



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα ΠΠ

Κβαντική Φυσική Ι

Ενότητα 2: Σύστημα δύο σωματιδίων-αρχή της
αντιστοιχίας

Ανδρέας Τερζής
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Φυσικής

Σκοπός ενότητας

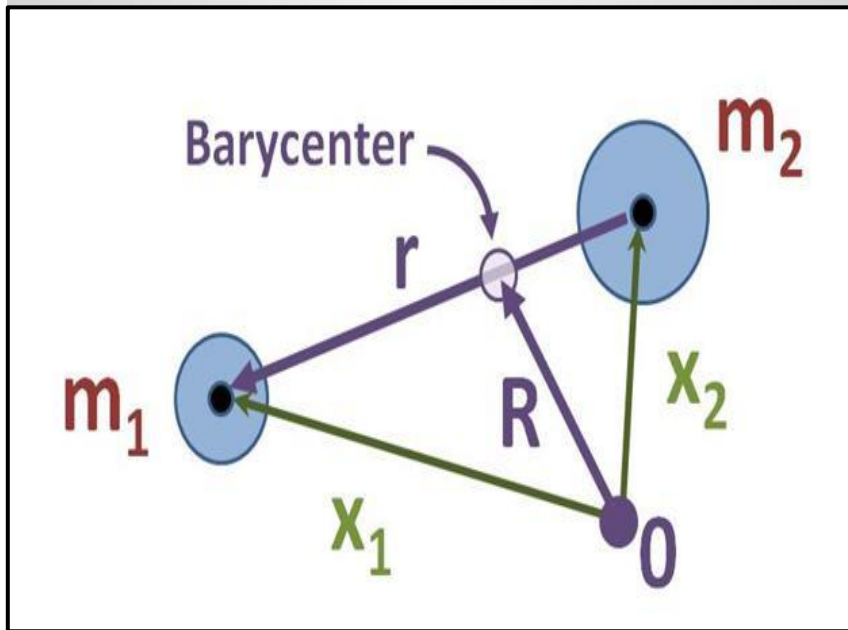
- Σκοπός της ενότητας είναι η σύντομη παρουσίαση μελέτης της κίνησης συστήματος δύο σωματιδίων (πχ. positronium), του μοντέλου Bohr-Sommerfeld, καθώς και να τεθούν τα όρια ισχύος της κλασικής φυσικής.

Περιεχόμενα ενότητας

- Μελέτη συστήματος δύο σωματιδίων
- Αρχή της αντιστοιχίας
- Μοντέλο Bohr-Sommerfeld

Σύστημα δύο σωματιδίων

Εικόνα 1: Σύστημα δύο σωματιδίων



- Στην κλασική φυσική το πρόβλημα των δύο σωμάτων αφορά την κίνηση δύο σωματιδίων, που αλληλεπιδρούν μόνο μεταξύ τους (πχ. κίνηση «κλασικού» ηλεκτρονίου γύρω από τον πυρήνα).
- Το πρόβλημα των δύο σωμάτων μπορεί να αναχθεί σε δύο επιμέρους προβλήματα που το καθένα αφορά την κίνηση ενός σώματος. Παρακάτω θα δούμε πώς γίνεται αυτό.



Σύστημα δύο σωματιδίων-Μελέτη

- Έστω \vec{r}_1, \vec{r}_2 οι θέσεις των δύο σωματιδίων και m_1, m_2 οι μάζες τους. Τότε από τον 2^ο νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{12} \quad (1) \text{ και } m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{21} \quad (2).$$

Η \vec{F}_{12} είναι η δύναμη στην m_1 εξ' αιτίας της αλληλεπίδρασης με την m_2 . Για την \vec{F}_{21} ισχύει το αντίστροφο.

- Προσθέτοντας τις εξισώσεις (1) και (2) καταλήγουμε στην εξίσωση για το κέντρο μάζας. Αφαιρώντας τις (1) και (2) παίρνουμε την εξίσωση που περιγράφει πώς το διάνυσμα $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ μεταβάλλεται με τον χρόνο. Το πρόβλημα ανάγεται σε δύο επιμέρους που το καθένα αντιστοιχεί στην κίνηση ενός σώματος. (Το ένα σώμα έχει διάνυσμα θέσης αυτό του κέντρου μάζας και το άλλο έχει διάνυσμα θέσης \vec{r}).



Εξισώσεις του συστήματος (I)

Προσθέτοντας τις (1) και (2) έχουμε:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = (m_1 + m_2) \ddot{\vec{R}} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0.$$

(Ισχύει ότι $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ από τον τρίτο νόμο Νεύτωνα).

Ορίζουμε $\ddot{\vec{R}} = \frac{m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2}{m_1 + m_2}$. \vec{R} είναι το διάνυσμα του κέντρου μάζας.

Η εξίσωση $\ddot{\vec{R}} = 0$, δείχνει ότι η ταχύτητα $\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt}$ του κέντρου μάζας είναι σταθερή.



