



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα ΠΠ

Κβαντική Φυσική I

Ενότητα 13: Σύστημα δύο ενεργειακών επιπέδων

Ανδρέας Τερζής
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Φυσικής

Σκοποί ενότητας

- Σκοπός της ενότητας είναι να μελετηθεί μια εφαρμογή σχετικά με τις βασικές αρχές της κβαντομηχανικής που έχουμε μάθει μέχρι τώρα. Επίσης θα δοθεί μια ανάπτυξη που αφορά συστήματα δύο ενεργειακών επιπέδων.

Περιεχόμενα ενότητας

- Εφαρμογή με τις βασικές αρχές της κβαντομηχανικής
- Σύστημα δύο ενεργειακών καταστάσεων

Εφαρμογή-Εκφώνηση

- Έστω ένα κβαντικό σύστημα το οποίο περιγράφεται από τρεις ενεργειακές καταστάσεις (ιδιοτιμές ενέργειας του προβλήματος ιδιοτιμών $H\psi_n(x) = E_n\psi_n(x)$), E_1, E_2, E_3 . Αν γνωρίζουμε ότι η κυματοσυνάρτηση του συστήματος την χρονική στιγμή $t = 0$, είναι

$$\psi(x, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_3(x)$$

να βρεθούν

- a) η μέση ενέργεια του συστήματος.
- b) η αβεβαιότητα της ενέργειας.
- c) η κυματοσυνάρτηση του συστήματος.
- d) Η μέση ενέργεια του συστήματος κάθε χρονική στιγμή.
- e) Η αβεβαιότητα της ενέργειας κάθε χρονική στιγμή.



Ερώτημα α

- a. Γνωρίζουμε ότι η κυματοσυνάρτηση δίνεται γενικά από την έκφραση $\psi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) e^{-iE_n t/\hbar}$. Στην προκειμένη περίπτωση, που έχουμε τρεις ιδιοκαταστάσεις και για $t = 0$ έχουμε
- $$\psi(x, t = 0) = c_1 \psi_1(x) + c_2 \psi_2(x) + c_3 \psi_3(x).$$

Συγκρίνουμε με την κυματοσυνάρτηση της εκφώνησης και καταλαβαίνουμε ότι $c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $c_2 = 0$, $c_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Πριν συνεχίσουμε θα παραθέσουμε κι έναν εναλλακτικό τρόπο εύρεσης των συντελεστών.



Εναλλακτικός τρόπος προσδιορισμού συντελεστών

- Οι συντελεστές μπορούν να εκτιμηθούν και από την σχέση

$$c_n = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x)^* \psi(x, t = 0) dx \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} c_n &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x)^* \left[\frac{\psi_1 + \psi_3}{\sqrt{2}} \right] dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} (\psi_n^* \psi_1 + \psi_n^* \psi_3) dx = \frac{\delta_{n1} + \delta_{n3}}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

- Απόδειξη:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^*(x) \psi(x, t = 0) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^*(x) \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^*(x) \psi_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \delta_{nm} = c_m \end{aligned}$$



Συνέχεια ερωτήματος α

- Εφ' όσον προσδιορίσαμε τους συντελεστές της κυματοσυνάρτησης έχουμε για τις πιθανότητες:

$$\blacktriangleright p_1 = |c_1 e^{-iE_1 t/\hbar}|^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\blacktriangleright p_2 = |c_2 e^{-iE_2 t/\hbar}|^2 = 0$$

$$\blacktriangleright p_3 = |c_3 e^{-iE_3 t/\hbar}|^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Άρα } \langle E \rangle = \sum_n p_n E_n = \frac{E_1 + E_3}{2}$$

Το ίδιο αποτέλεσμα θα βρίσκαμε και από την σχέση:

$$\langle E \rangle = \sum_{n,m} c_n^* c_m e^{i(E_n - E_m)t/\hbar} H_{nm}$$

$$\text{όπου } H_{nm} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x) \hat{H} \psi_m(x) dx = E_n \delta_{nm}$$



Ερώτημα b

- Έχουμε $\langle E^2 \rangle = p_1 E_1^2 + p_2 E_3^2 = \frac{E_1^2 + E_3^2}{2}$
- Άρα η αβεβαιότητα της ενέργειας είναι

$$\begin{aligned} \Delta E &= [\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{E_1^2 + E_3^2}{2} - \left(\frac{E_1 + E_3}{2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left| \left(\frac{E_1 - E_3}{2} \right) \right| \end{aligned}$$



Ερωτήματα c,d,e

- Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η κυματοσυνάρτηση είναι:

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_1(x) e^{-iE_1 t/\hbar} + \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_3(x) e^{-iE_3 t/\hbar}$$

- Είδαμε ότι οι πιθανότητες είναι χρονοανεξάρτητες, δηλαδή το κβαντικό σύστημα είναι απομονωμένο και προφανώς
- $\langle E \rangle(t) = \langle E \rangle_{t=0} = \frac{E_1 + E_3}{2}$
- Η αβεβαιότητα της ενέργειας συνεπώς, θα είναι και αυτή χρονοανεξάρτητη και ίση με αυτή που βρήκαμε στο ερώτημα b.



