Κβαντική Φυσική Ι

Ενότητα 18: Εφαρμογή στον συμβολισμό Dirac

Ανδρέας Τερζής

Σχολή Θετικών Επιστημών

Τμήμα Φυσικής

Σκοποί ενότητας

- Σκοπός της ενότητας είναι να παραθέσει μια εφαρμογή για να γίνει πιο κατανοητός ο συμβολισμός Dirac και στοιχεία θεωρίας που έχουμε μάθει ως ώρας.

Περιεχόμενα ενότητας

- Εφαρμογή

Εκφώνηση

- Θεωρούμε κβαντικό σύστημα που περιγράφεται από την χαμιλτονιανή

$\mathrm{H} = 3\varepsilon|1\rangle\langle 1| + \mu|1\rangle\langle 2| - 2\varepsilon i|2\rangle\langle 1|$, με $|1\rangle, |2\rangle$ ιδιοσυναρτήσεις κάποιου ερμιτιανού τελεστή και ε πραγματικός. Να βρεθούν:

1. Η τιμή του μ.
2. Οι ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα του τελεστή της ενέργειας.

Θεωρούμε ένα φυσικό μέγεθος που περιγράφεται από τον τελεστή W, με στοιχεία μήτρας, χρησιμοποιώντας τα ιδιοδιανύσματα του τελεστή της ενέργειας, της μορφής

$W = \begin{pmatrix} 0 & w \\ w & 0 \end{pmatrix}$, όπου w πραγματικός.

3. Να βρεθούν ποιες είναι οι δυνατές μετρούμενες τιμές για το φυσικό μέγεθος που περιγράφεται από τον τελεστή W.

Συνέχεια εκφώνησης

Την χρονική στιγμή $t = 0$,

μετράμε την μέση τιμή του τελεστή W και την βρίσκουμε ίση με μηδέν.

4. Να βρεθεί η κυματοσυνάρτηση του συστήματος την τυχαία χρονική στιγμή $t > 0$.
5. Αν για $t > 0$ μετρήσω τα φυσικά μεγέθη W και H ποιες είναι οι δυνατές μετρούμενες τιμές και με ποιες πιθανότητες;
6. Να υπολογιστεί ο μέσος ρυθμός μεταβολής της μέσης τιμής του τελεστή W, χρησιμοποιώντας την σχέση με τον μεταθέτη

$$i\hbar \frac{d}{dt}\langle W\rangle = \langle [W, H]\rangle.$$

Η μήτρα της χαμιλτονιανής

- Πριν προχωρήσουμε στην κατασκευή της μήτρας της χαμιλτονιανής θα επιλύσουμε το ερώτημα (1).
- Η χαμιλτονιανή είναι ερμιτιανός τελεστής, άρα
$$\langle 1|\mathrm{H}|2\rangle = (\langle 2|\mathrm{H}|1\rangle)^* \Rightarrow \mu = 2\mathrm{i}\varepsilon.$$
- Υπό μορφή πίνακα η χαμιλτονιανή θα είναι
$$\mathrm{H} = \begin{pmatrix} 3\varepsilon & 2i\varepsilon \\ -2i\varepsilon & 0 \end{pmatrix}.$$

Για παράδειγμα

$$\mathrm{H}_{11} = \langle 1|\mathrm{H}|1\rangle = \langle 1|[3\varepsilon|1\rangle\langle 1| + \mu|1\rangle\langle 2| - 2\varepsilon i|2\rangle\langle 1|]|1\rangle =$$
$$3\varepsilon\langle 1|1\rangle\langle 1|1\rangle + 2i\varepsilon\langle 1|1\rangle\langle 2|1\rangle - 2i\varepsilon\langle 1|2\rangle\langle 1|1\rangle = 3\varepsilon$$

Ερώτημα 2

- Απαιτούμε $det \begin{bmatrix} 3\varepsilon - \lambda & 2i\varepsilon \\ -2i\varepsilon & 0 - \lambda \end{bmatrix} = 0 \Longrightarrow$

$$\lambda^2 - 3\varepsilon\lambda - 4\varepsilon^2 = 0 \Longrightarrow \lambda_+ = 4\varepsilon, \lambda_- = -\varepsilon$$

- Για το πρώτο ιδιοδιάνυσμα ($\lambda = 4\varepsilon$) λύνουμε το

αλγεβρικό σύστημα $\begin{bmatrix} 3\varepsilon - 4\varepsilon & 2i\varepsilon \\ -2i\varepsilon & 0 - 4\varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ με τον

περιορισμό της κανονικότητας $|x|^2 + |y|^2 = 1$.

