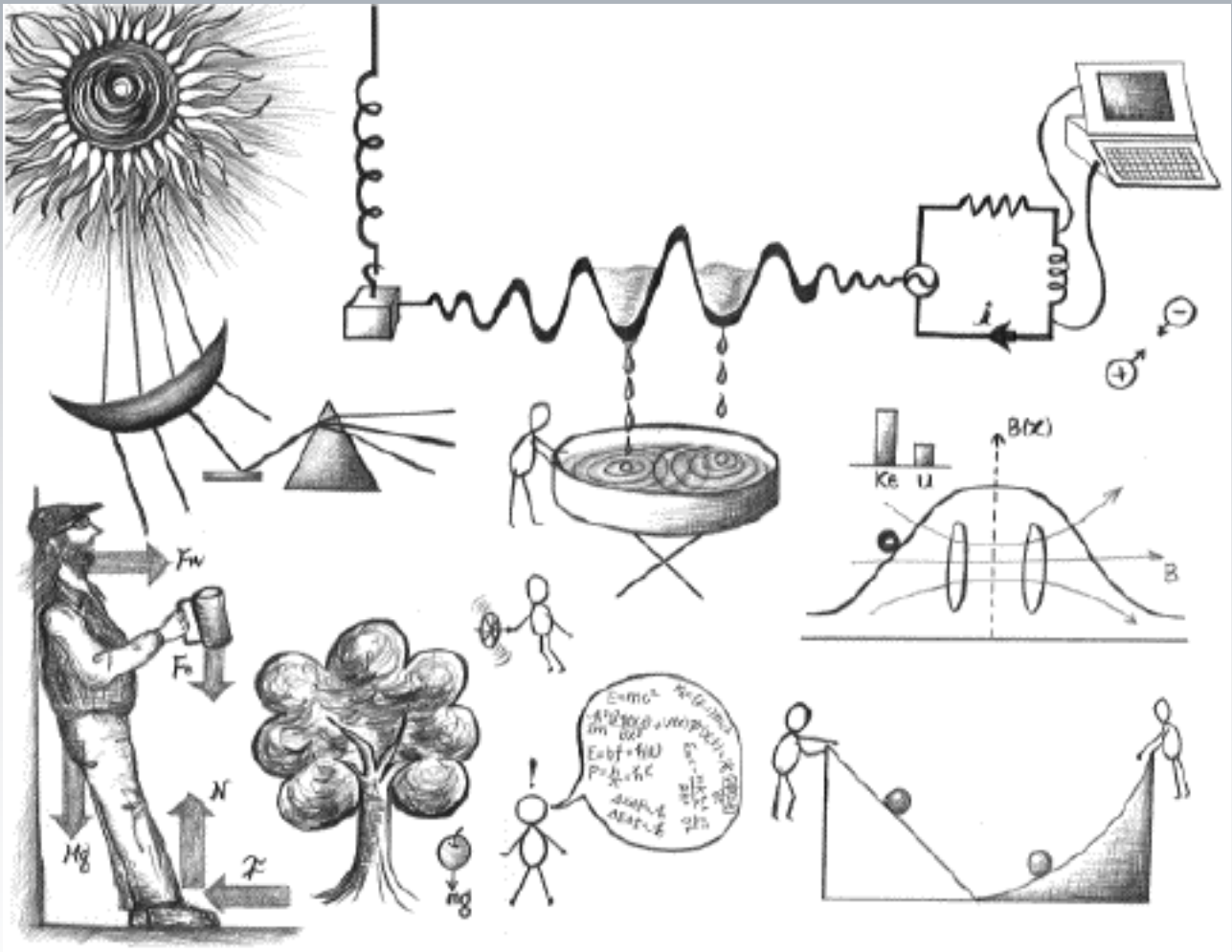


ΣΑΛΤΑΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ
Επίκουρος Καθηγητής ΤΕΙ Κρήτης

Εργαστηριακός Οδηγός Φυσικής



Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά
Συγγράμματα και Βοηθήματα
www.kallipos.gr

HELLINK
Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ
2007-2013
Πρόγραμμα για τη ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΣΑΛΤΑΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ
Επίκουρος Καθηγητής ΤΕΙ Κρήτης

Εργαστηριακός Οδηγός Φυσικής



**Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά
Συγγράμματα και Βοηθήματα**
www.kallipos.gr

Εργαστηριακός Οδηγός Φυσικής

Συγγραφή

Βασίλειος Σάλτας, Επίκουρος Καθηγητής ΤΕΙ Κρήτης

Κριτικός αναγνώστης

Δημήτριος Βλάχος, Επίκουρος Καθηγητής Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Συντελεστές έκδοσης

ΓΡΑΦΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Κυριάκος Παπαδόπουλος

ISBN: 978-960-603-121-2

Copyright © ΣΕΑΒ, 2015



Το παρόν έργο αδειοδοτείται υπό τους όρους της άδειας Creative Commons Αναφορά Δημιουργού - Μη Εμπορική Χρήση - Όχι Παράγωγα Έργα 3.0. Για να δείτε ένα αντίγραφο της άδειας αυτής επισκεφτείτε τον ιστότοπο <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/gr/>

ΣΥΝΔΕΣΜΟΣ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΩΝ

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Ηρώων Πολυτεχνείου 9, 15780 Ζωγράφου

www.kallipos.gr

Η εικόνα του εξώφυλλου προέρχεται από το διαδίκτυο (<http://www.bellevuecollege.edu/physics/>)

*Στη Μαίρη και στη Μέμη για τη συμπαράστασή τους και το χρόνο που μου πρόσφεραν,
στη Δανάη και στη Μελένια για το χρόνο που τους στέρησα.*

Πίνακας περιεχομένων

Πίνακας Συνοτμεύσεων – Ακρωνύμια	vi
Πρόλογος	v
Εισαγωγή	viii
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 – Εισαγωγή στις μετρήσεις	
1.1. Φυσικά μεγέθη	1
1.1.1. Γενικά	1
1.1.2. Χρονική εξάρτηση φυσικών μεγεθών	2
1.2. Συστήματα μονάδων μέτρησης	3
1.3. Διαστατική ανάλυση	5
1.3.1. Εφαρμογή στον έλεγχο ορθότητας εξίσωσης	5
1.3.2. Ανάλυση διαστάσεων για την εύρεση της κεντρομόλου δύναμης	6
1.3.3. Ανάλυση διαστάσεων για την εύρεση της περιόδου ταλάντωσης εκκρεμούς	7
1.4. Είδη μετρήσεων και κατηγορίες σφαλμάτων	7
1.5. Η αβεβαιότητα σε μία άμεση μέτρηση	9
1.6. Ερωτήσεις – Ασκήσεις	12
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 – Όργανα μετρήσεων	
2.1. Όργανα μέτρησης και μετρητικές διατάξεις	13
2.2. Ταξινομήσεις των οργάνων μέτρησης	14
2.2.1. Αναλογικά και ψηφιακά όργανα μέτρησης	14
2.2.2. Παθητικά και ενεργητικά όργανα μέτρησης	15
2.2.3. Όργανα μηδενισμού και απόκλισης	15
2.2.4. Όργανα απεικόνισης ή καταγραφής	15
2.3. Στατικός χαρακτηρισμός των οργάνων μέτρησης	15
2.3.1. Ορθότητα	16
2.3.2. Πιστότητα	16
2.3.3. Επαναληψιμότητα και αναπαραγωγιμότητα	17
2.3.4. Εύρος τιμών	17
2.3.5. Γραμμικότητα	17
2.3.6. Ευαισθησία	18
2.3.7. Μετατόπιση και ολίσθηση	19
2.3.8. Υστέρηση	19
2.4. Δυναμικός χαρακτηρισμός των οργάνων μέτρησης	20
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 – Παρουσίαση πειραματικών αποτελεσμάτων	
3.1. Μέση τιμή και αβεβαιότητα	23
3.2. Σημαντικά ψηφία και στρογγυλοποίηση αποτελεσμάτων	24
3.3. Παραδείγματα	26
3.3.1. Υπολογισμός όγκου ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου	26
3.3.2. Πράξεις μεταξύ αριθμών από πειραματικές μετρήσεις	27
3.3.3. Υπολογισμός μέσης τιμής και τυπικής απόκλισης	27
3.4. Γραφικές παραστάσεις και συσχετισμός δεδομένων	28
3.4.1. Γραμμική εξάρτηση δύο μεγεθών	28
3.4.1.1. Διάγραμμα διασποράς	28
3.4.1.2. Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων για την εύρεση της καλύτερης ευθείας	29
3.4.1.3. Εφαρμογή στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση	31
3.4.2. Εξάρτηση δύναμης δύο μεγεθών	33
3.4.2.1. Λογαριθμική αναπαράσταση	33
3.4.2.2. Εφαρμογή στην ταλάντωση του απλού εκκρεμούς	34

3.4.3. Εκθετική εξάρτηση δύο μεγεθών	37
3.4.3.1. Εκθετική αναπαράσταση μεγεθών	37
3.4.3.2. Εφαρμογή στην αποσβενόμενη ταλάντωση	38
3.5. Πίνακες – Γραμμική Παρεμβολή	41
3.6. Ασκήσεις	42
 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 – Εισαγωγή στη στατιστική ανάλυση των μετρήσεων	
4.1. Τυχαία και συστηματικά σφάλματα	45
4.2. Απεικόνιση μετρήσεων με τη μορφή ραβδογράμματος και ιστογράμματος	46
4.3. Η αβεβαιότητα στις μετρήσεις	49
4.4. Οριακή κατανομή	50
4.5. Κανονική κατανομή (κατανομή Gauss)	52
4.6. Ασκήσεις	57
 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 – Κριτήρια απόρριψης απόμακρων τιμών	
5.1. Γενικά περί κριτηρίων απόρριψης “ύποπτων” πειραματικών δεδομένων	59
5.2. Κριτήριο Chauvenet	60
5.3. Κριτήριο Peirce	62
5.4. Ασκήσεις	63
 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 –Διάδοση αβεβαιοτήτων	
6.1. Η αβεβαιότητα στις απλές και σύνθετες μετρήσεις	65
6.2. Απλοί κανόνες υπολογισμού αβεβαιότητας σύνθετων μετρήσεων	66
6.2.1. Η αβεβαιότητα σε αθροίσματα και διαφορές φυσικών μεγεθών	66
6.2.1.1. Υπολογισμός αβεβαιότητας αθροίσματος και διαφοράς	66
6.2.1.2. Παράδειγμα υπολογισμού αβεβαιότητας	67
6.2.2. Η αβεβαιότητα σε γινόμενα και πηλίκα φυσικών μεγεθών	68
6.2.2.1. Υπολογισμός αβεβαιότητας του γινομένου δύο φυσικών μεγεθών	68
6.2.2.2. Υπολογισμός αβεβαιότητας του πηλίκου δύο φυσικών μεγεθών	69
6.2.2.3. Γενίκευση και ειδικές περιπτώσεις	70
6.2.2.4. Παραδείγματα υπολογισμού αβεβαιότητας	71
6.2.3. Υπολογισμός αβεβαιοτήτων ανεξάρτητων μεγεθών	73
6.3. Αβεβαιότητα φυσικών μεγεθών μίας μεταβλητής	75
6.3.1. Υπολογισμός αβεβαιότητας	75
6.3.2. Παραδείγματα	76
6.4. Γενικευμένος νόμος διάδοσης αβεβαιότητας	77
6.4.1. Γενίκευση	77
6.4.2. Παραδείγματα	78
6.5. Ασκήσεις	79
 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 – Μέτρηση θεμελιωδών φυσικών μεγεθών	
7.1. Μέτρηση μήκους με όργανα ακριβείας	81
7.1.1. Διαστημόμετρο	81
7.1.2. Μικρόμετρο	83
7.2. Μέτρηση μάζας	83
7.3. Μέτρηση χρόνου	85
7.4. Υπολογισμός πυκνότητας μεταλλικών σωμάτων	85
7.4.1. Σκοπός του πειράματος	85
7.4.2. Πειραματικό μέρος	86
7.4.2.1. Χρησιμοποιούμενα όργανα	86
7.4.2.2. Μετρήσεις	86
7.5. Μέτρηση θερμοκρασίας – Δυναμική απόκριση θερμομέτρου	89
7.5.1. Ορισμός θερμοκρασίας και θερμοκρασιακές κλίμακες	89
7.5.2. Μέτρηση θερμοκρασίας	90
7.5.3. Δυναμική απόκριση θερμομέτρων	91