Εξισώσεις του συστήματος (II)

Αφαιρώντας τις (1) και (2) έχουμε:

$$(\ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1) = \vec{F}_{21} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = \frac{1}{\mu} \Rightarrow \mu \ddot{\vec{r}}_{21} = \vec{F}_{21}.$$

Η ποσότητα μ ονομάζεται **ανηγμένη μάζα** του συστήματος και είναι

ίση με $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$.

- Για τα υδρογονοειδή θα ισχύει:

$$\mu = \frac{m_e A m_p}{A m_p + m_e} = \frac{1860 A m_e^2}{(1860 A + 1) m_e} \approx m_e \text{ (όπου } m_e, m_p \text{ οι μάζες πρωτονίου και ηλεκτρονίου αντίστοιχα και } A \text{ ο μαζικός αριθμός)}.$$

- Για το positronium (σύστημα ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου) θα ισχύει:

$$\mu = \frac{m m}{m + m} = \frac{m}{2}. \text{ Άρα σε κάποια φυσικά συστήματα η ανηγμένη μάζα είναι σημαντική (positronium), ενώ σε άλλα όχι (υδρογονοειδή).}$$



Άσκηση 3.1

Εκφώνηση: Να βρεθεί η έκφραση για την περίοδο περιστροφής του ηλεκτρονίου στα υδρογονοειδή.

Λύση:

$$\text{Ισχύει ότι } v = \omega r \Rightarrow v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi r}{v}.$$

Αντικαθιστούμε στην παραπάνω σχέση τις εκφράσεις που γνωρίζουμε για την ακτίνα και την ταχύτητα στα υδρογονοειδή και έχουμε:

$$T_n = \frac{2\pi\hbar^3}{mZ^2e^4} n^3$$

Επειδή λοιπόν η ταχύτητα και η ακτίνα είναι κβαντισμένες, το ίδιο θα είναι και η περίοδος.



Αρχή της αντιστοιχίας

- Σύμφωνα με την αρχή της αντιστοιχίας η κβαντική φυσική συμπίπτει με την κλασική θεωρία στο όριο των μεγάλων κβαντικών αριθμών.
- Σύμφωνα με την κλασική φυσική, το ηλεκτρόνιο θα πρέπει να εκπέμπει ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία με την ίδια συχνότητα που περιστρέφεται. Όμως σύμφωνα με τον κβαντική για την συχνότητα του ηλεκτρονίου ισχύει η σχέση: $E = h\nu$. Στο όριο των μεγάλων κβαντικών αριθμών οι δύο θεωρήσεις θα δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα.



Αρχή της αντιστοιχίας(συνέχεια..)

- Η ενέργεια για μετάβαση μεταξύ δύο γειτονικών τροχιών στο άτομο του υδρογόνου δίνεται από την σχέση (της κβαντικής φυσικής) :

$$\Delta E = -\frac{Z^2 m e^4}{2 \hbar^2} \left(\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} \right).$$

Για $n \rightarrow \infty$, η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\Delta E = \frac{Z^2 m e^4}{\hbar^2} \frac{1}{n^3} = h\nu = h \frac{1}{T'}.$$

Λύνοντας ως προς T' παρατηρούμε ότι πράγματι το αποτέλεσμα είναι το ίδιο με αυτό της προηγούμενης άσκησης(δηλαδή η κβαντική θεώρηση συμπίπτει με την κλασική).

- Το παραπάνω παράδειγμα είναι μια εφαρμογή της αρχής της αντιστοιχίας.



Μοντέλο Bohr-Sommerfeld

- Το μοντέλο Bohr – Sommerfeld αφορά την κβάντωση του χώρου των φάσεων, γεγονός που επιτρέπει τις ελλειπτικές τροχιές στο ηλεκτρόνιο (αντί για τις κυκλικές).
- Η βασική ιδέα είναι ότι το σύστημα προς μελέτη, υπακούει μεν στην κλασική μηχανική, αλλά η συμπεριφορά του πρέπει να είναι τέτοια ώστε να ισχύει η σχέση:

$$\oint p_i dq_i = n_i h,$$

όπου p_i είναι γενικευμένες ορμές του συστήματος και q_i οι αντίστοιχες συντεταγμένες. Οι αριθμοί n_i είναι ακέραιοι και το ολοκλήρωμα υπολογίζεται λαμβάνοντας υπ' όψη ότι η ενέργεια είναι σταθερή.



Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, **Ανδρέας Τερζής**. Ανδρέας Τερζής
«**Κβαντική Φυσική Ι. Σύστημα δύο σωματιδίων-Αρχή της αντιστοιχίας**».
Έκδοση: **1.0**. Πάτρα **2015**. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:
<https://eclass.upatras.gr/courses/PHY1957/>



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά Δημιουργού, Μη Εμπορική Χρήση, Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνα 1:

http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Two-body_Jacobi_coordinates.JPG

