Κβαντική Φυσική Ι

Ενότητα 24: Το φυσικό σύστημα μονάδων

Ανδρέας Τερζής

Σχολή Θετικών Επιστημών

Τμήμα Φυσικής

Σκοποί ενότητας

- Σκοπός της ενότητας είναι μια σύντομη εισαγωγή στον αρμονικό ταλαντωτή και να παρουσιάσει μια λογική διαμόρφωσης του φυσικού συστήματος μονάδων.

Περιεχόμενα ενότητας

- Εξίσωση Schrödinger αρμονικού ταλαντωτή.
- Φυσικό σύστημα μονάδων
- Εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή στο φυσικό σύστημα μονάδων
- Εφαρμογή στο φυσικό σύστημα μονάδων

Η έννοια του κβαντικού αρμονικού ταλαντωτή

- Με τον όρο «αρμονικό ταλαντωτή» περιγράφουμε την κίνηση (είτε κλασική είτε κβαντική) υπό την επίδραση του δυναμικού $V = \frac{1}{2}kx^2$.
- Το σύστημα του αρμονικού ταλαντωτή έχει μεγάλη σημασία γιατι σχεδόν κάθε δυναμικό μπορεί να προσομοιωθεί με το δυναμικό του αρμονικού ταλαντωτή στην γειτονιά ενός σημείου ευσταθούς ισορροπίας.
- Για να γίνει αυτό κατανοητό, έστω ότι έχουμε ένα τυχαίο μονοδιάστατο δυναμικό $V(x)$, το οποίο έχει ένα ελάχιστο(δηλ. σημείο ευσταθούς ισορροπίας) για $x = 0$.

Επιβίωση παραβολικού όρου στην γειτονιά ενός ελαχίστου

- Αναπτύσσουμε την συνάρτηση $V(x)$ σε δυναμοσειρά Taylor γύρω από το $x = 0$.

$$V(x) = V(0) + V'(0)x + \frac{1}{2}V''(0)x^2 + \cdots$$

- Όμως αφού το $x = 0$ είναι σημείο ισορροπίας θα έχουμε $V'(0) = 0$ και $V''(0) = k > 0$.
- Επιλέγουμε την στάθμη δυναμικής ενέργειας έτσι ώστε $V(0) = 0$, οπότε καταλήγουμε ότι

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2 + ..$$

- Θεωρούμε τους όρους ανώτερης τάξης αμελητέους για μικρά x, και έτσι επιζεί μόνο ο παραβολικός όρος.

Εξίσωση Schrödinger

- Το κβαντομηχανικό πρόβλημα για τον αρμονικό ταλαντωτή συνίσταται στην λύση της εξίσωσης ιδιοτιμών

$$\mathrm{H}|\psi\rangle = \mathrm{E}|\psi\rangle, \text{ με } \mathrm{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \text{ και } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

- Η εξίσωση Schrödinger είναι

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \psi(x) = E\psi(x).$$

Το φυσικό σύστημα μονάδων

- Το φυσικό σύστημα μονάδων είναι ένα σύστημα στο οποίο η τιμή κάποιων βασικών σταθερών (όπως η σταθερά $\hbar$) θέτονται ίσες με την μονάδα. Έτσι, οι υπόλοιπες φυσικές ποσότητες εκφράζονται σε μια ενιαία ας πούμε βάση, συναρτήσει αυτής της μονάδας. Παρακάτω θα φανεί ξεκάθαρα τι ακριβώς εννοούμε.
- Ένα πλεονέκτημα αυτού του συστήματος είναι ότι απλοποιεί σημαντικά τις φυσικές εξισώσεις.
- Το φυσικό σύστημα μονάδων χρησιμοποιείται ευρέως από τους θεωρητικούς φυσικούς της φυσικής σωματιδίων.

Το φυσικό σύστημα μονάδων και ο αρμονικός ταλαντωτής

- Στην περίπτωσή μας, που έχουμε το σύστημα αρμονικού ταλαντωτή θέτουμε
$$\hbar = m = \omega = 1.$$
- Μοιάζει αυθαίρετο, γι’ αυτό θα δούμε μια λογική εξαγωγής αυτής της επιλογής.
- Είπαμε ότι η εξίσωση Schrödinger για τον αρμονικό ταλαντωτή είναι
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \psi(x) = E\psi(x).$$
- Επιθυμούμε να την απλοποιήσουμε εισάγοντας κάποιες παραμέτρους έτσι ώστε οι συντελεστές να είναι μονάδα και αδιάστατοι.