7.5.4. Σκοπός του πειράματος	92
7.5.5. Πειραματικό μέρος	93
7.5.5.1. Χρησιμοποιούμενα όργανα	93
7.5.5.2. Μετρήσεις	93
7.6. Ερωτήσεις – Ασκήσεις	95

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8 – Πειράματα Μηχανικής & Θερμότητας

8.1. Υπολογισμός της επιτάχυνσης της βαρύτητας με τη χρήση κεκλιμένης αεροτροχιάς – Θεώρημα έργου-ενέργειας	97
8.1.1. Σύντομη ανασκόπηση της θεωρίας	97
8.1.1.1. Επιταχυνόμενη κίνηση	97
8.1.1.2. Κίνηση σε κεκλιμένο επίπεδο	98
8.1.1.3. Σταθερή τροχαλία	99
8.1.1.4. Θεώρημα έργου-ενέργειας	100
8.1.2. Σκοπός του πειράματος	101
8.1.3. Πειραματικό μέρος	102
8.1.3.1. Χρησιμοποιούμενα όργανα	102
8.1.3.2. Μετρήσεις	102
8.1.4. Ερωτήσεις – Ασκήσεις	105
8.2. Υπολογισμός συντελεστών στατικής και κινητικής τριβής	106
8.2.1. Σύντομη ανασκόπηση της θεωρίας	106
8.2.1.1. Γενικά περί τριβών	106
8.2.1.2. Υπολογισμός συντελεστών στατικής και κινητικής τριβής	106
8.2.1.3. Υπολογισμός συντελεστή στατικής τριβής με τη χρήση κεκλιμένου επιπέδου ...	108
8.2.2. Σκοπός του πειράματος	109
8.2.3. Πειραματικό μέρος	109
8.2.3.1. Χρησιμοποιούμενα όργανα	109
8.2.3.2. Μετρήσεις	109
8.2.4. Ασκήσεις	111
8.3. Θερμική διαστολή σωμάτων	112
8.3.1. Σύντομη ανασκόπηση της θεωρίας	112
8.3.2. Σκοπός του πειράματος	113
8.3.3. Πειραματικό μέρος	113
8.3.3.1. Χρησιμοποιούμενα όργανα	113
8.3.3.2. Μετρήσεις	114
8.3.4. Ερωτήσεις – Ασκήσεις	116
8.4. Μηχανικές ιδιότητες υλικών – Υπολογισμός μέτρου ελαστικότητας Young	117
8.4.1. Σύντομη ανασκόπηση της θεωρίας	117
8.4.1.1. Μηχανικές Ιδιότητες των υλικών	117
8.4.1.2. Αισθητήρες μέτρησης μηχανικής τάσης	119
8.4.2. Σκοπός του πειράματος	122
8.4.3. Πειραματικό μέρος	122
8.4.3.1. Χρησιμοποιούμενα όργανα	122
8.4.3.2. Μετρήσεις	123
8.4.4. Ασκήσεις	125

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9 – Πειράματα ταλαντώσεων, κυματικής και οπτικής

9.1. Μελέτη απλής αρμονικής ταλάντωσης	129
9.1.1. Σύντομη ανασκόπηση της θεωρίας	129
9.1.2. Σκοπός του πειράματος	131
9.1.3. Πειραματικό μέρος	133
9.1.3.1. Χρησιμοποιούμενα όργανα	133
9.1.3.2. Μετρήσεις	133
9.1.4. Ερωτήσεις	136
9.2. Εφαρμογή της Αρμονικής Κίνησης στο Απλό Εκκρεμές	137

9.2.1. Σύντομη ανασκόπηση της θεωρίας	137
9.2.2. Σκοπός του πειράματος	138
9.2.3. Πειραματικό μέρος	139
9.2.3.1. Χρησιμοποιούμενα όργανα	139
9.2.3.2. Μετρήσεις	140
9.2.4. Ερωτήσεις – Ασκήσεις	141
9.3. Μελέτη ταλάντωσης με απόσβεση	142
9.3.1. Συνοπτική ανασκόπηση της θεωρίας	142
9.3.2. Σκοπός του πειράματος	143
9.3.3. Πειραματικό μέρος	144
9.3.3.1. Χρησιμοποιούμενα όργανα	144
9.3.3.2. Μετρήσεις	144
9.3.4. Ερωτήσεις – Ασκήσεις	146
9.4. Πειράματα με ηχητικά κύματα	147
9.4.1. Συνοπτική ανασκόπηση της θεωρίας	147
9.4.1.1. Γενικά περί κυμάτων	147
9.4.1.2. Ηχητικά κύματα	148
9.4.1.3. Συμβολή κυμάτων	150
9.4.1.4. Στάσιμα κύματα	151
9.4.1.5. Διακροτήματα	153
9.4.1.6. Συντονισμός	154
9.4.2. Σκοπός του πειράματος	154
9.4.3. Πειραματικό μέρος	156
9.4.3.1. Χρησιμοποιούμενα όργανα	156
9.4.3.2. Μετρήσεις	157
9.4.4. Ερωτήσεις – Ασκήσεις	160
9.5. Γεωμετρική οπτική – Λεπτοί φακοί	161
9.5.1. Σύντομη ανασκόπηση της θεωρίας	161
9.5.1.1. Γενικά περί οπτικής	161
9.5.1.2. Ανάκλαση και διάθλαση του φωτός	161
9.5.1.3. Λεπτοί Φακοί	162
9.5.1.4. Γεωμετρική κατασκευή ειδώλου αμφίκυρτου λεπτού φακού	163
9.5.1.5. Βασικές εξισώσεις λεπτών φακών	164
9.5.2. Σκοπός του πειράματος	165
9.5.3. Πειραματικό μέρος	167
9.5.3.1. Χρησιμοποιούμενα όργανα	167
9.5.3.2. Μετρήσεις	167
9.5.4. Ερωτήσεις-Ασκήσεις	170
9.6. Οπτικό φασματοσκόπιο	171
9.6.1. Συνοπτική ανασκόπηση της θεωρίας	171
9.6.1.1. Το ηλεκτρομαγνητικό φάσμα	171
9.6.1.2. Φάσματα εκπομπής και απορρόφησης	172
9.6.1.3. Οπτικό φασματοσκόπιο	173
9.6.1.4. Ανάλυση του φωτός από πρίσμα	174
9.6.1.5. Ανάλυση του φωτός από οπτικό φράγμα	174
9.6.2. Σκοπός του πειράματος	175
9.6.3. Πειραματικό μέρος	176
9.6.3.1. Χρησιμοποιούμενα όργανα	176
9.6.3.2. Μετρήσεις	176
9.6.4. Ερωτήσεις-Ασκήσεις	178
 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10 – Πειράματα σύγχρονης φυσικής	
10.1. Θερμική ακτινοβολία σωμάτων	179
10.1.1. Σύντομη ανασκόπηση της θεωρίας	179
10.1.2. Σκοπός του πειράματος	181

10.1.3. Πειραματικό μέρος	183
10.1.3.1. Χρησιμοποιούμενα όργανα	183
10.1.3.2. Μετρήσεις	183
10.1.4. Ασκήσεις	188
10.2. Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο	189
10.2.1. Σύντομη ανασκόπηση της θεωρίας	189
10.2.2. Σκοπός του πειράματος	191
10.2.3. Πειραματικό μέρος	191
10.2.3.1. Χρησιμοποιούμενα όργανα	191
10.2.3.2. Μετρήσεις	191
10.2.4. Ασκήσεις	193
10.3. Ραδιενέργεια	194
10.3.1. Σύντομη ανασκόπηση της θεωρίας	194
10.3.1.1. Δομή του πυρήνα – πυρηνική αποδιέγερση	194
10.3.1.2. Ρυθμοί διάσπασης	195
10.3.1.3. Μέτρηση Ραδιενέργειας – Μονάδες	197
10.3.1.4. Βιολογικές επιπτώσεις της ραδιενέργειας	197
10.3.1.5. Αλληλεπίδραση ακτινοβολίας α , β και γ με την ύλη	199
10.3.1.6. Ανίχνευση και μέτρηση της ραδιενέργειας	199
10.3.1.7. Στατιστικά φαινόμενα στη ραδιενέργεια	200
10.3.2. Σκοπός του πειράματος	201
10.3.3. Πειραματικό μέρος	202
10.3.3.1. Χρησιμοποιούμενα όργανα	202
10.3.3.2. Μετρήσεις	203
10.3.4. Ερωτήσεις – Ασκήσεις	208

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11 – Παραρτήματα

11.1. Χρήσιμο μαθηματικό τυπολόγιο	211
11.1.1. Γεωμετρικοί τύποι	211
11.1.2. Τριγωνομετρικές συναρτήσεις	211
11.1.3. Εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις	212
11.1.4. Χρήσιμοι κανόνες παραγώγισης	213
11.2. Θεμελιώδη φυσικά μεγέθη	214
11.3. Παράγωγα φυσικά μεγέθη	217
11.4. Εύρεση πιθανότητας κανονικής κατανομής	218
11.5. Πίνακας αθροιστικής κανονικής κατανομής $\Phi(z)$	219
11.6. Πίνακας κριτηρίου Peirce για μία μετρούμενη ποσότητα (τιμές του R)	220
11.7. Πίνακας θερμοκρασίας – αντίστασης για αισθητήρες Pt100	222
11.8. Οδηγίες συγγραφής εργαστηριακής αναφοράς	223

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ	225
------------------------	-----

Συνημμένο: [Πρότυπη εργαστηριακή αναφορά](#)

Όργανα μέτρησης διαστάσεων-μάζας. Υπολογισμός πυκνότητας μεταλλικών σωμάτων

Πίνακας συντομεύσεων-ακρωνύμια

SI	Διεθνές Σύστημα Μονάδων (Système International d'Unités)
NIST	National Institute of Standards and Technology, Εθνικό Ινστιτούτο Προτύπων και Τεχνολογίας
BIPM	Bureau International des Poids et Mesures, Διεθνές Γραφείο Μέτρων και Σταθμών
CGPM	Conférence Générale des Poids et Mesures, Γενική Συνδιάσκεψη για τα μέτρα και τα σταθμά
VIM	International Vocabulary of Metrology, Διεθνές λεξικό μετρολογίας
Btu	British thermal unit, Βρετανική μονάδα θερμότητας
ASTM	American Society for Testing and Materials, Αμερικανική Εταιρεία Δοκιμών και Υλικών
ISO	International Standardization Organization, Διεθνής Οργανισμός Τυποποίησης
VLF	Very Low Frequency, πολύ χαμηλή συχνότητα
MF	Medium Frequency, μεσαία συχνότητα
VHF	Very High Frequency, πολύ υψηλή συχνότητα
UHF	Ultra High Frequency, κατ' εξοχήν υψηλή συχνότητα
SHF	Super High Frequency, υπερυψηλή συχνότητα
EHF	Extra High Frequency, εξαιρετικά υψηλή συχνότητα

Πρόλογος

“Fast is fine, but accuracy is everything”

Wyatt Earp

Ο βραβευμένος με Nobel Φυσικής (1998) Robert B. Laughlin αναφέρει: «...Γνωρίζουμε ότι τέλειες μετρήσεις δεν υπάρχουν, και έτσι θέλουμε να ξέρουμε πόσο αληθής είναι μια δεδομένη μέτρηση. Πρόκειται για μια συνετή πρακτική, διότι μας κρατά όλους τίμιους και αποτρέπει τον εκφυλισμό των ερευνητικών αναφορών σε τερατολογίες...».

