



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα ΠΠ

Κβαντική Φυσική Ι

Ενότητα 9: Χρονοεξαρτώμενη εξίσωση Schrödinger

Τερζής Ανδρέας
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Φυσικής

Σκοπός ενότητας

- Σκοπός της ενότητας είναι να δοθεί η γενική λύση της χρονοεξαρτώμενης εξίσωσης Schrödinger και να υπολογιστεί με βάση αυτή η μέση ενέργεια.

Περιεχόμενα ενότητας

- Γενική μορφή κυματοσυνάρτησης
- Μέση ενέργεια
- Φυσική σημασία συντελεστών στο ανάπτυγμα της κυματοσυνάρτησης

Πλήρης κυματοσυνάρτηση

- Η γενική λύση της εξίσωσης Schrödinger είναι της μορφής

$$\psi_n(x)e^{-iE_n t/\hbar}$$

- Όμως η εξίσωση Schrödinger είναι γραμμική, άρα οποιοσδήποτε γραμμικός συνδυασμός είναι και αυτός λύση.
- Άρα η πιο γενική λύση είναι της μορφής

$$\Psi(x, t) = \sum_n c_n \psi_n(x) e^{-iE_n t/\hbar}$$

- Υπολογίζοντας την μέση ενέργεια, θ' ανακαλύψουμε και την φυσική σημασία του c_n .



Μέση τιμή ενέργειας

- Για την μέση τιμή οποιουδήποτε φυσικού μεγέθους A έχουμε ότι $\langle A \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \hat{A} \Psi dx$.
- Άρα για την μέση ενέργεια θα ισχύει

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x, t) \hat{H} \Psi(x, t) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_n c_n^* \Psi_n^*(x) e^{\frac{iE_n t}{\hbar}} \hat{H} \left[\sum_m c_m \Psi_m(x) e^{-\frac{iE_m t}{\hbar}} \right] dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_n c_n^* \Psi_n^*(x) e^{\frac{iE_n t}{\hbar}} \left[\sum_m c_m \hat{H} \Psi_m(x) e^{-\frac{iE_m t}{\hbar}} \right] dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_n c_n^* \Psi_n^*(x) e^{\frac{iE_n t}{\hbar}} \left[\sum_m c_m E \Psi_m(x) e^{-\frac{iE_m t}{\hbar}} \right] dx \end{aligned}$$



Μέση τιμή ενέργειας(συνέχεια)

- Στην συνέχεια θα έχουμε

$$\begin{aligned}\langle E \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n,m} c_n^* c_m E_m \Psi_m(x) \Psi_n^*(x) e^{i(E_n - E_m)t/\hbar} dx = \\ &= \sum_{n,m} c_n^* c_m E_m e^{i(E_n - E_m)t/\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_m(x) \Psi_n^*(x) dx\end{aligned}$$

- Για να προχωρήσουμε θα κάνουμε χρήση της **σχέσης ορθογωνιότητας** των ιδιοσυναρτήσεων:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n^* \Psi_m dx = \delta_{nm} = \begin{cases} 0, n \neq m \\ 1, n = m \end{cases}$$



Μέση τιμή ενέργειας(τελική έκφραση)

- $\langle E \rangle = \sum_{n,m} c_n^* c_m E_m e^{i(E_m - E_n)t/\hbar} \delta_{mn} =$
 $= \sum_n c_n^* c_n E_n = \sum_n |c_n|^2 E_n$
- Από την στατιστική γνωρίζουμε $\langle E \rangle = \sum_n P_n E_n$ όπου P_n είναι οι πιθανότητες.
- Επομένως $P_n = |c_n|^2$.



Επεξηγήσεις

Εξαγάγαμε την φυσική σημασία των συντελεστών στο ανάπτυγμα της κυματοσυνάρτησης. Τα τετράγωνά τους συμβολίζουν την πιθανότητα να βρεθεί το σύστημα στην εκάστοτε ιδιοκατάσταση. Π.χ. στην περίπτωσή μας $|c_1|^2$ είναι η πιθανότητα να βρούμε το σύστημα στην κατάσταση ψ_1 , **όταν το παρατηρήσουμε**. Πριν την παρατήρηση έχουμε άγνοια της κατάστασης στην οποία βρίσκεται. Θεωρούμε, λοιπόν, την επαλληλία καταστάσεων που αναφέραμε, που απαρτίζεται ουσιαστικά από τις ιδιοσυναρτήσεις της ενέργειας ψ_n (δηλαδή ισχύει η εξίσωση ιδιοτιμών $\hat{H}\psi_n = E\psi_n$) με τους αντίστοιχους συντελεστές c_n . Όταν παρατηρήσουμε το σύστημα, η κυματοσυνάρτηση «καταρέει» και ουσιαστικά το αποτέλεσμα που λαμβάνουμε είναι **μια** από τις δυνατές τιμές ενέργειας (μια ιδιοτιμή), που αντιστοιχεί σε **μια** ιδιοσυνάρτηση, η οποία έχει με την σειρά της συγκεκριμένη πιθανότητα εμφάνισης.



Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, **Ανδρέας Τερζής**. Ανδρέας Τερζής
«**Κβαντική Φυσική Ι. Χρονοεξαρτώμενη εξίσωση Schrödinger**». Έκδοση: **1.0**.
Πάτρα **2015**. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:
<https://eclass.upatras.gr/courses/PHY1957/>



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά Δημιουργού, Μη Εμπορική Χρήση, Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.