Κβαντική Φυσική Ι

Ενότητα 23: Σκέδαση σε τετραγωνικά δυναμικά

Ανδρέας Τερζής
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Φυσικής

Σκοποί ενότητας

- Σκοπός της ενότητας είναι να μελετήσει την περίπτωση σκέδασης σε σκαλοπάτι δυναμικού, σε ορθογώνιο φράγμα και σε δέλτα φράγμα.

Περιεχόμενα ενότητας

- Σκέδαση σε σκαλοπάτι δυναμικού
- Σκέδαση σε τετραγωνικό φράγμα δυναμικού
- Σκέδαση σε δέλτα φράγμα δυναμικού

Σκέδαση σε σκαλοπάτι δυναμικού

- Η συνάρτηση δυναμικού που περιγράφει το σκαλοπάτι δυναμικού είναι

$$V(x) = \begin{cases} 0, x \leq 0 \\ V_0, x > 0 \end{cases}$$

Με την βοήθεια της συνάρτησης «θήτα» του Heaviside η έκφραση για το δυναμικό παίρνει την μορφή $V(x) = V_0 \Theta(\mathrm{x})$.

- Θα μελετήσουμε την περίπτωση $\mathrm{E} > \mathrm{V}_0$.

Εξισώσεις Schrödinger και η λύση τους

- Για $x \leq 0$, η εξίσωση Schrödinger είναι

$\psi_{\mathrm{I}}'' + k^2\psi_{\mathrm{I}} = 0$, με $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$.

Η αντίστοιχη λύση είναι $\psi_{\mathrm{I}}(x) = A_+e^{ikx} + A_-e^{-ikx}$. Ο πρώτος όρος συμβολίζει το προσπίπτον στο φράγμα κύμα και ο δεύτερος το ανακλώμενο.

- Για $x > 0$, η εξίσωση Schrödinger είναι

$\psi_{\mathrm{II}}'' + k'^2\psi_{\mathrm{II}} = 0$, με $k'^2 = \frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}$.

Η αντίστοιχη λύση είναι $\psi_{\mathrm{II}}(x) = B_+e^{ik'x} + B_-e^{-ik'x}$.

Ο πρώτος όρος είναι το διερχόμενο κύμα. Δεν υπάρχει ανακλώμενο (αφού στην περιοχή ΙΙ δεν έχουμε κάποιο φράγμα), και άρα η λύση της περιοχής ΙΙ είναι

$\psi_{\mathrm{II}}(x) = B_+e^{ik'x}$.

- Οι συνοριακές συνθήκες είναι

$\psi_{\mathrm{I}}(0) = \psi_{\mathrm{II}}(0) \Longrightarrow \mathrm{A}_+ + \mathrm{A}_- = \mathrm{B}_+$, $\psi_{\mathrm{I}}'^{(0)} = \psi_{\mathrm{II}}'^{(0)} \Longrightarrow \mathrm{A}_+ - \mathrm{A}_- = \frac{k'}{k}\mathrm{B}_+$

Συντελεστές ανάκλασης και διάδοσης

- Γενικά, όταν εμφανίζεται ένα φράγμα δυναμικού, το ρεύμα πιθανότητας σχετίζεται με τους συντελεστές διάδοσης και ανάκλασης, T και R αντίστοιχα. Αποτελούν ένα μέτρο της ποσότητας των σωματιδίων που ανακλώνται από το φράγμα δυναμικού ή το διαπερνούν.
- Ικανοποιούν την εξίσωση $R + T = 1$.
- Τα R και T ορίζονται ως

$$\mathrm{T} = \frac{j_\delta}{j_\pi}, \mathrm{R} = \frac{j_a}{j_\pi}$$

όπου j_π, j_δ, j_a είναι το προσπίπτον ρεύμα πιθανότητας, το διερχόμενο και το ανακλώμενο αντίστοιχα. Οι ποσότητες αυτές είναι τα μέτρα των αντίστοιχων διανυσμάτων.