Η μέτρηση, μια έννοια σε διαρκή εξέλιξη, γεννήθηκε αλλά και καθόρισε την εξελικτική μετάβαση του ανθρώπινου πολιτισμού από τις πρωταρχικές αυτάρκειες και αυτόνομες κοινότητες, στις σύγχρονες, τεχνολογικά εξελιγμένες και εμπορευματοποιημένες κοινωνίες. Περαιτέρω, η μέτρηση οριοθετεί την επιστημονική γνώση και συνιστά θεμελιώδες συστατικό της έρευνας του κόσμου των μεγεθών και των φαινομένων.

Στην εποχή μας, η μέτρηση απαιτεί διεπιστημονική προσέγγιση, συνδέει με άρρηκτο τρόπο επιστήμη και τεχνολογία και χαρακτηρίζεται από όρους ποιότητας: τυποποίηση, προτυποποίηση, διακρίβωση, πιστοποίηση, αξιοπιστία.

Στο πλαίσιο αυτό, το ανά χείρας πόνημα, συνιστά μια συγκροτημένη και συνάμα περιεκτική εισαγωγή στη μέτρηση του φυσικού κόσμου που είναι το κορυφαίο εργαλείο της επιβεβαίωσης της ανθρώπινης σκέψης και το μοναδικό μέσο ποσοτικής αντίληψης του σύμπαντος, από τον μικρόκοσμο μέχρι τον μακρόκοσμο: «Να απαριθμείται αυτό που είναι απαριθμήσιμο, να μετράται αυτό που είναι μετρήσιμο και να γίνεται μετρήσιμο αυτό που δεν είναι μετρήσιμο» (Γαλιλαίος, 1610).

Με δομημένο τρόπο οδηγεί από τις βασικές μετρολογικές έννοιες, όπως, φυσικό μέγεθος, μονάδα μέτρησης, αβεβαιότητα μέτρησης, στις προδιαγραφές της τεχνολογίας των οργάνων μέτρησης και στην επεξεργασία των πειραματικών δεδομένων, με έμφαση στη στατιστική ανάλυση των μετρήσεων.

Ο συγγραφέας, πειραματικός φυσικός με εδραιωμένη και πολυετή εκπαιδευτική εμπειρία στην ανώτατη εκπαίδευση, υπηρετεί με συνέπεια τον τίτλο του έργου του παραθέτοντας διεξοδικά μια συλλογή πλήρων εργαστηριακών ασκήσεων που εκτείνονται σε ευρύ φάσμα της κλασικής και σύγχρονης φυσικής. Ο στόχος είναι πρόδηλος και επιτυγχάνεται με επιστημονική ακρίβεια: ο αναγνώστης καθοδηγείται με επιλεγμένα και προοδευτικά βήματα στο επιχειρείν του επιστημονικού πειράματος.

Εκκινεί από τη διατύπωση της φυσικής υπόθεσης – θεωρίας, που με το μέτρο της ανθρώπινης λογικής αναζητά να αποκρυπτογραφήσει τη φυσική νομοτέλεια (“Nature’s laws are the invisible government of the earth”, Alfred A. Montapert), σχεδιάζει το πείραμα, παραθέτει τα αρθρωτά στάδια υλοποίησης και υποβάλει τους πειραματικούς υπολογισμούς που θα αναδείξουν την πληροφορία των αποτελεσμάτων των επιστημονικών μετρήσεων. Οι ερωτήσεις επιδιώκουν με διερευνητική μάθηση στην αυτογνωσία και στην αντίληψη της έννοιας και του σκοπού της φυσικής μέτρησης: «Ο φυσικός νόμος δεν μπορεί γενικά να εξαχθεί μόνο από θεωρητική σκέψη, αλλά πρέπει να ανακαλυφθεί πειραματικά, διότι ο έλεγχος των φυσικών φαινομένων επιτυγχάνεται μόνο όταν η φύση το επιτρέπει δια της αρχής της οργάνωσης» (Robert B. Laughlin, 2005).

«Φύσις κρύπτεσθαι φιλεῖ.» - Ηράκλειτος

Ιωάννης Π. Μακρής
Αναπληρωτής Καθηγητής
Τμήμα Ηλεκτρονικών Μηχανικών ΤΕΙ Κρήτης

Εισαγωγή

Ο παρών Εργαστηριακός Οδηγός Φυσικής αποτελεί έναν ολοκληρωμένο εισαγωγικό οδηγό που περιλαμβάνει επιλεγμένα πειράματα γενικής και σύγχρονης φυσικής, βάσει της έκτασης των γνώσεων που θα πρέπει να αποκτήσουν οι φοιτητές ΑΕΙ του τεχνολογικού τομέα στο εισαγωγικό έτος, προκειμένου να συνεχίσουν τις σπουδές τους σε αντικείμενα τεχνολογικών εφαρμογών. Ο Εργαστηριακός Οδηγός είναι προσαρμοσμένος για να καλύψει τις διδακτικές ανάγκες του εργαστηριακού μαθήματος Φυσικής των Τμημάτων Μηχανικών Φυσικών Πόρων & Περιβάλλοντος και Ηλεκτρονικών Μηχανικών της Σχολής Εφαρμοσμένων Επιστημών του ΤΕΙ Κρήτης.

Οι ιδιαιτερότητες που παρουσιάζει ένας εργαστηριακός οδηγός που σε μεγάλο βαθμό βασίζεται στο συγκεκριμένο εξοπλισμό που διαθέτει το κάθε εργαστήριο, έχει ως αποτέλεσμα να περιορίζει το αναγνωστικό κοινό στο οποίο απευθύνεται. Ωστόσο, ένα μεγάλο μέρος του παρόντος συγγράμματος περιλαμβάνει όλες εκείνες τις εισαγωγικές έννοιες που χρειάζεται ένας πρωτοετής φοιτητής για να κατανοήσει την αναγκαιότητα των μετρήσεων και τα “εργαλεία” που χρησιμοποιούμε για την πραγματοποίησή τους, καθώς και τις διαδικασίες που εφαρμόζουμε προκειμένου να εξάγουμε ασφαλή και ορθά συμπεράσματα. Υπό αυτήν την έννοια επομένως, και επιπλέον, λόγω των πειραματικών δεδομένων που διατίθενται για κάποια από τα πειράματα που περιγράφονται στον Οδηγό, θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ως πρόσθετο διδακτικό υλικό ή βοήθημα και σε οποιοδήποτε άλλο Εκπαιδευτικό Ίδρυμα για ένα αντίστοιχο εργαστηριακό μάθημα.

Ο παρών Εργαστηριακός Οδηγός Φυσικής συσσωρεύει την εμπειρία των 10 και πλέον ετών της διδασκαλίας του συγγραφέα, των εισαγωγικών εργαστηρίων Φυσικής και των εργαστηρίων Μετρολογίας στα προαναφερθέντα Τμήματα του ΤΕΙ Κρήτης. Η βασική διαπίστωση από την πολύχρονη αυτή διδασκαλία είναι ότι ο φοιτητής θα πρέπει να εισαχθεί με ομαλό τρόπο σε βασικές έννοιες οι οποίες ωστόσο είναι νέες γι αυτόν και αφορούν τις μετρήσεις φυσικών μεγεθών γενικότερα, τη χρησιμοποιούμενη οργάνολογία και τη μεθοδολογία που χρειάζεται για τη σωστή παρουσίαση και ανάλυση των μετρήσεων καθώς και την εξαγωγή των συμπερασμάτων. Ο σκοπός αυτός απέχει πολύ από την οποιαδήποτε επαφή μπορεί να είχε ο σημερινός φοιτητής στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση με τα εργαστήρια των φυσικών επιστημών όπου ο εκπαιδευτικός στόχος επιτυγχανόταν περισσότερο με πειράματα επίδειξης παρά με την ίδια συμμετοχή των μαθητών στα πειράματα. Θεωρώ επομένως ότι αξίζει τον κόπο να αφιερωθούν στην αρχή ενός βασικού εργαστηριακού μαθήματος, όπως αυτό της Φυσικής, αρκετές ώρες διδασκαλίας που θα αποσαφηνίσουν τα προαναφερόμενα, ίσως καμία φορά και σε βάρος του αριθμού των εργαστηριακών πειραμάτων που θα πρέπει να ολοκληρωθούν στη διάρκεια ενός διδακτικού εξαμήνου. Το τελευταίο πιστεύω ότι αντισταθμίζεται από τις γερές βάσεις που θα μπορούσαν να τεθούν με τη διδασκαλία, ώστε ο φοιτητής να μπορεί πλέον να αντεπεξέλθει επαρκώς σε πιο προχωρημένα εργαστήρια μεγαλύτερων εξαμήνων. Το ζητούμενο επομένως δεν είναι μόνο να αποκτήσει ο φοιτητής εργαστηριακή εμπειρία και δεξιότητες στην εκτέλεση πειραμάτων αλλά επιπλέον να κατανοεί κάθε φορά το στόχο τους και τη μεθοδολογία που θα χρησιμοποιήσει, καθώς και να μπορεί να αξιολογήσει την ακρίβεια και την ορθότητα των αποτελεσμάτων του.

Στο 1ο μέρος του Εργαστηριακού Οδηγού (Κεφάλαια 1 έως 6), γίνεται εκτενής αναφορά σε εισαγωγικές έννοιες που αφορούν τα φυσικά μεγέθη και τις μετρήσεις τους, τις αντίστοιχες αβεβαιότητές τους (κατηγορίες σφαλμάτων), τη δομή και τα χαρακτηριστικά των μετρητικών διατάξεων καθώς και τις βασικές έννοιες της στατιστικής τους ανάλυσης. Ιδιαίτερη έμφαση (και ανάλογη έκταση) δίνεται στην παρουσίαση των πειραματικών αποτελεσμάτων με τη χρήση κατάλληλων γραφημάτων σε χαρτί (χιλιοστομετρικό, λογαριθμικό, ημιλογαριθμικό) καθώς και βοηθητικών πινάκων. Ίσως, στην εποχή της τεχνολογίας και της ευρύτατης χρήσης των Η/Υ, να φαντάζει βαρετό και αποθαρρυντικό η χάραξη γραφικών παραστάσεων με το χέρι και τη χρήση χαρτιού, αλλά αποτελεί αναπόφευκτα το απαραίτητο αρχικό στάδιο για τη μετάβαση στην εκμάθηση λογισμικών πακέτων που απλοποιούν πολύ τις παραπάνω διαδικασίες. Για το λόγο αυτό, σε επιλεγμένα πειράματα υπάρχουν διαθέσιμα αρχεία μετρήσεων όπου λόγω του όγκου των δεδομένων, η χρήση λογιστικών φύλλων ή λογισμικών επεξεργασίας δεδομένων είναι μονόδρομος. Ο φοιτητής ενθαρρύνεται λοιπόν να δοκιμάσει τις ικανότητες του και σε αυτόν τον τρόπο ανάλυσης χωρίς ωστόσο αυτό να αποτελεί τον πρωταρχικό εκπαιδευτικό στόχο του εργαστηρίου.