Έτσι βρίσκουμε $|\psi_+\rangle = \frac{2i|1\rangle + |2\rangle}{\sqrt{5}}$.

- Για το δεύτερο ιδιοδιάνυσμα ($\lambda = -\varepsilon$) λύνουμε το αλγεβρικό

σύστημα $\begin{bmatrix} 3\varepsilon + \varepsilon & 2i\varepsilon \\ -2i\varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ με τον περιορισμό $|x'|^2 + |y'|^2 = 1$. Έτσι

βρίσκουμε $|\psi_-\rangle = \frac{|1\rangle + 2i|2\rangle}{\sqrt{5}}$.

Ερώτημα 3

- Διαγωνοποιούμε την μήτρα του W.

$$det\begin{bmatrix}-\lambda & w\\ w & -\lambda\end{bmatrix} \Longrightarrow \lambda^2 - w^2 = 0 \Longrightarrow \lambda_+ = w, \lambda_- = -w.$$

Οπότε οι δυνατές μετρούμενες τιμές είναι οι w και $-w$.

- Οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις είναι

$$|+w\rangle = \frac{|\psi_+\rangle + |\psi_-\rangle}{\sqrt{2}}, \ |-w\rangle = \frac{|\psi_+\rangle - |\psi_-\rangle}{\sqrt{2}}$$

- Δηλαδή οι εξισώσεις ιδιοτιμών θα είναι

$$W|+w\rangle = w|+w\rangle, W|-w\rangle = -w|-w\rangle.$$

Ερώτημα 4

- Θα εκμεταλλευτούμε το δεδομένο ότι ο τελεστής W έχει μηδενική μέση τιμή. Έχουμε σύστημα δύο επιπέδων, άρα

$$\langle W\rangle = |c_+|^2\langle\psi_+|W|\psi_+\rangle + |c_-|^2\langle\psi_-|W|\psi_-\rangle + 2|c_+||c_-|\langle\psi_+|W|\psi_-\rangle cos\varphi$$

- Από την μορφή του τελεστή σε πίνακα καταλαβαίνουμε ότι μπορούμε να τον εκφράσουμε ως $W = w|\psi_+\rangle\langle\psi_-| + w|\psi_-\rangle\langle\psi_+|$.
- Άρα $\langle W\rangle = |c_+|^2\langle\psi_+|[w|\psi_+\rangle\langle\psi_-| + w|\psi_-\rangle\langle\psi_+|]|\psi_+\rangle +$

$$|c_-|^2\langle\psi_-|[w|\psi_+\rangle\langle\psi_-| + w|\psi_-\rangle\langle\psi_+|]|\psi_-\rangle$$

$$+2|c_+||c_-|\langle\psi_+|[w|\psi_+\rangle\langle\psi_-| + w|\psi_-\rangle\langle\psi_+|]|\psi_-\rangle cos\varphi =$$

$$4|c_+||c_-||w|cos\varphi.$$

- Από την τελευταία σχέση καταλαβαίνουμε ότι η μέση τιμή είναι μηδέν σε τρεις περιπτώσεις: Για $c_+ = 0$ οπότε $c_- = 1$, ή

για $c_- = 0$,οπότε $c_+ = 1$ ή για $cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \pm\frac{\pi}{2}$

Ολοκλήρωση ερωτήματος 4

- Επομένως η κυματοσυνάρτηση για $t = 0$ είναι μια από τις παρακάτω:

$$|\psi(x, t = 0)\rangle = |\psi_+\rangle$$
$$|\psi(x, t = 0)\rangle = |\psi_-\rangle$$
$$\left|\psi(x, t = 0)\right\rangle = \sqrt{P_0}\left|\psi_+\right\rangle + \sqrt{1 - \mathrm{P}_0}\, e^{\pm\frac{\pi}{2}}|\psi_-\rangle = \sqrt{\mathrm{P}_0}|\psi_+\rangle \pm i\sqrt{1 - \mathrm{P}_0}|\psi_-\rangle$$

