



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΠΑΤΡΩΝ  
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά  
μαθήματα ΠΠ

# Κβαντική Φυσική Ι

Ενότητα 22: Η έννοια της σκέδασης και η εξίσωση συνέχειας στην Κβαντομηχανική

Ανδρέας Τερζής  
Σχολή Θετικών Επιστημών  
Τμήμα Φυσικής

# Σκοποί ενότητας

- Σκοπός της ενότητας είναι να παραθέσει την έννοια της σκέδασης γενικά στα τετραγωνικά δυναμικά.
- Ακόμη θα δείξει την φυσική σημασία που έχει η εξίσωση συνέχειας στην κβαντομηχανική.

# Περιεχόμενα ενότητας

- Η έννοια της σκέδασης
- Η εξίσωση συνέχειας

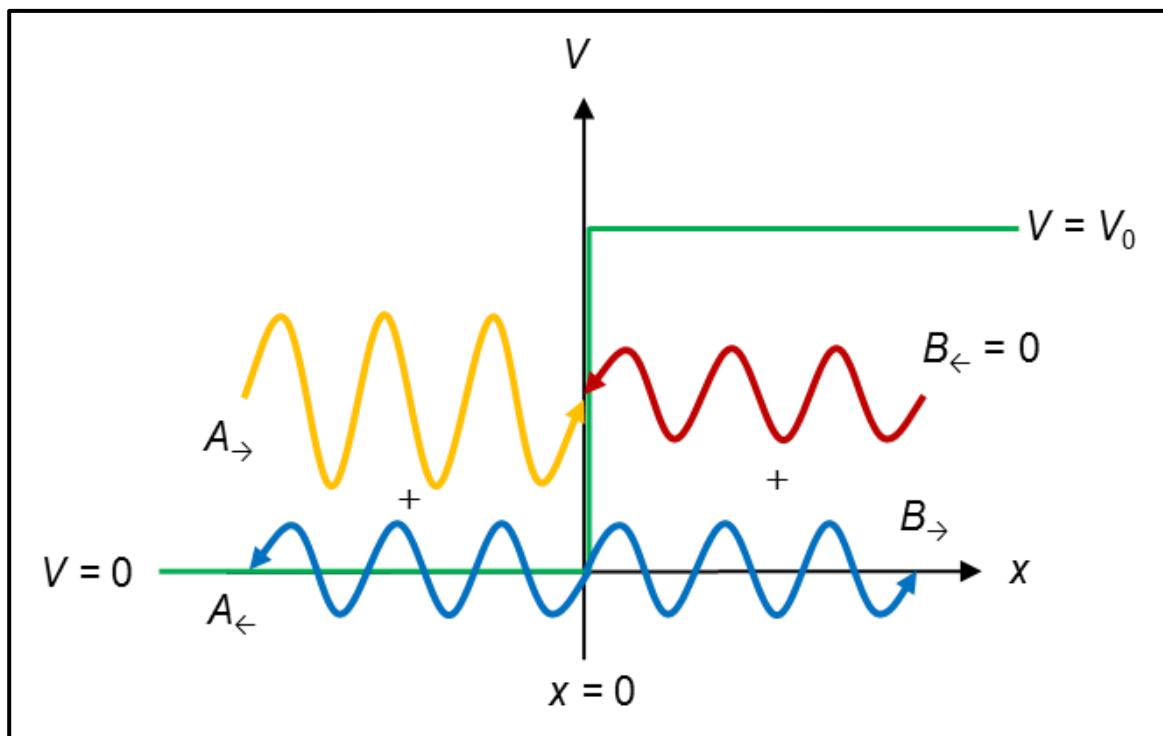
# Εισαγωγή

- Στην δεδομένη ενότητα θα δώσουμε το παράδειγμα της σκέδασης σ' ένα τετραγωνικό δυναμικό, κάνοντας απλώς μια σύντομη σκιαγράφιση. Λεπτομέρειες θα δοθούν στις επόμενες ενότητες.
- Έστω μια δέσμη σωματιδίων που κινούνται από αριστερά προς τα δεξιά σε σκαλοπάτι δυναμικού ύψους  $V_0$  και στην θέση  $x = 0$ .
- Σκαλοπάτι δυναμικού είναι το δυναμικό της μορφής

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ V_0, & x > 0 \end{cases}$$



# Σκαλοπάτι δυναμικού



Στην εικόνα φαίνεται γραφικά το δυναμικό από σκαλοπάτι δυναμικού. Είναι η πράσινη γραμμή. Τα A και B αποτελούν πλάτη της κυματοσυνάρτησης, την φυσική σημασία των οποίων θα δούμε σε επόμενες ενότητες.