Στο 2ο μέρος του Οδηγού (Κεφάλαια 7 έως 10) περιλαμβάνεται ικανοποιητικός αριθμός πειραμάτων που καλύπτουν ένα ευρύ φάσμα γενικής και σύγχρονης φυσικής (κινηματική, δυναμική, ταλαντώσεις, κύματα, οπτική, ραδιενέργεια, κ.ά.) ώστε να μπορεί να γίνει η κατάλληλη επιλογή από το διδάσκοντα, στα πλαίσια της διδακτέας ύλης του μαθήματος αλλά και του διαθέσιμου χρόνου. Αρκετά από αυτά τα πειράματα

θα μπορούσαν να παρουσιαστούν από το διδάσκοντα με τη μορφή πειραμάτων επίδειξης την ώρα του εργαστηριακού μαθήματος ή ακόμα κατά τη διάρκεια των θεωρητικών διαλέξεων.

Στην αρχή κάθε αυτοτελούς ενότητας, γίνεται σύντομη ανασκόπηση της απαραίτητης θεωρίας για την κατανόηση και την εκτέλεση των πειραμάτων. Για την περαιτέρω κατανόηση και εμβάθυνση των φυσικών εννοιών, ο φοιτητής ενθαρρύνεται να ανατρέξει στην ομολογουμένως πλούσια βιβλιογραφία. Ακολουθεί το πειραματικό μέρος με το σκοπό του κάθε πειράματος, τη χρησιμοποιούμενη οργανολογία και αναλυτικές οδηγίες για την εκτέλεσή τους. Ερωτήσεις ή/και ασκήσεις στο τέλος κάθε εργαστηριακής άσκησης συμβάλουν στην περαιτέρω κατανόηση των φαινομένων που μελετήθηκαν.

Στο τελευταίο κεφάλαιο (Παραρτήματα) ο φοιτητής μπορεί να βρει χρήσιμες σχέσεις από τα μαθηματικά και πίνακες που του είναι απαραίτητα, πληροφορίες για το Διεθνές Σύστημα μονάδων μέτρησης, πίνακες μετατροπών μονάδων καθώς και οδηγίες συγγραφής μιας εργαστηριακής αναφοράς. Μία πρότυπη εργαστηριακή αναφορά του πρώτου εργαστηρίου με αρχεία μετρήσεων είναι διαθέσιμη, ώστε ο φοιτητής να δώσει αρχικά βάρος στους απαραίτητους υπολογισμούς αλλά να μπορεί επίσης να έχει έναν οδηγό σύνταξης στον οποίο θα βασιστεί για να φτιάξει τις επόμενες εργαστηριακές του αναφορές.

Η ιδιαιτερότητα του συγγράμματος, έγκειται στο γεγονός ότι υπάρχουν δύο διαθέσιμες εκδόσεις. Η μία έκδοση παρέχεται σε μορφότυπο pdf που μπορεί να εκτυπωθεί ή να αναγνωστεί από ηλεκτρονικό υπολογιστή. Εναλλακτικά, το σύγγραμμα είναι διαθέσιμο σε ηλεκτρονική έκδοση μορφότυπου erub (electronic publication) που παρέχει τη δυνατότητα ανάγνωσης από οποιαδήποτε συσκευή (επιτραπέζιο ή φορητό Η/Υ, ταμπλέτα, κ.ά.) αξιοποιώντας επιπλέον τις δυνατότητες που έχουν ενσωματωθεί σε αυτό. Η ενσωμάτωση πολυμεσικών στοιχείων που έχει γίνει, κάνει ίσως το τελικό αποτέλεσμα περισσότερο ελκυστικό. Η πειραματική διαδικασία και η εκτέλεση πειραμάτων, όπου αυτό κρίθηκε απαραίτητο, περιλαμβάνεται σε ολιγόλεπτα αρχεία video, προκειμένου ο φοιτητής να εξοικειωθεί με την οργανολογία και να κατανοήσει καλύτερα τα πειράματα που θα κληθεί στη συνέχεια να πραγματοποιήσει. Περιλαμβάνονται επίσης αρχεία πειραματικών δεδομένων από επιλεγμένες εργαστηριακές ασκήσεις, προκειμένου ο φοιτητής (ή οποιοσδήποτε ενδιαφερόμενος) να μπορεί να ολοκληρώσει την άσκηση παρακάμπτοντας το πειραματικό μέρος της. Τέλος, έχουν δημιουργηθεί σύνδεσμοι που παραπέμπουν σε διάφορες τοποθεσίες στις οποίες παρέχονται επιπλέον πληροφορίες που δε θα μπορούσαν να ενσωματωθούν στο υπάρχον σύγγραμμα, όπως υπερσύνδεσμοι (hyperlinks) που παραπέμπουν σε ιστοσελίδες γενικού ενδιαφέροντος (π.χ. NIST, BIMP, κλπ) αναφορικά με τα φυσικά μεγέθη και τις μετρήσεις τους.

Για την ανάγνωση της ηλεκτρονικής έκδοσης (erub) του συγγράμματος θα πρέπει να εγκατασταθεί ένα πρόγραμμα ανάγνωσης (erub reader) που θα επιτρέπει και την ενεργοποίηση των επιπλέον πολυμεσικών στοιχείων (video, hyperlinks). Για το σκοπό αυτό συστήνεται η χρήση του EPUBReader (πρόσθετο του Firefox), του Readium για τον φυλλομετρητή Chrome, ή του ενσωματωμένου αναγνώστη για το λειτουργικό Edubuntu. Σε κάθε περίπτωση, θα πρέπει να επιλεγεί η προβολή συνεχούς ροής κειμένου ώστε να απεικονίζονται με το σωστό τρόπο τα σχήματα και οι εξισώσεις.

Η συγγραφή του παρόντος Οδηγού υλοποιήθηκε στα πλαίσια της Δράσης "Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και Βοηθήματα" (www.kallipos.gr) του ΣΕΑΒ (Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών) που αποτελεί την πρώτη ολοκληρωμένη προσπάθεια για την εισαγωγή του ηλεκτρονικού, διαδραστικού, πολυμεσικού βιβλίου στην Ανώτατη Εκπαίδευση, προσφέροντας μία μοναδική ευκαιρία στους διδάσκοντες των ελληνικών ΑΕΙ να δημιουργήσουν ποιοτικό επιστημονικό υλικό, προσβάσιμο από παντού. Ο χρόνος θα δείξει αν το εγχείρημα αυτό του ΣΕΑΒ βρει την ανάλογη ανταπόκριση από την ακαδημαϊκή κοινότητα αλλά κατά τη γνώμη μου αποτελεί μία πρώτη αξιόλογη προσπάθεια εφαρμογής καλών διεθνών πρακτικών που προσφέρει επιπλέον τη δυνατότητα της πολλαπλής βιβλιογραφίας σε αντίθεση με το ένα σύγγραμμα επιλογής που ισχύει τώρα.

Με την ολοκλήρωση της συγγραφής, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κριτικό αναγνώστη Δρ Δημήτριο Βλάχο, Επίκουρο Καθηγητή του Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων για τις εύστοχες υποδείξεις και τις διορθώσεις του στο αρχικό κείμενο που συντέλεσαν στην ουσιαστική βελτίωση του παρόντος συγγράμματος. Η συνεργασία μας καθ' όλη τη διάρκεια της συγγραφής του βιβλίου νομίζω ότι ήταν άψογη. Η άρτια μετατροπή του συγγράμματος σε ηλεκτρονική μορφή erub πραγματοποιήθηκε από τον Κυριάκο Παπαδόπουλο τον οποίο και ευχαριστώ θερμά. Οι τελικοί κριτές της συγγραφικής αυτής προσπάθειας θα είναι οι τελικοί αποδέκτες του, δηλαδή οι φοιτητές στους οποίους απευθύνεται. Κάθε παρατήρηση και υπόδειξη λαθών για μία βελτιωμένη επόμενη έκδοση είναι ευπρόσδεκτη.

Βασίλης Σάλτας
Χανιά, Οκτώβριος 2015

Κεφάλαιο 1 – Εισαγωγή στις μετρήσεις

Σύνοψη

Στο εισαγωγικό αυτό κεφάλαιο παρουσιάζονται οι έννοιες των φυσικών μεγεθών και των μετρήσεών τους, τα συστήματα μονάδων μέτρησης που χρησιμοποιούνται καθώς και η σημασία της διαστατικής ανάλυσης. Γίνεται κατηγοριοποίηση των μετρήσεων σε απλές και σύνθετες, παρουσιάζονται οι διάφορες κατηγορίες σφαλμάτων που συναντάμε στη μέτρηση διαφόρων φυσικών μεγεθών και εισάγεται η έννοια της αβεβαιότητας.

Προαπαιτούμενη γνώση

Δεν απαιτείται γνώση από άλλα κεφάλαια ή θεματικές περιοχές.

1.1. Φυσικά μεγέθη

1.1.1. Γενικά

Η επιστημονική μεθοδολογία βασίζεται στη δυνατότητα διαχωρισμού των διάφορων μετρούμενων ιδιοτήτων, των αποκαλούμενων φυσικών ποσοτήτων (ή μεγεθών) και στην εύρεση συσχετισμών μεταξύ των μετρούμενων τιμών διαφορετικών φυσικών μεγεθών, ώστε να εξαχθούν νόμοι και θεωρίες γενικότερης ισχύος. Ο ορισμός των φυσικών μεγεθών και η πρακτική τους αξία έγκειται στο γεγονός ότι αυτά είναι συνδεδεμένα με τη διαδικασία της μέτρησης που μας επιτρέπει να αντιστοιχίσουμε τα φυσικά μεγέθη με αριθμούς. Γι αυτόν το λόγο για παράδειγμα, το μήκος και η μάζα αποτελούν φυσικά μεγέθη ενώ η γεύση και η όσφρηση όχι. Σε αυτή τη βάση, οι διαφορετικές μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για να περιγράψουμε τα διάφορα φυσικά φαινόμενα και να τα ταξινομήσουμε ανάλογα με την πολυπλοκότητα τους είναι χρήσιμες για να αποσαφηνίσουμε την έννοια των φυσικών μεγεθών.

Ο διαχωρισμός των ιδιοτήτων διαφόρων αντικειμένων ή φαινομένων με βάση τη μορφολογική μέθοδο αποτελεί τον απλούστερο τρόπο περιγραφής τους (Formasini, 2008). Στην περίπτωση της μορφολογικής μεθόδου, η ταξινόμηση γίνεται με τη χρήση εικόνων και σχεδίων όπως π.χ. στην ανατομία, ή άλλων ιδιοτήτων όπως το χρώμα, η λαμπρότητα, η οσμή, η γεύση, με τις οποίες μπορούμε για παράδειγμα να διαχωρίσουμε διάφορες χημικές ουσίες. Στην ταξινομική μέθοδο διαχωρίζουμε ένα σύνολο αντικειμένων ή φαινομένων σε κατηγορίες ανάλογα με το αν πληρούνται οι κατάλληλες προϋποθέσεις και συνθήκες. Η μέθοδος αυτή βρίσκει εφαρμογή στην ταξινόμηση των ειδών στη ζωολογία, τη φυτολογία και άλλους κλάδους επιστημών. Σε καμία από τις παραπάνω περιπτώσεις ωστόσο, οι ιδιότητες που καθορίζονται με τους τρόπους αυτούς δεν μπορούν να αποτελέσουν φυσικά μεγέθη.