- Άρα για $t > 0$

$$|\psi(x, t)\rangle = |\psi_+\rangle e^{-i4\varepsilon t/\hbar}$$
$$|\psi(x, t)\rangle = |\psi_-\rangle e^{i\varepsilon t/\hbar}$$
$$|\psi(x, t)\rangle = \sqrt{P_0}|\psi_+\rangle e^{-i4\varepsilon t/\hbar} \pm i\sqrt{1 - P_0}|\psi_-\rangle e^{i\varepsilon t/\hbar}$$

Ερώτημα 5

- Ας πάρουμε πρώτα τον τελεστή της ενέργειας:

1. Αν η κυματοσυνάρτηση που περιγράφει το σύστημα ανήκει στις δύο πρώτες περιπτώσεις (στάσιμες καταστάσεις), τότε η μέτρηση της ενέργειας θα δίνει με 100% πιθανότητα την τιμή $+4\varepsilon(\psi_+)$ ή $-\varepsilon(\psi_-)$.

2. Αν η κυματοσυνάρτηση είναι η

$$|\psi(x,t)\rangle = \sqrt{P_0}|\psi_+\rangle e^{-i4\varepsilon t/\hbar} \pm i\sqrt{1-P_0}|\psi_-\rangle e^{i\varepsilon t/\hbar},$$

τότε η μέτρηση της ενέργειας θα δίνει με πιθανότητα P_0 την τιμή $+4\varepsilon$ και με πιθανότητα $1 - P_0$ την τιμή $-\varepsilon$.

Μέτρηση του W

- Για να δούμε τα αποτελέσματα της μέτρησης του W θα πρέπει αν εκφράσουμε την κυματοσυνάρτηση του συστήματος συναρτήσει των ιδιοσυναρτήσεών του:
- Θα ισχύει ότι $|\psi_+\rangle = \frac{|+w\rangle+|-w\rangle}{\sqrt{2}}, |\psi_-\rangle = \frac{|+w\rangle-|-w\rangle}{\sqrt{2}}$
- Αντικαθιστούμε στην γενική μορφή της κυματοσυνάρτησης (τελευταία περίπτωση) και έχουμε:

$$|\psi(x,t)\rangle = \sqrt{P_0}\frac{|+w\rangle + |-w\rangle}{\sqrt{2}}e^{-i4\varepsilon t/\hbar}$$

$$\pm i\sqrt{1-P_0}\frac{|+w\rangle - |-w\rangle}{\sqrt{2}}e^{i\varepsilon t/\hbar}$$

Πιθανότητα εμφάνισης της ιδιοτιμής +w

- Συνεχίζουμε τις πράξεις και έχουμε:

$$|\psi(x,t)\rangle = \frac{\sqrt{P_0}e^{-\frac{i4\varepsilon t}{\hbar}} \pm i\sqrt{1-P_0}e^{\frac{i\varepsilon t}{\hbar}}}{\sqrt{2}}|+w\rangle + \frac{\sqrt{P_0}e^{-i4\varepsilon t/\hbar} \mp i\sqrt{1-P_0}e^{i\varepsilon t/\hbar}}{\sqrt{2}}|-w\rangle$$

- Άρα η πιθανότητα εμφάνισης της ιδιοτιμής $+w$ είναι

$$\left|\frac{\sqrt{P_0}e^{-\frac{i4\varepsilon t}{\hbar}} \pm i\sqrt{1-P_0}e^{\frac{i\varepsilon t}{\hbar}}}{\sqrt{2}}\right|^2 =$$

$$\left(\frac{\sqrt{P_0}e^{-\frac{i4\varepsilon t}{\hbar}} \pm i\sqrt{1-P_0}e^{\frac{i\varepsilon t}{\hbar}}}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{P_0}e^{\frac{i4\varepsilon t}{\hbar}} \mp i\sqrt{1-P_0}e^{\frac{-i\varepsilon t}{\hbar}}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\mathrm{P}_0(1-P_0)}sin\frac{5\varepsilon t}{\hbar}$$

