



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΠΑΤΡΩΝ  
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά  
μαθήματα ΠΠ

# Κβαντική Φυσική Ι

Ενότητα 8: Ολοκλήρωση μελέτης απειρόβαθου  
πηγαδιού

Ανδρέας Τερζής  
Σχολή Θετικών Επιστημών  
Τμήμα Φυσικής

# Σκοπός ενότητας

- Σκοπός της ενότητας είναι να ολοκληρωθεί η μελέτη που αφορά το απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού.

# Περιεχόμενα ενότητας

- Σύντομη επανάληψη των αποτελεσμάτων που εξαγάγαμε στην προηγούμενη ενότητα
- Συνάρτηση βήματος
- Συμμετρικό απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού

# Αποτελέσματα που γνωρίζουμε

- Στην προηγούμενη ενότητα μελετήσαμε το λεγόμενο «απλό» απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού με την συνάρτηση του δυναμικού να δίνεται από την σχέση

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq L \\ \infty, & x < 0, x > L \end{cases}$$

- Οι ιδιοσυναρτήσεις της ενέργειας δίνονται από την σχέση

$$\Psi_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), n = 1, 2, 3 \dots (\text{όταν } 0 \leq x \leq L \text{ και μηδέν σε άλλη περίπτωση}).$$

- Οι ιδιοτιμές της ενέργειας δίνονται από την σχέση

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n^2, n = 1, 2, 3 \dots$$

- Ένα παράδειγμα φυσικού συστήματος που περιγράφεται ως απειρόβαθο πηγάδι, είναι ένα ηλεκτρόνιο εγκλωβισμένο μέσα σ' ένα μόριο.



# Συνάρτηση βήματος Heaviside

- Η συνάρτηση βήματος ορίζεται ως

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Η συνάρτηση αυτή μας βοηθάει στο να γράψουμε πιο «μαζεμένα» τις ιδιοσυναρτήσεις του απειρόβαθου (δηλαδή να έχουμε **μια** έκφραση για όλες τις δυνατές περιοχές).

- Θα έχουμε

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \Theta(x)\Theta(L-x),$$

$$\text{όπου } \Theta(L-x) = \begin{cases} 0, & x > L \\ 1, & x \leq L \end{cases}$$



# Λύσεις με εκθετική μορφή

- Είχαμε αναφέρει στην προηγούμενη ενότητα ότι οι λύσεις της εξίσωσης Schrödinger στο εσωτερικό του πηγαδιού είναι της μορφής  $\psi(x) = A\sin kx + B\cos kx$ . Αυτή η μορφή των λύσεων αποτέλεσε την αφετηρία για την μετέπειτα ανάλυσή μας.
- Θα δείξουμε ότι τα ίδια αποτελέσματα προκύπτουν, αν κάποιος επιλέξει την εκθετική μορφή των λύσεων αντί για την τριγωνομετρική.
- Θεωρούμε επομένως την γενική λύση

$$\psi(x) = A'e^{ikx} + B'e^{-ikx}$$



# Εφαρμογή συνοριακών συνθηκών

- Για  $x = 0$ , έχουμε  $\psi(0) = 0 \Rightarrow A' + B' = 0$  (1)
- Για  $x = L$ , έχουμε  $\psi(L) = 0 \Rightarrow A'e^{ikL} + B'e^{-ikL} = 0$  (2)
- Από (1) και (2) έχουμε

$$\psi(x) = A'e^{ikx} - A'e^{-ikx} = 2A'i \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} = 2iA' \sin kx$$

Άρα εφαρμόζοντας για  $x = L$  θα πρέπει  $\sin kL = 0$  και επομένως  $kL = n\pi \dots$

- Είναι εμφανές λοιπόν ότι με την ολοκλήρωση της διαδικασίας θα καταλήξουμε στα ίδια ακριβώς αποτελέσματα.



# Συμμετρικό απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού

- Με τον όρο αυτό, εννοούμε ότι το πηγάδι θα εκτείνεται από  $\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)$ , σ'ένα δηλαδή συμμετρικό διάστημα.
- Το δυναμικό σε αυτήν την περίπτωση δίνεται από την σχέση

$$V(x) = \begin{cases} 0, & |x| \leq \frac{L}{2} \\ \infty, & |x| > \frac{L}{2} \end{cases}$$