Μία ιδιότητα δύο ομοειδών αντικειμένων ή φαινομένων στην οποία μπορεί να εφαρμοστεί η συγκριτική μέθοδος ώστε να μπορούμε να αποφανθούμε σε ποιο βαθμό (μικρότερο, ίσο ή μεγαλύτερο) υφίσταται η ιδιότητα σε καθένα από αυτά, μπορεί να οριστεί ως φυσικό μέγεθος. Για παράδειγμα, η κλίμακα σκληρότητας Mohs που χρησιμοποιείται στην ορυκτολογία, βασίζεται στο εξής κριτήριο: το ορυκτό Α είναι σκληρότερο από το ορυκτό Β, αν το Α μπορεί να χαράξει το Β. Με τον τρόπο αυτό, η κλίμακα Mohs κατατάσσει 10 ορυκτά κατά σειρά αυξανόμενης σκληρότητας, αντιστοιχίζοντας τα σε μία αυθαίρετη κλίμακα δέκα αριθμών (1-10). Η σκληρότητα επομένως αποτελεί ένα φυσικό μέγεθος. Με την ίδια συγκριτική μεθοδολογία μπορεί να αποδειχθεί ότι η θερμοκρασία είναι ένα φυσικό μέγεθος. Πράγματι, οι θερμοκρασίες δύο διαφορετικών αντικειμένων μπορούν να συγκριθούν μεταξύ τους μέσω της διαφορετικής θερμικής διαστολής που υφίσταται ο υδράργυρος στο εσωτερικό ενός γυάλινου σωλήνα (υδραργυρικό θερμόμετρο) όταν αυτός έρθει σε επαφή με τα δύο αντικείμενα.

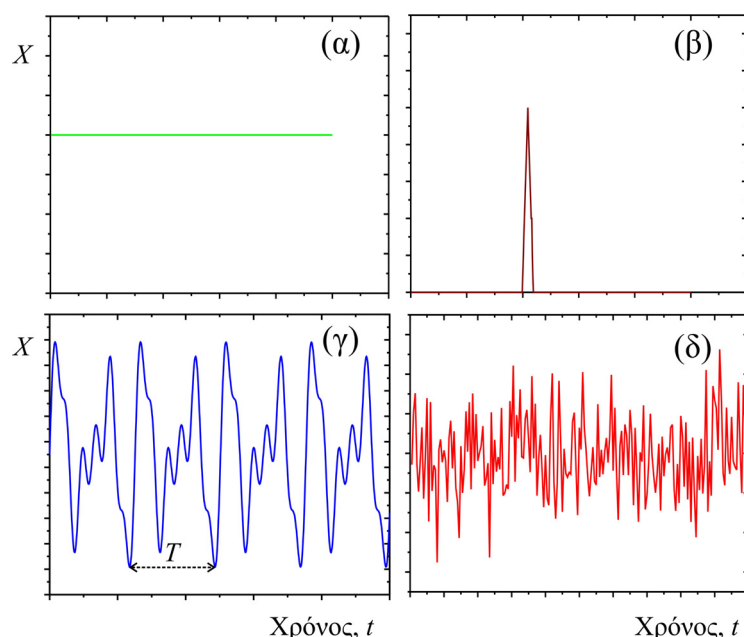
Στα περισσότερα φυσικά μεγέθη, επιπλέον της συγκριτικής μεθόδου, μπορεί να οριστεί και μία ποσοτική μέθοδος διαχωρισμού, με την οποία μπορούμε να προσδώσουμε στις φυσικές ιδιότητες μία αντιστοίχιση με τους πραγματικούς αριθμούς αλλά και προσθετικές ιδιότητες. Για παράδειγμα, η μάζα, ο χρόνος και η δύναμη είναι προσθετικά μεγέθη. Δύο σώματα με μάζες m_a και m_b που ενώνονται, συμπεριφέρονται σαν ένα σώμα μάζας m_a+m_b . Αντίθετα, η θερμοκρασία και η σκληρότητα αναφέρονται ως μη-προσθετικά μεγέθη, αφού, οι θερμοκρασίες ή η σκληρότητα δύο σωμάτων που ενώνονται σε καμία

περίπτωση δεν αθροίζονται. Η ποσοτική μέθοδος αποτελεί τη βάση των επιστημονικών μετρήσεων γιατί επιτρέπει τη μαθηματική περιγραφή των διαφόρων φυσικών φαινομένων.

1.1.2. Χρονική εξάρτηση φυσικών μεγεθών

Ένα από τα σημαντικότερα φυσικά μεγέθη στη Φυσική είναι ο χρόνος, διότι πολύ συχνά η τιμή ενός φυσικού μεγέθους εξαρτάται από αυτόν. Οι συνηθέστεροι τρόποι με τους οποίους ένα φυσικό μέγεθος μεταβάλλεται ως προς το χρόνο, απεικονίζονται στο Σχήμα 1.1. Σε πολλές όμως περιπτώσεις, ένα φυσικό μέγεθος δεν παρουσιάζει μεταβολή ως προς το χρόνο (Σχήμα 1α). Για παράδειγμα, η ελκτική δύναμη μεταξύ δύο σωμάτων με μάζες m και M που απέχουν σταθερή απόσταση r , εκφράζεται από το νόμο της παγκόσμιας έλξης, $F = GmM/r^2$ και είναι ανεξάρτητη από το χρόνο. Άλλες φορές ένα μέγεθος μπορεί να έχει μη μηδενική τιμή για ένα μικρό χρονικό διάστημα (Σχήμα 1β). Η δύναμη που αναπτύσσεται μεταξύ δύο σωμάτων που συγκρούονται παρουσιάζει τέτοιου είδους στιγμιαία μεταβολή, δηλαδή είναι μη μηδενική για το μικρό χρονικό διάστημα που διαρκεί η κρούση. Σε κάποιες περιπτώσεις, ο περιοδικός χαρακτήρας φυσικών φαινομένων ή κινήσεων περιγράφεται από μία περιοδική συνάρτηση που χαρακτηρίζεται από την περίοδο T , το χρόνο δηλαδή που διαρκεί μία πλήρης επανάληψη του φαινομένου (Σχήμα 1γ). Χαρακτηριστικά παραδείγματα αποτελούν η ταλάντωση του εκκρεμούς, η κίνηση των πλανητών και η ταλάντωση κρυστάλλου χαλαζία (quartz). Οι περιοδικές κινήσεις μας επιτρέπουν επιπλέον να καθορίσουμε τις διαδικασίες για τη μέτρηση χρονικών διαστημάτων και τον ορισμό του χρόνου ως φυσικό μέγεθος. Στην περίπτωση που η μεταβολή ενός φυσικού μεγέθους δεν παρουσιάζει κάποια περιοδικότητα, λέμε ότι το μέγεθος μεταβάλλεται με τυχαίο τρόπο (Σχήμα 1δ). Ένα παράδειγμα τυχαίου χρονικά μεταβαλλόμενου μεγέθους είναι η ταχύτητα των μορίων ενός αερίου που κινούνται συνεχώς στο εσωτερικό ενός δοχείου και τα οποία συγκρούονται μεταξύ τους ή με τα τοιχώματα του δοχείου, αλλάζοντας με απρόβλεπτο τρόπο το μέτρο και τη διεύθυνση της ταχύτητάς τους.

Η μεθοδολογία της μέτρησης ενός φυσικού μεγέθους καθώς και η επιλογή της πιο κατάλληλης οργανολογίας, εξαρτάται από το αν το μετρούμενο μέγεθος μεταβάλλεται χρονικά ή όχι. Για τη μέτρηση ενός χρονικά σταθερού φυσικού μεγέθους, ο διαθέσιμος χρόνος είναι θεωρητικά απεριόριστος και μπορούν να ληφθούν αξιόπιστες μετρήσεις με σχετικά απλά όργανα, ενώ υπάρχει η δυνατότητα οι μετρήσεις να επαναληφθούν πολλές φορές και με διαφορετικές διαδικασίες. Αντίθετα, η μέτρηση χρονικά μεταβαλλόμενων μεγεθών, απαιτεί τη χρήση πιο περίπλοκων διαδικασιών και συστημάτων μέτρησης, εξωθώντας πολλές φορές την τεχνολογία στα όρια των δυνατοτήτων της.



Σχήμα 1.1 Χρονική εξάρτηση φυσικών μεγεθών: (α) μέγεθος σταθερό ως προς το χρόνο, (β) στιγμιαία (μεταβατική) μεταβολή, (γ) περιοδική μεταβολή και (δ) τυχαία μεταβολή.

1.2. Συστήματα μονάδων μέτρησης

Σύμφωνα με το Διεθνές Λεξικό Ορολογίας στη Μετρολογία (ISO VIM, 2004), το μέγεθος ορίζεται ως η ιδιότητα ενός φαινομένου, σώματος ή ουσίας στο οποίο μπορούμε να προσδώσουμε μία αριθμητική τιμή. Τα μεγέθη στη Φυσική χωρίζονται σε θεμελιώδη και σε παράγωγα φυσικά μεγέθη. Τα θεμελιώδη φυσικά μεγέθη είναι μόλις επτά στον αριθμό και είναι διαστατικά ανεξάρτητα μεταξύ τους, δηλαδή δεν μπορεί να προκύψει το ένα από το άλλο. Είναι το μήκος, η μάζα, ο χρόνος, η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος, η θερμοδυναμική θερμοκρασία, η ποσότητα της ύλης και η φωτεινή ένταση. Από τα θεμελιώδη μεγέθη μπορούν να προκύψουν όλα τα υπόλοιπα φυσικά μεγέθη τα οποία ονομάζονται παράγωγα. Η ταχύτητα για παράδειγμα, προκύπτει από το μήκος και το χρόνο, η επιτάχυνση από την ταχύτητα και το χρόνο, η δύναμη από την επιτάχυνση και τη μάζα, κ.ο.κ.

Η ποσοτική τιμή για κάθε ένα από αυτά τα μεγέθη προκύπτει από τη μέτρησή τους, δηλαδή τη διαδικασία της σύγκρισης με ένα πρότυπο μοναδιαίο μέγεθος που έχουμε επιλέξει με αυθαίρετο τρόπο. Η εξάπλωση των μετρήσεων σε ένα ευρύ φάσμα των ανθρώπινων δραστηριοτήτων με επακόλουθη την ανάγκη ενοποίησης των μετρητικών πρακτικών, οδήγησε στην προσπάθεια υιοθέτησης ενός κοινού συστήματος μονάδων μέτρησης. Το σύστημα αυτό θα πρέπει να είναι ολοκληρωμένο, δηλαδή όλα τα φυσικά μεγέθη να μπορούν να εξαχθούν από τα θεμελιώδη μεγέθη μέσω αναλυτικών σχέσεων. Επίσης, θα πρέπει να είναι σύμφωνο, δηλαδή οι αναλυτικές αυτές σχέσεις να μην περιέχουν συντελεστές αναλογίας διαφορετικούς της μονάδας, όπως επίσης και δεκαδικό, δηλαδή, τα πολλαπλάσια και τα υποπολλαπλάσια των μονάδων να είναι δυνάμεις του 10.

