



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΠΑΤΡΩΝ  
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά  
μαθήματα ΠΠ

# Κβαντική Φυσική Ι

Ενότητα 14: Εφαρμογή σε σύστημα δύο επιπέδων

Ανδρέας Τερζής  
Σχολή Θετικών Επιστημών  
Τμήμα Φυσικής

# Σκοπός ενότητας

- Σκοπός της ενότητας είναι να παραθέσει μια εφαρμογή σε σύστημα δύο ενεργειακών επιπέδων.

# Περιεχόμενα ενότητας

Το περιεχόμενο της ενότητας αφορά μια εφαρμογή σε σύστημα δύο ενεργειακών επιπέδων. Σε αυτήν την ενότητα θα δοθεί ένα κομμάτι της άσκησης. Θα ολοκληρωθεί στην επόμενη ενότητα.

# Εκφώνηση και χρήσιμες τριγωνομετρικές ταυτότητες

- Ηλεκτρόνιο βρίσκεται στις δύο πρώτες ενεργειακές του καταστάσεις σε δυναμικό απειρόβαθου πηγαδιού εύρους  $a$ . (α) Προσδιορίστε πλήρως αυτή την κατάσταση αν δίνεται ότι έχει μέση θέση  $a/2$  και η μέση ορμή του είναι  $8\hbar/3a$ . (β) Να υπολογιστεί η μέση ενέργεια του συστήματος.
- *Χρήσιμες τριγωνομετρικές σχέσεις*
  - $2\sin A \sin B = \cos(A - B) - \cos(A + B)$
  - $2\sin A \cos B = \sin(A + B) + \sin(A - B)$
  - $2\cos A \cos B = \cos(A + B) + \cos(A - B)$
  - $2\sin^2 A = 1 - \cos 2A$
  - $2\sin A \cos A = \sin 2A$
  - $2\cos^2 A = 1 + \cos 2A$



# Μέση θέση

- Προσπαθώντας να επιλύσουμε τα ερωτήματα της άσκησης εκμεταλλευόμαστε τα δεδομένα της εκφώνησης.
- Το σύστημά μας είναι σύστημα δύο επιπέδων, άρα θα εφαρμόσουμε για την μέση θέση τον τύπο που εξάγαμε στην προηγούμενη ενότητα.
- Θα έχουμε λοιπόν θεωρώντας την στιγμή  $t = 0$  για ευκολία

$$\langle x \rangle = P_1 x_{11} + P_2 x_{22} + 2|c_1||c_2||x_{21}| \cos(\delta_{21} + \varphi_{12})$$



# Υπολογισμός $x_{11}, x_{22}$

- Για το  $x_{11}$  έχουμε

$$x_{11} = (\psi_1, x\psi_1), \text{ όπου } \psi_1 = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right). \text{ Άρα}$$

$$\begin{aligned} x_{11} &= \int_0^a \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) x \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) dx = \\ &= \frac{2}{a} \int_0^a x \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) dx = \frac{2}{a} \int_0^a x \frac{1}{2} \left(1 - \cos\frac{2\pi x}{a}\right) dx = \\ &= \frac{1}{a} \int_0^a x dx - \frac{1}{a} \int_0^a x \cos\frac{2\pi x}{a} dx = \frac{a}{2} \end{aligned}$$

- Ομοίως  $x_{22} = \frac{a}{2}$



# Υπολογισμός $x_{21}$

- Για το  $x_{21}$  έχουμε

$$x_{21} = (\psi_2, x\psi_1) = \int_0^a \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) x \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) dx$$

- Για να λύσουμε το ολοκλήρωμα κάνουμε χρήση της εξίσωσης  
 $2\sin A \sin B = \cos(A - B) - \cos(A + B)$ .

- Το αποτέλεσμα είναι  $x_{21} = -\frac{16a^2}{9\pi^2}$

- ✓ Θα έχουμε λοιπόν ότι  $x_{21} = |x_{21}|e^{i\delta_{21}} \Rightarrow e^{i\delta_{21}} = -1 \Rightarrow$   
 $\delta_{21} = \pi$ .

- ✓ Παίρνοντας τώρα τον γενικό τύπο για την μέση θέση (διαφάνεια 5) και αντικαθιστώντας τα δεδομένα μας καταλήγουμε:

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} (|c_1|^2 + |c_2|^2) + 2|c_1||c_2||x_{21}|\cos(\pi + \varphi_{12}) = 0$$

Ξέρουμε ότι  $(|c_1|^2 + |c_2|^2) = 1$ , άρα  $\cos(\pi + \varphi_{12}) = 0 \Rightarrow \varphi_{12} = \pm \frac{\pi}{2}$



Τέλος Ενότητας



# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Ανδρέας Τερζής, 2014. **Ανδρέας Τερζής**.  
«**Κβαντική Φυσική Ι. Εφαρμογή σε σύστημα δύο επιπέδων**». Έκδοση: 1.0.  
Πάτρα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:  
<https://eclass.upatras.gr/courses/PHY1957/>



# Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.