Εξαγωγή του φυσικού συστήματος μονάδων με απλούς χειρισμούς

- Διαιρούμε και τα δύο μέλη με μια ποσότητα ενέργειας E_0:

$$-\frac{\hbar^2}{2m\mathrm{E}_0}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+\frac{1}{2\mathrm{E}_0}m\omega^2x^2\psi(x)=\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{E}_0}\psi(x)$$

- Εισάγουμε την ποσότητα x_0 με διαστάσεις θέσης ως εξής:

$$-\frac{\hbar^2}{2m\mathrm{E}_0{x_0}^2}\frac{d^2\psi(x)}{d(\frac{x}{x_0})^2}+\frac{{x_0}^2}{2\mathrm{E}_0}m\omega^2\frac{x^2}{{x_0}^2}\psi(x)=\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{E}_0}\psi(x)$$

Επιλογή παραμέτρων

- Επιλέγουμε τις παραμέτρους E_0, x_0 έτσι ώστε

$\frac{\hbar^2}{m\mathrm{E}_0{x_0}^2} = 1$ και $\frac{{x_0}^2}{\mathrm{E}_0} m\omega^2 = 1$. Θα εκφράσουμε τώρα τις παραμέτρους E_0, x_0 συναρτήσει των βασικών σταθερών:

- Έχουμε $\frac{\hbar^2}{m\mathrm{E}_0{x_0}^2} \frac{{x_0}^2}{\mathrm{E}_0} m\omega^2 = 1 \Rightarrow \mathrm{E}_0 = \hbar\omega$. Αντικαθιστώντας σε μια από τις παραπάνω σχέσεις βρίσκουμε $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$.

Εξίσωση Schrödinger

- Θέτοντας $\tilde{\mathrm{E}} = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{E}_0}, \tilde{x} = \frac{x}{x_0}$ η εξίσωση Schrödinger γίνεται:
$$-\frac{1}{2}\frac{d^2\psi(x)}{d\tilde{x}^2} + \frac{1}{2}\tilde{x}^2\psi(x) = \tilde{E}\psi(x).$$
- Για να μπορούμε να έχουμε λοιπόν αδιάστατους συντελεστές, επιθυμούμε τα E_0, x_0 να είναι σταθερές. Για τον λόγο αυτό θέτουμε
$$\hbar = m = \omega = 1.$$
- Εξ' αιτιάς αυτών των επιλογών $\mathrm{E}_0 = x_0 = 1$ και μπορούμε στην εξίσωσή μας να κάνουμε τις αντικαταστάσεις

$\mathrm{E} \leftrightarrow \tilde{\mathrm{E}}, \mathrm{x} \leftrightarrow \tilde{\mathrm{x}}$. Προφανώς οι ιδιοτιμές της ενέργειας (όπως και η θέση) θα αποτελούν σταθερές. Αν θέλουμε να εκφράσουμε αυτές τις τιμές στο SI(ή σε κάποιο άλλο σύστημα), δεν έχουμε παρά να τις πολλαπλασιάσουμε με $\mathrm{E}_0 = \hbar\omega$ για την ενέργεια και $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ για την θέση, δίνοντας στις σταθερές $\hbar, m, \omega$ τις τιμές που επιβάλει το εκάστοτε σύστημα μονάδων.

Παράδειγμα

- Να βρεθεί το φυσικό σύστημα μονάδων όταν το δυναμικό είναι της μορφής $V(x) = -k\frac{e^2}{x}$.
- Η εξίσωση Schrödinger γίνεται:

$$-\frac{\hbar^2}{2m\mathrm{E}_0{x_0}^2}\frac{d^2\psi(x)}{d\left(\frac{x}{x_0}\right)^2} - \frac{k}{\mathrm{E}_0 x_0}\frac{e^2}{\left(\frac{x}{x_0}\right)}\psi(x) = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{E}_0}\psi(x)$$

- Επιλέγουμε τις παραμέτρους έτσι ώστε

$\frac{\hbar^2}{m\mathrm{E}_0{x_0}^2} = 1, \frac{ke^2}{\mathrm{E}_0 x_0} = 1.$

- Διαιρούμε κατά μέλη και βρίσκουμε ότι $x_0 = \frac{\hbar^2}{kme^2}$. Άρα

$\mathrm{E}_0 = \frac{ke^4m}{\hbar^2}$. Επομένως με τα ίδια επιχειρήματα θέτουμε $\hbar = m = e = k = 1$.

Έτσι διαμορφώσαμε το φυσικό σύστημα μονάδων γι’ αυτό το πρόβλημα.

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών,Ανδρέας Τερζής ,2014. Ανδρέας Τερζής . «Κβαντική Φυσική Ι. Το φυσικό σύστημα μονάδων». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: https://eclass.upatras.gr/courses/PHY1957/

Σημείωμα Αδειοδότησης