Συντελεστές ανάκλασης και διάδοσης για σκαλοπάτι δυναμικού

- Στην προηγούμενη ενότητα βρήκαμε ότι για μια κυματοσυνάρτηση της μορφής $\psi = \mathrm{A}e^{ikx}$ έχουμε

$j = \frac{\hbar k}{m}|A|^2$. Άρα $j_\pi = \frac{\hbar k}{m}|\mathrm{A}_+|^2, j_\delta = \frac{\hbar k'}{m}|\mathrm{B}_+|^2, j_a = \frac{\hbar k}{m}|\mathrm{A}_-|^2$.

- Άρα $R = \frac{\frac{\hbar k}{m}|\mathrm{A}_-|^2}{\frac{\hbar k}{m}|\mathrm{A}_+|^2} = \frac{|\mathrm{A}_-|^2}{|\mathrm{A}_+|^2},\ T = \frac{\frac{\hbar k'}{m}|\mathrm{B}_+|^2}{\frac{\hbar k}{m}|\mathrm{A}_+|^2} = \frac{k'}{k}\frac{|\mathrm{B}_+|^2}{|\mathrm{A}_+|^2}$
- Προσθέτουμε τις συνοριακές συνθήκες κατά μέλη και έχουμε $2\mathrm{A}_+ = \mathrm{B}_+\left(1 + \frac{k'}{k}\right) \Longrightarrow \left|\frac{B_+}{A_+}\right|^2 = \frac{4k^2}{(k+k')^2}$.
- Άρα ο συντελεστής διάδοσης είναι $\mathrm{T} = \frac{4kk'}{(k+k')^2}$.
- Ο συντελεστής ανάκλασης είναι $R = 1 - T = \left(\frac{k-k'}{k+k'}\right)^2$

Κάποιες παρατηρήσεις

- Αν το προσπίπτον έχει φορά από τα δεξιά προς τα αριστερά, οι συντελεστές ανάκλασης και διάδοσης δεν μεταβάλλονται. Το μόνο που χρειάζεται να κάνουμε για να το διαπιστώσουμε είναι η εναλλαγή $k \leftrightarrow k'$.
- Για την περίπτωση όπου $\mathrm{E} < \mathrm{V}_0$, $k'^2 < 0$. Άρα μπορούμε να γράψουμε $k'^2 = -\gamma^2 \Longrightarrow k' = i\gamma$.
- Άρα $R = \left|\frac{k-i\gamma}{k+i\gamma}\right|^2 = 1$ και επομένως $\mathrm{T} = 0$.
- Αυτό σημαίνει ότι η πιθανότητα να ανακλαστεί το σωμάτιο είναι 1 και η πιθανότητα να διαπεράσει το φράγμα 0.Αυτό μπορεί να εξηγηθεί φυσικά και ως εξής: Η κυματοσυνάρτηση στην περιοχή II, όπως εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε παίρνοντας και την συνθήκη ότι θα πρέπει να είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη θα

είναι $\psi_{\mathrm{II}} = \mathrm{B}e^{-k'x}$ με $k' = \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$. Είναι λοιπόν μια εκθετικά φθίνουσα συνάρτηση η οποία μηδενίζεται στο άπειρο. Άρα η πιθανότητα να φτάσουν τα σωματίδια στο άπειρο είναι μηδέν και άρα είναι λογικό να μην υπάρχει διάδοση.

Ορθογώνιο φράγμα δυναμικού

- Η συνάρτηση δυναμικού είναι

$$V(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ V_0, 0 \leq x \leq L \\ 0, x > L \end{cases}$$

- Για $\mathrm{E} > V_0$ γραφουμε κατ' ευθείαν τις λύσεις που αντιστοιχούν στην κάθε περιοχή

$$\psi_{\mathrm{I}} = \mathrm{e}^{ikx} + A_{-}e^{-ikx}$$

(Για ευκολία έχουμε θέσει $\mathrm{A}_{+} = 1$, έτσι ώστε το τετράγωνο του συντελεστή A_{-} μπροστά από το ανακλώμενο κύμα να εκφράζει την πιθανότητα ανάκλασης, δηλ. $|\mathrm{R}|^2 = |A_{-}|^2$).

- $\psi_{\mathrm{II}} = \mathrm{B}_{+}e^{ik'x} + B_{-}e^{-ik'x}$, $\psi_{\mathrm{III}} = Ce^{ikx}$, με $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$,

$k'^2 = \frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}$.

