangle = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(x + ip)|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{d}{dx}\right)|0\rangle = 0.$
- Καταλήγουμε επομένως στην διαφορική εξίσωση

$$\frac{d}{dx}|0\rangle = -x|0\rangle.$$

- Την γράφουμε ως $\frac{d|0\rangle}{|0\rangle} = -xdx$ και ολοκληρώνουμε:

$\int \frac{d|0\rangle}{|0\rangle} = -\int xdx \Rightarrow \ln|0\rangle = -\frac{x^2}{2} + c \Rightarrow |0\rangle = ke^{-x^2/2}$, με k, c σταθερές.

- Την σταθερά k την προσδιορίζουμε από την συνθήκη νορμαλισμού. Καταλήγουμε λοιπόν ότι $|0\rangle = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}e^{-x^2/2}$. Το αποτέλεσμα είναι σε συμφωνία με αυτό της μεθόδου των σειρών.

Υπολογισμός της πρώτης διεγερμένης

- Γνωρίζοντας τώρα την θεμελιώδη κατάσταση μπορούμε να κατασκευάσουμε τις υπόλοιπες καταστάσεις εφαρμόζοντας διαδοχικά τον $\alpha^{\dagger}$.
- Για παράδειγμα για την πρώτη διεγερμένη θα ισχύει:

$$|1\rangle = \alpha^{\dagger}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{d}{dx}\right)|0\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}\sqrt{2}}\left(xe^{-x^2/2} + xe^{-x^2/2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{\pi}}xe^{-x^2/2}.$$

- Εφ' όσον γνωρίζουμε την πρώτη διεγερμένη μπορούμε να κατασκευάσουμε την δεύτερη ως εξής:

$\alpha^{\dagger}|1\rangle = \sqrt{1+1}|2\rangle \Rightarrow |2\rangle = \cdots$ κ.ο.κ.

Υπολογισμός μέσης θέσης με την αλγεβρική μέθοδο

- $\langle x \rangle = \langle n|x|n \rangle = \left\langle n \middle| \frac{a+a^\dagger}{\sqrt{2}} \middle| n \right\rangle =$

$$\frac{\langle n|a|n\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{\langle n|a^\dagger|n\rangle}{\sqrt{2}} =$$

$\sqrt{n}\frac{\langle n|n-1\rangle}{\sqrt{2}} + \sqrt{n+1}\frac{\langle n|n+1\rangle}{\sqrt{2}} = 0$, διότι όπως εχουμε αναφέρει οι ιδιοσυναρτήσεις του αρμονικού ταλαντωτή είναι ορθοκανονικές.

Υπολογισμός αβεβαιότητας θέσης με την αλγεβρική μέθοδο

- $\langle x^2\rangle = \langle n|x\,x|n\rangle = \left\langle n\left|\frac{(a+a^\dagger)(a+a^\dagger)}{2}\right|n\right\rangle =$

$$\left\langle n\left|\frac{a^2+aa^\dagger+a^\dagger a+\left(a^\dagger\right)^2}{2}\right|n\right\rangle =$$

$$\frac{\langle n|a^2|n\rangle}{2}+\frac{\langle n|aa^\dagger|n\rangle}{2}+\frac{\langle n|a^\dagger a|n\rangle}{2}+\frac{\left\langle n\left|\left(a^\dagger\right)^2\right|n\right\rangle}{2}$$

- Ο πρώτος και ο τελευταίος όρος μηδενίζονται. Κάνουμε χρήση των σχέσεων $\mathrm{H}=\alpha\alpha^\dagger-\frac{1}{2}$ και $\mathrm{H}=\alpha^\dagger\alpha+\frac{1}{2}$ και προκύπτει ότι

$\langle x^2\rangle = \frac{\langle n|(\mathrm{H}+{}^1\!/_2)|n\rangle}{2}+\frac{\langle \mathrm{n}|(H-{}^1\!/_2)|n\rangle}{2} = n+\frac{1}{2}$. (Έχουμε κάνει χρήση της εξίσωσης ιδιοτιμών που είναι $\mathrm{H}|n\rangle=(n+{}^1\!/_2)|n\rangle$).

- Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $\Delta x^2=\langle x^2\rangle-\langle x\rangle^2=\langle x^2\rangle \Rightarrow$

$$\Delta \mathrm{x}=(n+{}^1\!/_2)^{\frac{1}{2}}.$$

Εφαρμογή

- Θεωρούμε κβαντικό αρμονικό ταλαντωτή με δύο ενεργειακά επίπεδα, $|0\rangle$ (θεμελιώδης κατάσταση) και $|1\rangle$ (πρώτη διεγερμένη). Δίνεται ότι

$\langle \mathrm{E} \rangle = 1, \langle p \rangle = 0$ για $t = 0$. Να βρεθεί η κυματοσυνάρτηση του συστήματος.

- Έχουμε σύστημα δύο ενεργειακών επιπέδων. Άρα η κυματοσυνάρτηση είναι της μορφής

$$\psi(x,t) = |c_0| e^{i\varphi} e^{-iE_0 t} \psi_0(x) + |c_1| e^{-iE_1 t} \psi_1(x)$$

με $\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} e^{-x^2/2}, \psi_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{\pi}} x e^{-x^2/2}$.

Συντελεστές

- Από την πληροφορία για την μέση ενέργεια βρίσκουμε τους συντελεστές της κυματοσυνάρτησης:
- $\langle \mathrm{E} \rangle = 1 \Rightarrow |c_0|^2 E_0 + |c_1|^2 E_1 = |c_0|^2 \frac{1}{2} + |c_1|^2 \frac{3}{2} = 1$

Επίσης $|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1$.

- Από αυτές τις δύο σχέσεις καταλαβαίνουμε ότι

$$|c_1| = |c_0| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Η κυματοσυνάρτηση

- Για την μέση ορμή έχουμε

$$\langle p\rangle(t) = |c_0|^2 p_{00} + |c_1|^2 p_{11} + 2|c_0||c_1||p_{10}|\cos(\omega t + \varphi + \delta_{10})$$

Για πραγματική κυματοσυνάρτηση είχαμε δείξει ότι η μέση τιμή της ορμής είναι μηδέν, δηλ. μπορούμε απ’ ευθείας να ισχυριστούμε ότι $p_{00} = p_{11} = 0$.

- $p_{10} = \langle 1|p|0\rangle = \left\langle 1\middle| {}^{(a-a^\dagger)}\!/_{i\sqrt{2}} \middle|0\right\rangle = -\frac{1}{i\sqrt{2}}\langle 1|a^\dagger|0\rangle = -\frac{1}{i\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\pi/2}$. Επομένως $\delta_{10} = \frac{\pi}{2}$.
- Ξέρουμε ότι $\langle p\rangle(t=0) = 0$. Αντικαθιστώντας τα δεδομένα μας στον γενικό τύπο προκύπτει ότι

$\langle p\rangle(t=0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} sin\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0$. Πλέον έχουμε όλα τα δεδομένα για τον προσδιορισμό της κυματοσυνάρτησης γνωστά: $\psi(x,t) = |c_0|e^{-iE_0 t}\psi_0(x) + |c_1|e^{-iE_1 t}\psi_1(x)$

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών,Ανδρέας Τερζής ,2014. Ανδρέας Τερζής . «Κβαντική Φυσική Ι. Ολοκλήρωση της αλγεβρικής μεθόδου για την μελέτη του κβαντικού αρμονικού ταλαντωτή». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: https://eclass.upatras.gr/courses/PHY1957/

Σημείωμα Αδειοδότησης