Για τον ορισμό των μονάδων μέτρησης έχουν υιοθετηθεί πρότυπα μέτρησης τα οποία θα πρέπει να χαρακτηρίζονται από ακρίβεια, να είναι αμετάβλητα ως προς το χρόνο, να έχουν πρόσβαση σε αυτά όσοι το επιθυμούν και να μπορούν να αναπαραχθούν εύκολα σε περίπτωση καταστροφής τους. Τα πρότυπα αυτά μπορεί να είναι είτε φυσικά είτε τεχνητά πρότυπα. Για παράδειγμα, ως φυσικό πρότυπο μέτρησης του μήκους, ορίστηκε το 1795 το μέτρο (m) ως το κλάσμα $1/10^7$ του μήκους του $\frac{1}{4}$ του μεσημβρινού της Γης (απόσταση από το Βόρειο Πόλο στον Ισημερινό). Το 1799 κατασκευάστηκε ένα τεχνητό πρότυπο μέτρησης του μήκους από πλατίνα ενώ το 1889 αντικαταστάθηκε από μία ράβδο κράματος 90% πλατίνας και 10% ιριδίου, ακρίβειας 0.2 μm . Το 1960 εισήχθηκε ως φυσικό πρότυπο μέτρησης του μήκους, ένα πολλαπλάσιο του μήκους κύματος του φωτός που εκπέμπεται από το ισότοπο ^{86}Kr και η ακρίβεια του ήταν 0.01 μm . Τελικά, από το 1983, ο ορισμός του μέτρου καθορίζεται μέσω της ταχύτητας του φωτός (βλ. Κεφ. 11.2). Το πρότυπο μέτρησης που παρέχει τη μεγαλύτερη ακρίβεια στις μετρήσεις και η αξία του είναι αποδεκτή χωρίς αναφορά σε άλλο πρότυπο, αναφέρεται ως πρωτεύον πρότυπο μέτρησης. Περισσότερο προσβάσιμα αν και λιγότερο ακριβή είναι τα δευτερεύοντα πρότυπα (ή πρότυπα αναφοράς) τα οποία ανά τακτά χρονικά διαστήματα θα πρέπει να βαθμονομούνται βάσει του πρωτεύοντος προτύπου ενώ στην πράξη χρησιμοποιούνται τα πρότυπα εργασίας.

Η πρώτη προσπάθεια καθιέρωσης ενός συστήματος μονάδων μέτρησης έγινε μετά τη Γαλλική επανάσταση και οδήγησε στην υιοθέτηση του δεκαδικού μετρικού συστήματος (1795). Το 1874 εισήχθηκε από τη Βρετανική Ένωση για την Προώθηση των Επιστημών (BAAS), το σύστημα CGS. Από την αρχική διεθνή διπλωματική συμφωνία ("Convention du Metre") του 1875 μεταξύ 17 χωρών όπου και ιδρύθηκε το Διεθνές Γραφείο Μέτρων και Σταθμών (BIPM), ακολούθησαν διάφορες διεθνείς συμφωνίες αναφορικά με την καθιέρωση διαφόρων συστημάτων μονάδων μέτρησης με την τελική αποδοχή το 1960, του Διεθνούς Συστήματος (SI) μονάδων μέτρησης το οποίο, με διάφορες τροποποιήσεις έως και σήμερα, χρησιμοποιείται σχεδόν παγκοσμίως (Taylor & Thompson, 2008). Περιλαμβάνει τον ορισμό των επτά βασικών μονάδων μέτρησης για τα θεμελιώδη μεγέθη οι οποίες είναι διαστατικά ανεξάρτητες μεταξύ τους, τις παράγωγες μονάδες ως συνάρτηση των βασικών μονάδων καθώς και κανόνες για τα προθέματα και άλλα συναφή ζητήματα.

Στα Παραρτήματα 11.2 και 11.3 του παρόντος συγγράμματος παρουσιάζονται αναλυτικά οι ορισμοί των βασικών μονάδων μέτρησης, τα παράγωγα φυσικά μεγέθη καθώς και τα προθέματα που χρησιμοποιούνται στο SI. Την τελευταία έκδοση του Διεθνούς Συστήματος μονάδων μέτρησης (8^η έκδοση του 2006, αναθεωρημένη το 2014) από το Διεθνές Γραφείο Μέτρων και Σταθμών, μπορείτε να την κατεβάσετε από το σύνδεσμο του BIPM [εδώ](#).

Πέρα από το Διεθνές Σύστημα Μονάδων που χρησιμοποιείται αποκλειστικά στο παρόν σύγγραμμα, υπάρχουν και άλλα συστήματα μονάδων που χρησιμοποιούνται ακόμα στη Φυσική. Στο σύστημα CGS, τα θεμελιώδη μεγέθη της μηχανικής είναι το μήκος, η μάζα και ο χρόνος, όπως και στο SI, αλλά οι αντίστοιχες

μονάδες μέτρησης είναι το cm, το g και το sec, απ' όπου προκύπτει και το ακρωνύμιο CGS. Οι διαφορές του συστήματος CGS με το SI σε ότι αφορά τα μεγέθη της μηχανικής περιορίζονται μόνον σε πολλαπλασιαστικούς παράγοντες (δυνάμεις του 10) στις τιμές των βασικών και παράγωγων μονάδων καθώς και στα ονόματά τους. Ωστόσο, σημαντικές διαφορές μεταξύ των δύο συστημάτων υπάρχουν στα μεγέθη του ηλεκτρομαγνητισμού. Έτσι, στο σύστημα CGS, όλες οι μονάδες του ηλεκτρομαγνητισμού προέρχονται από τις μονάδες της μηχανικής ενώ υπάρχουν διαφορετικά συστήματα CGS, ανάλογα με τη σχέση της μηχανικής που χρησιμοποιείται για τον ορισμό των ηλεκτρομαγνητικών μονάδων μέτρησης. Για παράδειγμα, στο ηλεκτροστατικό σύστημα CGS, η μονάδα του ηλεκτρικού φορτίου (statcoulomb) ορίζεται μέσω του νόμου Coulomb, $F_e = K_e q_1 q_2 / r^2$, επιβάλλοντας για τη σταθερά K_e να είναι αδιάστατη και ίση με τη μονάδα. Στο ηλεκτρομαγνητικό σύστημα CGS, η μονάδα του ρεύματος (abampere) ορίζεται μέσω της δύναμης που ασκείται μεταξύ δύο ρευματοφόρων αγωγών μήκους l που διαρρέονται από ρεύματα I_1 και I_2 και απέχουν μεταξύ τους απόσταση d , $F_m = 2K_m I_1 I_2 l / d$.

Το Πρακτικό Σύστημα μονάδων μέτρησης έπαυε να χρησιμοποιείται μετά την υιοθέτηση του Διεθνούς Συστήματος, με μερικές ωστόσο εξαιρέσεις μονάδων από ειδικά πεδία της φυσικής. Μερικά παραδείγματα τέτοιων μονάδων μέτρησης που χρησιμοποιούνται συχνά, δίνονται στον Πίνακα 1.1.

Όνομασία	Σύμβολο	Περιγραφή
Ατομική μονάδα μάζας	u	Ισούται με το 1/12 της μάζας του ατόμου του ισότοπου ^{12}C ($1 \text{ u} \approx 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}$)
Angström	Å	Μονάδα μέτρησης μήκους σε ατομική κλίμακα ($1 \text{ Å} = 10^{-10} \text{ m}$)
Electronvolt	eV	Μονάδα μέτρησης ενέργειας, ίση με την ενέργεια που αποκτά ηλεκτρόνιο που επιταχύνεται από διαφορά δυναμικού 1V ($1 \text{ eV} \approx 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$)
Αστρονομική μονάδα	au	Μονάδα μέτρησης αποστάσεως στο ηλιακό σύστημα, ίση περίπου με την απόσταση Γης – Ηλίου ($1 \text{ au} \approx 1.496 \times 10^{11} \text{ m}$)
bar	bar	Μονάδα μέτρησης της πίεσης, $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$
Ναυτικό μίλι	-	Ισούται με 1852 m
Εκτάριο (hectare)	ha	Μονάδα μέτρησης επιφάνειας, $1 \text{ ha} = 10^4 \text{ m}^2$
λίτρο	L, l	Μονάδα μέτρησης όγκου, $1 \text{ L} = 10^{-3} \text{ m}^3$
Μετρικός τόνος	t	Μονάδα μέτρησης μάζας, $1 \text{ t} = 10^3 \text{ kg}$

Πίνακας 1.1 Μερικές μονάδες μέτρησης του Πρακτικού Συστήματος που χρησιμοποιούνται ακόμη και σήμερα.

Μέγεθος	Μονάδα	Σύμβολο	Μετατροπή
Μήκος	inch	in	2.54 cm
	foot	ft	30.48 cm
Μάζα	ounce	oz	28.349 g
	pound	lb	453.6 g
Όγκος	Fluid ounce UK	fl oz UK	28.413 cm^3
	Fluid ounce USA	fl oz USA	29.574 cm^3
	gallon UK	gal UK	4.5461 dm^3
	gallon USA	gal USA	3.7854 dm^3
Δύναμη	pound-force	lbf	4.448 N
Πίεση	pound-force/square inch	psi	6894.76 Pa
Ενέργεια	British thermal unit	Btu	1054.5 J
Ισχύς	horse power	hp	745.7 W
Θερμοκρασία	Βαθμός Fahrenheit	°F	$(5/9) \text{ K}$

Πίνακας 1.2 Μερικές μονάδες μέτρησης του Βρετανικού Συστήματος και οι ισοδυναμίες τους στο σύστημα CGS.

Αξίζει να σημειωθεί, ότι χώρες όπως οι Ηνωμένες Πολιτείες της Αμερικής, η Μεγάλη Βρετανία και πρώην αποικίες τους, χρησιμοποιούν ακόμα το Βρετανικό Σύστημα μονάδων μέτρησης. Το σύστημα αυτό ωστόσο δεν είναι δεκαδικό, δηλαδή δε χρησιμοποιούνται πολλαπλάσια ή υποπολλαπλάσια του δέκα. Για παράδειγμα, η βασική μονάδα μέτρησης του μήκους είναι η ίντσα (inch) με πολλαπλάσιο αυτής το πόδι (foot) το οποίο ισούται με 12 in και η γυάρδα (yard) που ισούται με 3 ft. Επίσης, μερικές μονάδες έχουν διαφορετική τιμή στη Μεγάλη Βρετανία και στην Αμερική. Μερικές συνηθισμένες μονάδες μέτρησης του Βρετανικού Συστήματος αναφέρονται στον Πίνακα 1.2.

1.3. Διαστατική ανάλυση

Η διαστατική ανάλυση αποτελεί ένα χρήσιμο εργαλείο με το οποίο μπορούμε να ελέγξουμε την ορθότητα των σχέσεων που συνδέουν διάφορα φυσικά μεγέθη καθώς επίσης και να εξάγουμε φυσικούς νόμους (Formasini, 2008). Για το σκοπό αυτό ορίζουμε για τα διάφορα μεγέθη μία νέα μονάδα μέτρησης και μπορούμε να εκφράσουμε συναρτήσει αυτής, τη διάσταση των υπόλοιπων φυσικών μεγεθών. Για τα θεμελιώδη μεγέθη της μηχανικής, το μήκος, τη μάζα και το χρόνο, οι αντίστοιχες μονάδες συμβολίζονται με L, M και T. Ως αποτέλεσμα αυτής της νέας επιλογής των μονάδων μέτρησης, οι τιμές του μήκους πολλαπλασιάζονται με L, οι τιμές του όγκου με L^3 , οι τιμές του χρόνου με $L^0=1$ και της ταχύτητας με L. Ο εκθέτης δηλαδή του L αποτελεί τη διάσταση οποιουδήποτε άλλου μεγέθους σε σχέση με το συγκεκριμένο μέγεθος, το μήκος. Επομένως, το φυσικό μέγεθος του μήκους όπως επίσης και η ταχύτητα έχουν διάσταση 1 σε σχέση με το μήκος, ο όγκος έχει διάσταση 3, ενώ ο χρόνος που είναι ανεξάρτητος του μήκους έχει διάσταση μηδέν.