- Ο συντελεστής ανάκλασης είναι $R = |A|^2$ και ο συντελεστής διάδοσης είναι $\mathrm{T} = |C|^2$.

Συνοριακές συνθήκες

- $\psi_{\mathrm{I}}(0) = \psi_{\mathrm{II}}(0) \Longrightarrow 1 + \mathrm{A}_{-} = \mathrm{B}_{+} + \mathrm{B}_{-}$ (1)
- $\psi_{\mathrm{I}}'(0) = \psi_{\mathrm{II}}'(0) \Longrightarrow ik(1 - A) = ik'(\mathrm{B}_{+} - \mathrm{B}_{-})$ (2)
- $\psi_{\mathrm{II}}(L) = \psi_{\mathrm{III}}(\mathrm{L}) \Longrightarrow B_{+}e^{ik'L} + B_{-}e^{-ik'L} = Ce^{ikL}$(3)
- $\psi_{\mathrm{II}}'(L) = \psi_{\mathrm{III}}'(\mathrm{L}) \Longrightarrow$

$B_{+}e^{ik'L} - B_{-}e^{-ik'L} = \frac{k}{k'}Ce^{ikL}$ (4)

Συντελεστές ανάκλασης και διάδοσης-σκιαγράφηση διαδικασίας

- Διαιρούμε την σχέση (3) με την (4) και έχουμε:

$$\frac{B_+e^{ik'L}+B_-e^{-ik'L}}{B_+e^{ik'L}-B_-e^{-ik'L}}=\frac{k'}{k}\Longrightarrow$$

$$\frac{\frac{B_+}{B_-}e^{ik'L}+e^{-ik'L}}{\frac{B_+}{B_-}e^{ik'L}-e^{-ik'L}}=\frac{k'}{k} \quad (5)$$

- Διαιρούμε την σχέση (1) με την (2) και παίρνουμε μια σχέση της μορφής $\frac{1+\mathrm{A}}{1-\mathrm{A}}=f\left(\frac{B_+}{B_-}\right)$. Όμως ο λόγος $\frac{B_+}{B_-}$ είναι γνωστός από την σχέση (5) και άρα μπορούμε αν βρούμε και την μορφή του A συναρτήσει γνωστών παραμέτρων.

Συντελεστές ανάκλασης και διάδοσης-Τελικές εκφράσεις

- Βρίσκουμε λοιπόν ότι

$$R = \frac{{U_0}^2 sin^2 k'L}{{U_0}^2 sin^2 k'L + 4k^2 k'^2},$$

$$T = 1 - R = \frac{4k^2 k'^2}{{U_0}^2 sin^2 k'L + 4k^2 k'^2}$$

με $\mathrm{U}_0 = \frac{2mV_0}{\hbar^2}$.

Περίπτωση $\mathrm{E} < V_0$

- Σε αυτήν την περίπτωση, όπως και στο σκαλοπάτι δυναμικού, θέτουμε $k' = i\gamma$.
- Έτσι

$$R = \frac{{U_0}^2 sin^2 \mathrm{i}\gamma L}{{U_0}^2 sin^2 i\gamma L - 4k^2\gamma^2}$$

- Έχουμε

$$sini\gamma L = \frac{e^{ii\gamma L} - e^{-ii\gamma L}}{2i} = \frac{e^{-\gamma L} - e^{\gamma L}}{2i} = i\left(\frac{e^{\gamma L} - e^{-\gamma L}}{2}\right) = isinh\gamma L$$

- Άρα $R = \frac{{U_0}^2 sin^2 \mathrm{h}\gamma L}{{U_0}^2 sin^2 h\gamma L + 4k^2\gamma^2}, T = \frac{4k^2\gamma^2}{{U_0}^2 sin^2 h\gamma L + 4k^2\gamma^2}$.