# Εξίσωση Schrödinger

- Για  $x > 0$ , η εξίσωση Schrödinger είναι

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \psi'' + V_0 \psi = E \psi \Rightarrow$$
$$\psi'' = -k'^2 \psi,$$

$$\text{με } k' = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}.$$

- Η γενική λύση της εξίσωσης είναι

$$\psi = C e^{ik'x} + D e^{-ik'x}.$$

- Για  $x < 0$ , η εξίσωση Schrödinger είναι

$$\psi'' + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi = 0 \Rightarrow$$
$$\psi'' + k^2 \psi = 0,$$

$$\text{με } k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}. \text{ Η γενική λύση είναι πάλι } \psi = A e^{ikx} + B e^{-ikx}.$$



# Συνοριακές συνθήκες

- **Προσοχή:** Σ' αυτήν την περίπτωση δεν έχει νόημα να πάρουμε την συνθήκη τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων, διότι το φάσμα μας είναι συνεχές (έχουμε σκέδαση) και ισχύουν όσα έχουμε πει στην ενότητα 15.
- Στην δεδομένη περίπτωση μπορούμε να πούμε ότι  $D = 0$ , θεωρώντας ότι η δέσμη σωματιδίων έχει φορά από τα αριστερά προς τα δεξιά.
- Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες για την συνέχεια της κυματοσυνάρτησης και της πρώτης παραγώγου στο  $x = 0$  έχουμε

$$A + B = C \text{ και } ik(A - B) = ik'C.$$



# Η εξίσωση συνέχειας-Γενικά

- Γενικά στην φυσική η εξίσωση συνέχειας περιγράφει την συμπεριφορά μιας διατηρούμενης ποσότητας.
- Η μάζα, η ενέργεια, η ορμή, το ηλεκτρικό φορτίο είναι ποσότητες που μπορούν να διατηρηθούν. Άρα μια ποικιλία φαινομένων μπορεί να περιγραφεί χρησιμοποιώντας εξισώσεις συνέχειας.
- Άρα οι εξισώσεις συνέχειας υπονοούν νόμους διατήρησης.
- Σε διαφορική μορφή η εξίσωση συνέχειας είναι

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0,$$

με  $\rho$  να είναι η ποσότητα ενός μεγέθους  $q$  στην μονάδα του όγκου και  $\mathbf{j}$  είναι η ροή του  $q$  (ή ρεύμα).

- Στην κβαντομηχανική το μέγεθος που διατηρείται είναι η πιθανότητα και άρα μπορούμε να κατασκευάσουμε την αντίστοιχη εξίσωση συνέχειας.





# Η εξίσωση συνέχειας στην κβαντομηχανική

- Επομένως  $\rho$  θα είναι η πυκνότητα πιθανότητας και  $\mathbf{j}$  το ρεύμα πιθανότητας. Παρακάτω ψάχνουμε να προσδιορίσουμε την μορφή του ρεύματος πιθανότητας.

- Εφ' όσον  $\rho$  είναι η πυκνότητα πιθανότητας, έχουμε

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\Psi^* \Psi) = \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} + \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

- Όμως  $i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi$  και  $-i\hbar \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} = (H\Psi)^*$

- Αντικαθιστούμε παραπάνω και έχουμε

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\Psi(H\Psi)^*}{i\hbar} + \frac{\Psi^*(H\Psi)}{i\hbar}$$

- $H\Psi = \left(\frac{p^2}{2m} + V\right)\Psi$ . Αν αντικαταστήσουμε, οι όροι  $V\Psi$  αλληλοαναιρούνται.



# Τελική έκφραση

- Αντικαθιστώντας και τον τελεστή της ορμής παίρνουμε

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{\hbar}{2mi} \Psi \vec{\nabla}^2 \Psi^* - \frac{\hbar}{2mi} \Psi^* \vec{\nabla}^2 \Psi = \\ &\vec{\nabla} \left[ \frac{\hbar}{2mi} (\Psi \vec{\nabla} \Psi^* - \Psi^* \vec{\nabla} \Psi) \right] \\ -\vec{\nabla} \vec{j} &= \vec{\nabla} \left[ \frac{\hbar}{2mi} (-\Psi \vec{\nabla} \Psi^* + \Psi^* \vec{\nabla} \Psi) \right]\end{aligned}$$

- Άρα  $\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi} (-\Psi \vec{\nabla} \Psi^* + \Psi^* \vec{\nabla} \Psi)$ .



# Παράδειγμα

- Αν έχουμε κυματοσυνάρτηση της μορφής

$\psi = Ae^{ikx}$ , ποιο το ρεύμα πιθανότητας;

- Θα έχουμε

$$j = \frac{\hbar}{2mi} \left( -\Psi \frac{\partial}{\partial x} \Psi^* + \Psi^* \frac{\partial}{\partial x} \Psi \right) =$$
$$\frac{\hbar}{2mi} \left( A^* e^{-ikx} ike^{ikx} A - e^{ikx} (-ik)e^{-ikx} A^* \right) =$$
$$\frac{\hbar k}{m} |A|^2.$$



Τέλος Ενότητας

# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Ανδρέας Τερζής ,2014. **Ανδρέας Τερζής** .  
«**Κβαντική Φυσική Ι. Η έννοια της σκέδασης και η εξίσωση συνέχειας στην  
Κβαντομηχανική**». Έκδοση: **1.0**. Πάτρα **2014**. Διαθέσιμο από τη δικτυακή  
διεύθυνση: <https://eclass.upatras.gr/courses/PHY1957/>



# Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

# Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/2)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

**Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες**

**Εικόνα 1:**

[http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Qm\\_step\\_pot\\_temp.png](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Qm_step_pot_temp.png)