Ολοκλήρωση ερωτήματος 5

- Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι η ιδιοτιμή $-w$ εμφανίζεται με πιθανότητα $\frac{1}{2} \mp \sqrt{\mathrm{P}_0(1-P_0)} sin\frac{5\varepsilon t}{\hbar}$.
- Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι αν το σύστημά μας περιγράφεται από τις δύο πρώτες στάσιμες καταστάσεις τότε οι ιδιοτιμές $+w, -w$ εμφανίζονται με ίση πιθανότητα.(Το διαπιστώνουμε αν αντικαταστήσουμε παραπάνω $\mathrm{P}_0 = 1$ ή $\mathrm{P}_0 = 0$).

Ερώτημα 6

- Έχουμε $\frac{d}{dt}\langle W\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle [W,H]\rangle$,

όπου $[W,H] = WH - HW =$

$$(w|\psi_+\rangle\langle\psi_-| + w|\psi_-\rangle\langle\psi_+|)(4\varepsilon|\psi_+\rangle\langle\psi_+| - \varepsilon|\psi_-\rangle\langle\psi_-|) - (4\varepsilon|\psi_+\rangle\langle\psi_+| - \varepsilon|\psi_-\rangle\langle\psi_-|)(w|\psi_+\rangle\langle\psi_-| + w|\psi_-\rangle\langle\psi_+|) = 5\varepsilon w(|\psi_-\rangle\langle\psi_+| - |\psi_+\rangle\langle\psi_-|)$$

- Άρα για τις δύο πρώτες περιπτώσεις

$|\psi(x,t)\rangle = |\psi_+\rangle, |\psi(x,t)\rangle = |\psi_-\rangle$ έχουμε

$$\langle [W,H]\rangle = \left\langle \psi_\pm \middle| [5\varepsilon w(|\psi_-\rangle\langle\psi_+| - |\psi_+\rangle\langle\psi_-|)] \middle| \psi_\pm \right\rangle = 0.$$

Άρα $\frac{d}{dt}\langle W\rangle = 0$.

Ολοκλήρωση ερωτήματος 6

- Η κυματοσυνάρτηση

$|\psi(x,t)\rangle = \sqrt{P_0}|\psi_+\rangle e^{-i4\varepsilon t/\hbar} \pm i\sqrt{1-P_0}|\psi_-\rangle e^{i\varepsilon t/\hbar}$ δίνει

$$\langle[W,H]\rangle = \langle \mathrm{\psi(x,t)}|[5\varepsilon w(|\psi_-\rangle\langle\psi_+| - |\psi_+\rangle\langle\psi_-|)]|\psi(x,t)\rangle =$$

$$\langle\sqrt{P_0}|\psi_+\rangle e^{i4\varepsilon t/\hbar} \mp i\sqrt{1-P_0}|\psi_-\rangle e^{-i\varepsilon t/\hbar}|[5\varepsilon w(|\psi_-\rangle\langle\psi_+| - |\psi_+\rangle\langle\psi_-|)] =$$
$$\sqrt{P_0}|\psi_+\rangle e^{-i4\varepsilon t/\hbar} \pm i\sqrt{1-P_0}|\psi_-\rangle e^{\frac{i\varepsilon t}{\hbar}} =$$

$$\mp 10 i\varepsilon w\sqrt{P_0(1-P_0)} cos\frac{5\varepsilon t}{\hbar}$$

- Άρα $\frac{d\langle W\rangle}{dt} = \mp(10\varepsilon w)/\hbar\left[\sqrt{P_0(1-P_0)}\right] cos\frac{5\varepsilon t}{\hbar}$.

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών,Ανδρέας Τερζής ,2014. Ανδρέας Τερζής . «Κβαντική Φυσική Ι. Εφαρμογή στον συμβολισμό Dirac». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: https://eclass.upatras.gr/courses/PHY1957/

Σημείωμα Αδειοδότησης