Οποιοδήποτε θεμελιώδες ή παράγωγο φυσικό μέγεθος X μπορεί να εκφραστεί συμβολικά μέσω της ακόλουθης διαστατικής εξίσωσης

$$[X] = [A]^{\alpha}[B]^{\beta}[C]^{\gamma} \dots \quad (1.1)$$

όπου οι εκθέτες α , β , και γ είναι οι διαστάσεις του μεγέθους X σε σχέση με τις μονάδες μέτρησης των βασικών μεγεθών A, B και C, ενώ οι αγκύλες υποδηλώνουν τις μονάδες του κάθε μεγέθους. Για παράδειγμα, οι διαστάσεις της ταχύτητας εκφράζονται από τη σχέση

$$[v] = L^1 T^{-1} M^0$$

ενώ οι διαστάσεις της δύναμης F , μέσω της σχέσης ορισμού $F = ma$, εκφράζονται ως

$$[F] = L^1 T^{-2} M^1$$

και του έργου $W = Fx$ (ή της ενέργειας)

$$[W] = [E] = L^2 T^{-2} M^1$$

Τα μεγέθη του έργου και της ενέργειας που έχουν τις ίδιες διαστάσεις τα ονομάζουμε διαστατικά ομογενή μεγέθη. Γενικά, για τον έλεγχο της ορθότητας μίας εξίσωσης μεταξύ φυσικών μεγεθών, ικανή συνθήκη (όχι όμως και αναγκαία) είναι η διαστατική ομογένεια της εξίσωσης αυτής, δηλαδή θα πρέπει όλοι οι όροι σε κάθε μέλος να έχουν τις ίδιες διαστάσεις. Ο έλεγχος αυτός μπορεί να γίνει κατανοητός μέσω του ακόλουθου παραδείγματος.

1.3.1. Εφαρμογή στον έλεγχο ορθότητας εξίσωσης

Κατά τη μελέτη της βολής ενός σώματος υπό γωνία θ_0 και αρχική ταχύτητα v_0 , καταλήγουμε στη σχέση που εκφράζει την κατακόρυφη μετατόπιση z συναρτήσει της οριζόντιας μετατόπισης x

$$z = -\frac{g}{2v_0 \cos^2 \theta_0} x^2 + x \cos \theta_0 \quad (1.2)$$

Διαστατικά ομογενής εξίσωση σημαίνει ότι κάθε όρος της εξίσωσης 1.2 θα πρέπει να έχει τις ίδιες διαστάσεις που είναι διαστάσεις μήκους, αφού το z στο 1^ο μέλος εκφράζει απόσταση. Ο 2^{ος} όρος στο δεύτερο μέλος της εξίσωσης 1.2 έχει επίσης διαστάσεις μήκους, αφού οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις (καθώς και οι εκθετικές και οι λογαριθμικές) είναι αδιάστατες όπως επίσης και τα ορίσματα τους (ή οι γωνίες). Ο 1^{ος} όρος ωστόσο δεν είναι διαστατικά ορθός αφού όπως προκύπτει, οι διαστάσεις του είναι διαφορετικές από μήκος

$$\left[\frac{g}{2v_o \cos^2 \theta} x^2 \right] = \frac{[g]}{[v_o]} [x^2] = \frac{L^1 T^{-2}}{L^1 T^{-1}} L^2 = L^2 T^{-1}$$

Μία πιθανή λύση για να έχει ο όρος αυτός διαστάσεις μήκους, είναι να έχει ο πρώτος όρος της εξίσωσης 1.2 στον παρονομαστή v_o^2 αντί για v_o οπότε και οι διαστάσεις θα είναι τότε οι ζητούμενες, αφού

$$\frac{L^2 T^{-1}}{L^1 T^{-1}} = L$$

Πράγματι, η ορθή συνάρτηση δίνεται από τη σχέση

$$z = -\frac{g}{2v_o^2 \cos^2 \theta} x^2 + x \tan \theta$$

στην οποία ωστόσο παρατηρούμε ότι ο 2^{ος} όρος του αρχικού αποτελέσματος (Σχέση 1.2) δεν ήταν σωστός, χωρίς όμως να μπορεί αυτό να προβλεφθεί από το διαστατικό έλεγχο που εφαρμόσαμε.

Η χρησιμότητα της διαστατικής ανάλυσης αφορά επίσης την εύρεση αναλυτικών σχέσεων μεταξύ φυσικών μεγεθών που περιγράφουν ένα φυσικό φαινόμενο, όπως μπορεί να φανεί στα δύο ακόλουθα παραδείγματα.

1.3.2. Ανάλυση διαστάσεων για την εύρεση της κεντρομόλου δύναμης

Θεωρούμε σώμα μάζας m το οποίο εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση με ταχύτητα σταθερού μέτρου v στην περιφέρεια κύκλου ακτίνας r , υπό την επίδραση της κεντρομόλου δύναμης F . Το σώμα έχει τρεις ιδιότητες που είναι πιθανόν να είναι σημαντικές στην κίνηση του και άρα εύλογα μπορούμε να υποθέσουμε ότι η κεντρομόλος δύναμη θα εξαρτάται από αυτές τις ποσότητες, σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση

$$F \propto m^\alpha v^\beta r^\gamma \quad (1.3)$$

Οι σταθεροί εκθέτες προσδιορίζονται από τη διαστατική ομοιογένεια την σχέσης 1.3. Θα ισχύει επομένως

$$[F] = [m]^\alpha [v]^\beta [r]^\gamma \Rightarrow L^1 T^{-2} M^1 = M^\alpha L^\beta T^{-\beta} L^\gamma = L^{\beta+\gamma} T^{-\beta} M^\alpha$$

απ' όπου προκύπτουν τρεις αλγεβρικές σχέσεις από τις οποίες μπορούμε να υπολογίσουμε τους εκθέτες α , β και γ

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ -\beta = -2 \\ \beta + \gamma = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \\ \gamma = -1 \end{cases}$$

Τελικά, η σχέση 1.3 παίρνει τη μορφή

$$F \propto \frac{mv^2}{r}$$

με το συντελεστή αναλογίας στην περίπτωση μας συμπτωματικά να ισούται με τη μονάδα.

1.3.3. Ανάλυση διαστάσεων για την εύρεση της περιόδου ταλάντωσης εκκρεμούς

Θεωρούμε ένα απλό εκκρεμές που αποτελείται από βαρίδι μάζας m αναρτημένο με αβαρές νήμα μήκους l από σταθερό σημείο, του οποίου η περίοδος ταλάντωσης είναι $T_{εκ}$. Οι ποσότητες από τις οποίες πιθανόν εξαρτάται η περίοδος είναι αυτές που περιγράφουν το σώμα καθώς και την κίνηση του, δηλαδή η μάζα του βαριδιού, το μήκος του νήματος, η επιτάχυνση της βαρύτητας και η αρχική γωνία εκτροπής θ_0 . Η εξάρτηση της περιόδου $T_{εκ}$ από τα παραπάνω μεγέθη θα εκφράζεται επομένως από την ακόλουθη σχέση

$$T_{εκ} \propto m^\alpha l^\beta g^\gamma \theta_0^\delta \quad (1.4)$$

Για την διαστατική ομοιογένεια της σχέσης 1.4 μπορούμε να γράψουμε

$$[T_{εκ}] = [m]^\alpha [l]^\beta [g]^\gamma [\theta_0]^\delta \Rightarrow T = M^\alpha L^\beta L^\gamma T^{-2\gamma}$$

αφού η γωνία θ_0 είναι αδιάστατο μέγεθος. Τελικά

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ -2\gamma = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \gamma = -1/2 \\ \beta = 1/2 \end{cases}$$

Άρα, η σχέση 1.4 έχει την ακόλουθη μορφή

$$T_{εκ} \propto \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (1.5)$$

Εφόσον το γωνιακό πλάτος θ_0 είναι αδιάστατο μέγεθος, δε γνωρίζουμε αν εμφανίζεται ή όχι στην τελική σχέση 1.5 ωστόσο αποδεικνύεται ότι η σταθερά αναλογίας στη σχέση 1.5, όπως γνωρίζουμε, ισούται με 2π .

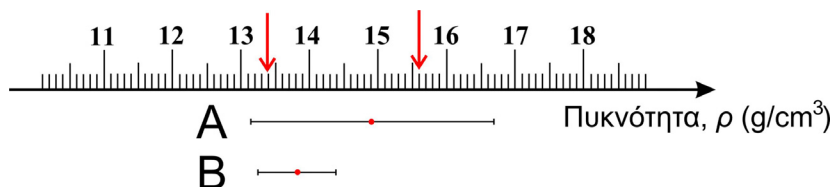
1.4. Είδη μετρήσεων και κατηγορίες σφαλμάτων

Στη Φυσική, η έννοια του πειράματος είναι συνυφασμένη με τη διαδικασία της μέτρησης ενός φυσικού μεγέθους, της σύγκρισης του δηλαδή με ένα ομοειδές μέγεθος που έχει εκλεγεί αυθαίρετα ως μοναδιαίο (Τρικαλινός, 2014). Η αριθμητική τιμή του μεγέθους είναι ο λόγος του μεγέθους προς τη μονάδα που ορίστηκε και ονομάζεται μέτρο του μεγέθους. Οι μετρήσεις διακρίνονται σε απλές ή αλλιώς άμεσες και σε σύνθετες ή αλλιώς έμμεσες. Απλή είναι μια μέτρηση όταν η αριθμητική τιμή του μετρούμενου μεγέθους προκύπτει απευθείας από την παρατήρηση. Χαρακτηριστικό παράδειγμα η μέτρηση του μήκους ενός αντικειμένου με χάρακα ή μετροταινία ή η μέτρηση της μάζας με τη χρήση μηχανικού ζυγού ισορροπίας. Σύνθετη είναι μια μέτρηση όταν η αριθμητική τιμή ενός μεγέθους δεν προκύπτει απευθείας αλλά είναι συνάρτηση των τιμών άλλων μεγεθών που προέκυψαν από απλές μετρήσεις. Για παράδειγμα, η μέτρηση του όγκου ενός ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου είναι σύνθετη μέτρηση αφού προϋποθέτει τη μέτρηση των τριών διαστάσεών του. Επίσης, η μέτρηση της ταχύτητας προκύπτει από τη μέτρηση αποστάσεων και χρονικών διαστημάτων και είναι προφανώς σύνθετη μέτρηση. Ακόμη και απλά φυσικά μεγέθη όπως το μήκος, σε κάποιες περιπτώσεις προκύπτουν ως αποτέλεσμα σύνθετης μέτρησης. Για παράδειγμα, οι αστρονομικές αποστάσεις μπορούν να υπολογιστούν από την άμεση μέτρηση γωνιών και μικρών αποστάσεων. Ομοίως, η θερμοκρασία δεν μπορεί να μετρηθεί απευθείας αλλά προκύπτει μέσω κάποιας θερμομετρικής κλίμακας που συνδέεται με ένα άλλο μετρούμενο μέγεθος όπως το μήκος, η πίεση, η ηλεκτρική αντίσταση, κ.ά. Έτσι, στο υδραργυρικό θερμοόμετρο, η μέτρηση της θερμοκρασίας συνδέεται με την άμεση μέτρηση της θερμικής διαστολής του υδραργύρου που αντιστοιχίζεται σε μονάδες θερμοκρασίας.

Οποιαδήποτε μέτρηση ωστόσο, είτε αυτή είναι απλή είτε σύνθετη, εμπεριέχει ένα βαθμό αβεβαιότητας στο αποτέλεσμα της που εκφράζεται αριθμητικά και είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με τη μέτρηση αυτή. Η ικανότητα του ποσοτικού προσδιορισμού της αβεβαιότητας είναι θεμελιώδους σημασίας στην επιστημονική έρευνα για την επαλήθευση των θεωριών αλλά και στις τεχνολογικές εφαρμογές για την αποτίμηση της αξιοπιστίας προϊόντων και διαδικασιών (Taylor, 1997).