Φαινόμενο σήραγγος

- Φαινόμενο σήραγγος είναι εκείνο το κβαντομηχανικό φαινόμενο κατά το οποίο ένα σωματίδιο «διασχίζει» ένα φράγμα δυναμικού που κλασικά θα αδυνατούσε.
- Αυτό συμβαίνει π.χ. στο ορθογώνιο φράγμα δυναμικού όταν $\mathrm{E} < \mathrm{V}_0$. Στην περιοχή II όπου κλασικά το σωμάτιο δεν θα μπορούσε να υπάρξει, στην κβαντομηχανική υπάρχει κυματοσυνάρτηση και είναι

$$\psi_{\mathrm{II}} = \mathrm{B}_{+} e^{-\gamma x} + B_{-} e^{\gamma x}.$$

- Στην κβαντομηχανική λοιπόν σαν γενικό συμπέρασμα το σωμάτιο ανακλάται ακόμα και όταν η ενέργειά του του επιτρέπει να περάσει από το φράγμα δυναμικού, και διασχίζει το φράγμα δυναμικού ακόμα και όταν κλασικά η ενέργειά του δεν του το επιτρέπει.

Σκέδαση σε δέλτα φράγμα ως οριακή περίπτωση

- Το δυναμικό δέλτα $V(x) = c\delta(x)$, μπορεί να μελετηθεί θεωρώντας το ως οριακή περίπτωση του ορθογωνίου φράγματος, δηλ. $L \to 0, V_0 \to \infty$ έτσι ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου να διατηρείται σταθερό: $LV_0 = c$.
- Από το ορθογώνιο φράγμα έχουμε $\gamma^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}$. Για δέλτα φράγμα $\gamma \to \sqrt{\mathrm{V}_0}$.
- Άρα $\gamma L \to \sqrt{\mathrm{V}_0} L = \sqrt{V_0 L}\sqrt{L} = c\sqrt{L} \to 0$
- Εφ' όσον ισχύει αυτή η προσέγγιση, $sinh\gamma L \approx \gamma L$.
- Άρα ο συντελεστής διάδοσης γίνεται

$$\mathrm{T} = \frac{4k^2}{{U_0}^2 L^2 + 4k^2}.$$

Αντικαθιστούμε με $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}, \mathrm{U}_0 = \frac{2mV_0}{\hbar^2}$ και ${\mathrm{V}_0}^2 L^2 = c^2$ και καταλήγουμε

$$\mathrm{T} = \frac{\mathrm{k}^2 \hbar^4}{\mathrm{k}^2 \hbar^4 + m^2 c^2}$$

Σκέδαση σε δέλτα φράγμα-εξίσωση Schrödinger

- Οι λύσεις στις δύο περιοχές του δυναμικού $V(x) = c\delta(x)$ είναι

$$\psi_{\mathrm{I}} = e^{ikx} + Ae^{-ikx}$$
$$\psi_{\mathrm{II}} = \mathrm{B}e^{ikx}$$

με $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$.

- Οι συνοριακές συνθήκες είναι

$$\psi_{\mathrm{I}}(0) = \psi_{\mathrm{II}}(0) \Longrightarrow 1 + \mathrm{A} = \mathrm{B}$$

- Παίρνοντας την εξίσωση Schrödinger και ολοκληρώνοντας στο διάστημα $(-\varepsilon, \varepsilon)$ με $\varepsilon \longrightarrow 0$, όπως ακριβώς και στην περίπτωση των δέσμιων καταστάσεων παίρνουμε την συνθήκη ασυνέχειας της παραγώγου

$$\psi'_{\mathrm{II}}(0) - \psi'_{\mathrm{I}}(0) = \frac{2mc\psi(0)}{\hbar^2} \Longrightarrow$$
$$ikB - ik(1 - A) = \frac{2mcB}{\hbar^2}$$

Συντελεστής διάδοσης

- Αφαιρώντας την δεύτερη σχέση από την πρώτη καταλήγουμε ότι

$$\mathrm{B} = \frac{ik\hbar^2}{ik\hbar^2 - mc}$$

- Άρα ο συντελεστής διάδοσης είναι

$$\mathrm{T} = |\mathrm{B}|^2 = \frac{k^2\hbar^4}{k^2\hbar^4 + m^2c^2}$$

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών,Ανδρέας Τερζής ,2014. Ανδρέας Τερζής . «Κβαντική Φυσική Ι. Σκέδαση σε τετραγωνικά δυναμικά». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: https://eclass.upatras.gr/courses/PHY1957/

Σημείωμα Αδειοδότησης