



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΠΑΤΡΩΝ  
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά  
μαθήματα ΠΠ

# Κβαντική Φυσική Ι

Ενότητα 11: Μεταθέτες και ιδιότητες

Ανδρέας Τερζής  
Σχολή Θετικών Επιστημών  
Τμήμα Φυσικής

# Σκοπός ενότητας

- Σκοπός της ενότητας είναι να δοθούν ορισμένες από τις βασικές ιδιότητες του μεταθέτη καθώς και η γενικευμένη σχέση αβεβαιότητας.

# Περιεχόμενα ενότητας

- Ιδιότητες
- Παράδειγμα
- Γενικευμένη σχέση αβεβαιότητας

# Ιδιότητες (I)

Να διευκρινίσουμε εξ' αρχής ότι παραλείπουμε τα «καπέλα» των τελεστών για λόγους ευκολίας.

- Από τον ορισμό του μεταθέτη προκύπτει ότι για οποιονδήποτε τελεστή  $A$  ισχύει:  $[A, A] = 0$ .

- Για τελεστές  $A, B, C$  θα έχουμε

$$1. [A, B + C] = [A, B] + [A, C]$$

$$\begin{aligned} \text{Απόδειξη: } [A, B + C] &= A(B + C) - (B + C)A = \\ &= AB + AC - BA - CA = (AB - BA) + (AC - CA) = \\ &= [A, B] + [A, C] \end{aligned}$$

Με την ίδια λογική απόδειξης  $[A + B, C] = [A, C] + [B, C]$ .

Σαν γενίκευση των παραπάνω έχουμε την ιδιότητα  $[A + B, C + D] = [A, C] + [A, D] + [B, C] + [B, D]$ .



## Ιδιότητες (II)

$$2. [A, B \cdot C] = [A, B]C + B[A, C]$$

$$\text{Απόδειξη: } [A, B \cdot C] = ABC - BCA = ABC - BCA + BAC - BAC$$

(Προσθέσαμε και αφαιρέσαμε τον όρο BAC.)

$$\begin{aligned} \text{Άρα } [A, B \cdot C] &= (AB - BA)C + B(AC - CA) = \\ &= [A, B]C + B[A, C] \end{aligned}$$

Ομοίως θα έχουμε:

$$[A \cdot B, C] = A[B, C] + [A, C]B$$



# Εφαρμογή ιδιοτήτων-Εφαρμογή 1

- Μπορούμε να υπολογίσουμε ταυτόχρονα τις συνιστώσες  $L_x, L_y$  του τελεστή της στροφορμής;
- Έχουμε ότι  $L_x = (yp_z - zp_y), L_y = (zp_x - xp_z)$

$$\text{Άρα } [L_x, L_y] = [(yp_z - zp_y), (zp_x - xp_z)]$$

Με βάση την ιδιότητα (1) έχουμε:

$$\begin{aligned} [L_x, L_y] &= \\ &= [yp_z, zp_x] - [yp_z, xp_z] - [zp_y, zp_x] + [zp_y, xp_z] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangleright [yp_z, zp_x] &= z[yp_z, p_x] + [yp_z, z]p_x = \\ &= zy[p_z, p_x] + z[y, p_x]p_z + y[p_z, z]p_x + [y, z]p_xp_z = \\ &= -i\hbar yp_x \end{aligned}$$

Ο μόνος μη μηδενικός μεταθέτης είναι ο  $[p_z, z] = -i\hbar$ . Έχουμε ήδη αναφέρει ότι  $[x, p_x] = i\hbar$ . Ομοίως  $[y, p_y] = [z, p_z] = i\hbar$ .



# Συνέχεια εφαρμογής

Με τον ίδιο τρόπο (δηλ. με διαδοχική χρήση της 2<sup>ης</sup> ιδιότητας) βρίσκουμε ότι ο τελευταίος μεταθέτης είναι

$$\blacktriangleright [z p_y, x p_z] = -i\hbar x p_y$$

Ακόμη για τους «ενδιάμεσους όρους» έχουμε:

$$\blacktriangleright [y p_z, x p_z] = [z p_y, z p_x] = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα συνοψίζοντας } [L_x, L_y] &= -i\hbar y p_x + i\hbar x p_y = \\ &= i\hbar(x p_y - y p_x) = i\hbar L_z \end{aligned}$$

Με την ίδια διαδικασία προκύπτει ότι:

$$\bullet [L_y, L_z] = i\hbar L_x, [L_z, L_x] = i\hbar L_y$$



## Εφαρμογή 2

• Να υπολογιστεί ο μεταθέτης  $[L^2, L_Z]$ , όπου  $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ , το μέτρο της στροφορμής.

• Θα έχουμε  $[L^2, L_Z] = [L_x^2 + L_y^2 + L_z^2, L_Z] = [L_x^2, L_Z] + [L_y^2, L_Z] + [L_z^2, L_Z]$

$$\begin{aligned} [L_z^2, L_Z] &= 0, \text{άρα: } [L^2, L_Z] = [L_x L_x, L_Z] + [L_y L_y, L_Z] = \\ &= L_x [L_x, L_Z] + [L_x, L_Z] L_x + L_y [L_y, L_Z] + [L_y, L_Z] L_y = \\ &= -i\hbar L_x L_y - i\hbar L_y L_x + i\hbar L_y L_x + i\hbar L_x L_y = 0. \end{aligned}$$

Άρα μπορώ να μετρήσω ταυτόχρονα τα μεγέθη  $L^2, L_Z$ .





# Γενικευμένη σχέση αβεβαιότητας

- Η γενικευμένη σχέση αβεβαιότητας (δηλ. η σχέση αβεβαιότητας που αναφέρεται σε οποιαδήποτε φυσικά μεγέθη A και B) είναι:
- $(\Delta A) \cdot (\Delta B) \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle|$
- Αποδεικνύεται με γεωμετρικό τρόπο.
- Αν όπου A και B, θεωρήσουμε τα μεγέθη θέση και ορμή παίρνουμε την γνωστή αρχή αβεβαιότητας του Heisenberg, δηλ.
- $(\Delta x) \cdot (\Delta p_x) \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{x}, \hat{p}] \rangle| = \frac{\hbar}{2}$
- Ανάλογα μπορούμε να έχουμε:
- $(\Delta L_x) \cdot (\Delta L_y) \geq \frac{1}{2} |\langle [L_x, L_y] \rangle| = \frac{1}{2} |\langle i\hbar L_z \rangle| = \frac{\hbar}{2} |\langle L_z \rangle|$



Τέλος Ενότητας

# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, **Ανδρέας Τερζής**. Ανδρέας Τερζής  
«**Κβαντική Φυσική Ι. Μεταθέτες και ιδιότητες**». Έκδοση: **1.0**. Πάτρα **2015**.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

<https://eclass.upatras.gr/courses/PHY1957/>



# Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά Δημιουργού, Μη Εμπορική Χρήση, Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.