- Στο εσωτερικό η λύση θα έχει ξανά την γενική μορφή

$$\Psi(x) = Ce^{ikx} + De^{-ikx}$$





# Εφαρμογή συνοριακών συνθηκών

- Για  $x = -\frac{L}{2}$ ,  $\psi\left(-\frac{L}{2}\right) = Ce^{-ikL/2} + De^{ikL/2} = 0$ .
- Για  $x = \frac{L}{2}$ ,  $\psi\left(\frac{L}{2}\right) = Ce^{ikL/2} + De^{-ikL/2} = 0$ .
- Το σύστημα σε μορφή πινάκων γράφεται ως
$$\begin{pmatrix} e^{-ikL/2} & e^{ikL/2} \\ e^{ikL/2} & e^{-ikL/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Γνωρίζουμε ότι για να έχει μη μηδενική λύση το σύστημα θα πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών να είναι μηδέν. Δηλαδή:

$$\text{Det} \begin{pmatrix} e^{-ikL/2} & e^{ikL/2} \\ e^{ikL/2} & e^{-ikL/2} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow e^{-ikL} - e^{ikL} = 0 \Rightarrow \sin kL = 0$$



# Μορφή ιδιοσυναρτήσεων

- Είδαμε ότι η συνθήκη για τα  $k$  είναι ίδια με αυτή του απλού πηγαδιού.
- Μπορούμε να βρούμε τις ιδιοσυναρτήσεις στην συνέχεια κάνοντας κάποιες πράξεις, αλλά εδώ θα παρουσιάσουμε έναν εναλλακτικό τρόπο εύρεσής τους.
- Ξεκινάμε από την λύση που βρήκαμε στην μη συμμετρική περιγραφή του δυναμικού, δηλαδή την

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} \Theta(x) \Theta(L - x)$$



# Τελική μορφή ιδιοσυναρτήσεων

- Καθώς το δυναμικό της συμμετρικής μορφής, μπορεί να προέλθει από την μετατόπιση του μη συμμετρικού δυναμικού κατά  $L/2$ , αναμένουμε και η λύση να προέρχεται από μια ανάλογη μετατόπιση, που ισοδυναμεί με την αντικατάσταση του  $x$  με  $x + L/2$ .
- Έτσι στο συμμετρικό δυναμικό θα έχουμε

$$\begin{aligned}\psi_n(x) &= \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi \left(x + \frac{L}{2}\right)}{L} \Theta \left(x + \frac{L}{2}\right) \Theta \left(L - x - \frac{L}{2}\right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \left(\frac{n\pi x}{L} + \frac{n\pi}{2}\right) \Theta \left(x + \frac{L}{2}\right) \Theta \left(\frac{L}{2} - x\right)\end{aligned}$$

- $\psi_n(x) = \Theta \left(x + \frac{L}{2}\right) \Theta \left(\frac{L}{2} - x\right) \begin{cases} \sqrt{2/L} \cos \left(\frac{n\pi x}{L}\right), & n = 1, 3, 5, \dots \\ \sqrt{2/L} \sin \left(\frac{n\pi x}{L}\right), & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$



# Συμπέρασμα

- Έχουμε λοιπόν άρτιες λύσεις για περιττό  $n$  και περιττές λύσεις για άρτιο.
- Η συμπεριφορά αυτή είναι αναμενόμενη, αφού έχουμε συμμετρικό δυναμικό.



# Αβεβαιότητα ορμής και μέση ενέργεια

- Αν από την αρχή αβεβαιότητας θεωρήσουμε (για το απειρόβαθο πηγάδι) ότι  $(\Delta x)(\Delta p) \sim \hbar$  τότε επειδή  $\Delta x \sim L$ , θα έχουμε  $\Delta p \sim \hbar/L$ .
- Για την μέση ενέργεια θα ισχύει ότι  $\langle E \rangle = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m}$
- Όμως  $(\Delta p)^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$ . Όπως έχουμε αναφέρει, όταν έχουμε πραγματικές ιδιοσυναρτήσεις  $\langle p \rangle = 0$

και άρα  $(\Delta p)^2 = \langle p^2 \rangle$ .

- Επομένως  $\langle E \rangle = \frac{(\Delta p)^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2mL^2}$
- Άρα στην περίπτωση που η αβεβαιότητα θέσης-ορμής λαμβάνει την ελάχιστη τιμή της, παρατηρούμε ότι η τάξη μεγέθους της μέσης ενέργειας, συμπίπτει με την τάξη μεγέθους της θεμελιώδους ενεργειακής στάθμης του απλού πηγαδιού ( $n = 1$ ).



Τέλος Ενότητας

# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, **Ανδρέας Τερζής**. Ανδρέας Τερζής  
«**Κβαντική Φυσική Ι. Ολοκλήρωση μελέτης απειρόβαθου πηγαδιού**». Έκδοση:  
**1.0**. Πάτρα **2015**. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:  
<https://eclass.upatras.gr/courses/PHY1957/>





# Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά Δημιουργού, Μη Εμπορική Χρήση, Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.