Σύστημα δύο ενεργειακών καταστάσεων

- Έστω ένα κβαντικό σύστημα που περιγράφεται από δύο ενεργειακές καταστάσεις (ιδιοτιμές της ενέργειας του προβλήματος ιδιοτιμών), E_1 και E_2 . Το σύστημα αυτό είναι γνωστό και ως σύστημα δύο επιπέδων.
- Η κυματοσυνάρτηση θα είναι της μορφής

$$\psi(x, t) = c_1 e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} \psi_1(x) + c_2 e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}} \psi_2(x)$$

- Έχουμε πει ότι οι συντελεστές c_a και c_b είναι μιγαδικοί. Γενικά ένας μιγαδικός $z = a + bi$ γράφεται στην μορφή $z = |z|e^{i\varphi}$ με $\tan\varphi = \frac{b}{a}$.
 - Αν λοιπόν γράψουμε τους συντελεστές c_1 και c_2 σε αυτήν την μορφή, η κυματοσυνάρτηση παίρνει την μορφή
- $$\psi(x, t) = |c_1|e^{i\varphi_1}e^{-iE_1 t/\hbar}\psi_1(x) + |c_2|e^{i\varphi_2}e^{-iE_2 t/\hbar}\psi_2(x)$$
- Θα βρούμε μια γενική έκφραση για την μέση τιμή ενός οποιουδήποτε μεγέθους σε αυτό το σύστημα.



Μέση τιμή τελεστή σε σύστημα δύο ενεργειακών επιπέδων

- Για ένα μέγεθος W , έχουμε πει ότι ισχύει:

$$\langle W \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_n^* c_m e^{i \frac{(E_n - E_m)t}{\hbar}} W_{nm}$$

- Στην δεδομένη περίπτωση οι δείκτες θα παίρνουν τις τιμές $n = 1, 2$ και $m = 1, 2$.
- Αναπτύσσοντας το άθροισμα θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \langle W \rangle &= |c_1|^2 W_{11} + |c_2|^2 W_{22} + c_1^* c_2 e^{i(E_1 - E_2)t/\hbar} W_{12} \\ &\quad + c_2^* c_1 e^{i(E_2 - E_1)t/\hbar} W_{21} = \\ &= p_1 W_{11} + p_2 W_{22} + |c_1| |c_2| e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} e^{-i\omega_{21}t} W_{12} \end{aligned}$$

$$+ |c_1| |c_2| e^{-i(\varphi_2 - \varphi_1)} e^{i\omega_{21}t} W_{21} \quad \text{με } \omega_{21} = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}, W_{12} = (\psi_1, \widehat{W} \psi_2), \\ W_{21} = (\psi_2, \widehat{W} \psi_1)$$



Τελική σχέση

- Τα στοιχεία W_{12} και W_{21} μπορούν με την σειρά τους να γραφούν ως $W_{21} = |W_{21}|e^{i\delta_{21}}$ και $W_{12} = |W_{12}|e^{-i\delta_{21}}$.
- Η τελευταία ισότητα ισχύει λόγω ερμιτιανότητας. Δηλαδή θα έχουμε:

$$W_{21} = (\widehat{W}\psi_2, \psi_1) = (\psi_1, \widehat{W}\psi_2)^* = W_{12}^*$$

- Με βάση τα παραπάνω και σκεπτόμενοι ότι $|W_{12}| = |W_{21}|$ καταλήγουμε στην έκφραση:

$$\langle W \rangle = p_1 W_{11} + p_2 W_{22} + 2|c_1||c_2||W_{21}|\cos(\omega_{21}t + \delta_{21} + \varphi_{12}),$$

$$\text{με } \varphi_{12} = \varphi_1 - \varphi_2.$$



Παρατήρηση

- Παρατηρούμε ότι η τελική έκφραση περιλαμβάνει διαφορές φάσεις και όχι φάσεις μεμονωμένες (πχ φ_1 , αντί για φ_{12} που έχουμε).
- Η εξήγηση έχει ως εξής:

Έχουμε την κυματοσυνάρτηση

$$\begin{aligned}\psi(x, t) &= |c_1| e^{i\varphi_1} e^{-iE_1 t/\hbar} \psi_1(x) + |c_2| e^{i\varphi_2} e^{-iE_2 t/\hbar} \psi_2(x) = \\ &= e^{i\varphi_2} \left[|c_1| e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} \psi_1(x) + |c_2| e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}} \psi_2(x) \right] = e^{i\varphi_2} \tilde{\psi}(x, t)\end{aligned}$$

- Οι $\psi(x, t)$ και $\tilde{\psi}(x, t)$ παρόλο που διαφέρουν κατά τον παράγοντα $e^{i\varphi_2}$, περιγράφουν την ίδια φυσική κατάσταση, γιατί σημασία στην κβαντομηχανική έχει η πιθανότητα. Το εν λόγω εκθετικό αφήνει την πιθανότητα αναλλοίωτη. Άρα φυσική σημασία έχουν μόνο οι διαφορές φάσης.



Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Ανδρέας Τερζής, 2014. **Ανδρέας Τερζής**.
«**Κβαντική Φυσική Ι. Σύστημα δύο ενεργειακών επιπέδων**». Έκδοση: **1.0**.
Πάτρα **2014**. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:
<https://eclass.upatras.gr/courses/PHY1957/>



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.