Το αποτέλεσμα της μέτρησης ενός μεγέθους X θα πρέπει να εκφράζεται πάντα από ένα ζεύγος αριθμών (X_0 , δX). Ο πρώτος αριθμός είναι το μέτρο του μεγέθους που μετράμε, όπως αυτό προκύπτει από τη σύγκριση με τη μονάδα μέτρησης που εκλέξαμε. Ο δεύτερος αριθμός είναι το λεγόμενο «πειραματικό σφάλμα» που συνοδεύει τη μέτρηση και αποτελεί ένα μέτρο της ποιότητας της μέτρησης, ώστε να είμαστε σε θέση να ξέρουμε κατά πόσο μπορούμε να εμπιστευθούμε την τιμή του μετρούμενου μεγέθους και να τη χρησιμοποιήσουμε σε μετέπειτα υπολογισμούς. Πρέπει λοιπόν οι πειραματικές μετρήσεις να είναι όσο το δυνατόν πιο ακριβείς για να μην οδηγούμαστε αναπόφευκτα σε εσφαλμένα συμπεράσματα. Δε θα πρέπει να ξεχνάμε επίσης ότι οι παραπάνω τιμές θα πρέπει να αναγράφονται με τη σωστή μονάδα μέτρησης του μετρούμενου μεγέθους. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να επισημάνουμε ότι η έννοια του πειραματικού σφάλματος δε θα πρέπει να ερμηνεύεται με την έννοια του λάθους στις μετρήσεις αλλά ως η αβεβαιότητα που υπάρχει πάντα σε μία μέτρηση, εξαιτίας του γεγονότος ότι δε μπορούμε ποτέ να ελέγξουμε όλους τους παράγοντες που επιδρούν στη μέτρηση. Υπό αυτή την έννοια, είναι επιστημονικά ορθότερο να χρησιμοποιούμε τον όρο αβεβαιότητα αντί του σφάλματος. Σύμφωνα με το VIM, το σφάλμα ορίζεται ως η διαφορά ανάμεσα στο αποτέλεσμα μιας μέτρησης και της αληθινής τιμής του μετρούμενου μεγέθους. Η αληθινή τιμή ενός μετρούμενου μεγέθους (περισσότερες από μία) αποτελεί το αποτέλεσμα μίας ιδανικής μέτρησης, με πολύ μικρή αβεβαιότητα. Εφόσον βέβαια η αληθινή τιμή του μετρούμενου μεγέθους, μας είναι άγνωστη, το σφάλμα δεν έχει πρακτική σημασία. Αν γνωρίζαμε το σφάλμα ποσοτικά, τότε θα μπορούσαμε να το διορθώσουμε, άρα παύει αυτό να υφίσταται μετά τη διόρθωση. Αντίθετα, η έννοια της αβεβαιότητας μας παρέχει μία ποσοτική εικόνα της διασποράς των τιμών ενός μετρούμενου μεγέθους, λόγω της αδυναμίας να εντοπιστεί η αληθινή του τιμή.

Η σημασία της γνώσης της αβεβαιότητας στις μετρήσεις μπορεί να γίνει κατανοητή από το εξής χαρακτηριστικό πρόβλημα που είχε κληθεί να επιλύσει ο Αρχιμήδης. Το ζητούμενο ήταν να βρεθεί αν ένα στέμμα που ζήτησε ο βασιλιάς Ιέρωνας να του κατασκευάσουν ήταν από ατόφιο χρυσάφι 18 καρατίων ή εάν αυτό είχε νοθευτεί με κάποιο άλλο μέταλλο (Taylor, 1997). Έστω λοιπόν ότι πρέπει να εξετάσουμε ένα αντικείμενο αν είναι κατασκευασμένο από χρυσό πυκνότητας 19.3 g/cm^3 ή από ένα κράμα κάποιου άλλου μετάλλου που έχει πυκνότητα 13.4 g/cm^3 . Ο υπολογισμός της πυκνότητας γίνεται από δύο ειδικούς που χρησιμοποιούν την αρχή του Αρχιμήδη για τον υπολογισμό της πυκνότητας του υλικού. Η καλύτερη εκτίμηση του A για την πυκνότητα είναι 14.9 g/cm^3 με ένα εύρος τιμών που κυμαίνεται από 13.1 έως 16.7 g/cm^3 , όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.2. Αντίστοιχα, οι τιμές του B κυμαίνονται σε σαφώς μικρότερο εύρος τιμών ($13.2 - 14.4 \text{ g/cm}^3$) με καλύτερη εκτίμηση την τιμή 13.8 g/cm^3 , υποδηλώνοντας ότι οι μετρήσεις του είναι πιο ακριβείς (Σχήμα 1.2). Προφανώς, για να αξιολογήσουμε σωστά τα αποτελέσματα των δύο ειδικών, θα πρέπει να συνεκτιμήσουμε τις αβεβαιότητές τους. Επειδή η αβεβαιότητα του A είναι τόσο μεγάλη ώστε να εμπεριέχει τις τιμές της πυκνότητας του χρυσού και του κράματος, το αποτέλεσμα του είναι άνευ πρακτικής σημασίας παρόλο που η μεθοδολογία του μπορεί να είναι σωστή. Χωρίς βέβαια την αναφορά της αβεβαιότητας, θα μπορούσαμε εσφαλμένα να συμπεράνουμε ότι πιθανόν το αντικείμενο είναι κατασκευασμένο από χρυσό, αφού η μετρούμενη πυκνότητα βρίσκεται κοντά σε αυτή του χρυσού. Αντίθετα, ο B έχει μικρότερη μετρούμενη αβεβαιότητα στο αποτέλεσμα του και προκύπτει ότι το αντικείμενο είναι νοθευμένο. Για την ορθότητα ωστόσο και των δύο αποτελεσμάτων θα πρέπει να γνωρίζουμε τον τρόπο με τον οποίο έγιναν οι μετρήσεις και υπολογίστηκαν οι αβεβαιότητές τους.



Σχήμα 1.2 Αποτελέσματα του υπολογισμού της πυκνότητας ενός σώματος από δύο διαφορετικούς πειραματιστές. Η γνώση μόνον της πειραματικής τιμής μπορεί να μας οδηγήσει σε λανθασμένο συμπέρασμα. Χρειάζεται απαραίτητα και η γνώση της αβεβαιότητας για να μπορούμε να αποφανθούμε για την ορθότητα του ερωτήματος που μας τίθεται.

Κάθε μέτρηση περιέχει αβεβαιότητες που μπορεί να οφείλονται είτε στις συνθήκες παρατήρησης είτε σε εξωτερικά αίτια που δε μπορούν πάντα να ελεγχθούν. Με βάση την προέλευση και την ευκολία με την οποία μπορούν να εξαλειφθούν, μπορούμε να κατατάξουμε τις αβεβαιότητες στις ακόλουθες κατηγορίες.

- (α) Χονδροειδή σφάλματα. Πρόκειται στην ουσία για λάθη που οφείλονται σε απειρία ή απροσεξία του πειραματιστή, σε λανθασμένο χειρισμό των οργάνων μέτρησης ή σε ανώμαλες συνθήκες του περιβάλλοντος. Δίνουν συνήθως αποτελέσματα που απέχουν από την αναμενόμενη τιμή οπότε αναγνωρίζονται εύκολα και θα πρέπει να απορρίπτονται. Εννοείται ότι τέτοιου είδους σφάλματα θα πρέπει να αποφεύγονται στο εργαστήριο κατά τη διάρκεια των μετρήσεων. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με τη σωστή οργάνωση του πειράματος, τη γνώση της οργανολογίας και της αντίστοιχης θεωρίας, καθώς και την αυξημένη προσοχή του πειραματιστή κατά τη διάρκεια της εκτέλεσης του πειράματος.
- (β) Συστηματικά σφάλματα ή καλύτερα πειραματική αβεβαιότητα. Τα σφάλματα αυτά αλλοιώνουν μια μέτρηση κατά τον ίδιο πάντοτε τρόπο και κατά την ίδια φορά, αυξάνουν δηλαδή είτε θετικά είτε αρνητικά το αποτέλεσμα των μετρήσεων. Μπορούν να οφείλονται:
- σε ατέλειες των οργάνων μέτρησης, είτε λόγω φθοράς του οργάνου που αλλοιώνει τη λειτουργία του, είτε λόγω λανθασμένης βαθμολόγησης της κλίμακας του. Η διαδικασία βαθμολόγησης της κλίμακας ενός οργάνου (βαθμονόμηση) πριν αυτό χρησιμοποιηθεί μπορεί να εισάγει σφάλματα στο όργανο μέτρησης. Συνήθως, υπάρχει σχετική ένδειξη επάνω στο όργανο που επιτρέπει στον πειραματιστή να κάνει τη σχετική διόρθωση στις μετρήσεις του.
 - σε εξωτερικά αίτια όπως η θερμοκρασία, η υγρασία, το γήινο μαγνητικό πεδίο, οι ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις, κ.ά. Για παράδειγμα η μέτρηση της μάζας με τη χρήση ενός ευαίσθητου ηλεκτρονικού ζυγού θα μπορούσε να επηρεαστεί από το άνοιγμα της πόρτας, τη χρήση του κλιματιστικού στο χώρο των μετρήσεων, ή γενικά από ένα ρεύμα αέρα.
 - στη μέθοδο της μέτρησης που μπορεί να παρουσιάζει περιορισμένη ακρίβεια. Εφόσον υπάρχει δυνατότητα, θα πρέπει να γίνεται έλεγχος της μέτρησης με άλλη μέθοδο.
- (γ) Τυχαία σφάλματα ή στατιστική αβεβαιότητα.

Τα σφάλματα που παραμένουν αφού έχουμε εξαλείψει τα συστηματικά και χονδροειδή σφάλματα. Μπορεί να είναι θετικά ή αρνητικά και οφείλονται:

- σε περιορισμένη ευαισθησία του οργάνου μέτρησης λόγω πεπερασμένου αριθμού των υποδιαίρεσεων της κλίμακας. Είναι για παράδειγμα αδύνατο να μετρήσουμε αποστάσεις με ακρίβεια καλύτερη των 0.5 mm χρησιμοποιώντας χάρακα που η μικρότερη υποδιαίρεση είναι 1 mm.
- στην ικανότητα του παρατηρητή που εκτελεί τις μετρήσεις. Παράγοντες όπως η εμπειρία, η προσοχή και η ταχύτητα αντίδρασης μπορεί να συντελέσουν στη μεγαλύτερη ακρίβεια των μετρήσεων.
- σε αστάθεια των εξωτερικών συνθηκών.

Σε μια μέτρηση λοιπόν ενός φυσικού μεγέθους ενδέχεται οι αριθμητικές τιμές κατά την επανάληψη των μετρήσεων να διαφέρουν μεταξύ τους και η διαφορά αυτή μπορεί να είναι ουσιώδης ή αμελητέα, ανάλογα με το είδος των σφαλμάτων που υπεισέρχονται στη διαδικασία της μέτρησης. Ποτέ επομένως μία μόνο μέτρηση ενός φυσικού μεγέθους δεν είναι αρκετή και η μέτρηση, εφόσον αυτό είναι εφικτό, θα πρέπει να επαναληφθεί πολλές φορές ώστε να βρεθεί τελικά η καλύτερη τιμή του μετρούμενου μεγέθους. Για την εκτίμηση της καλύτερης τιμής ενός μετρούμενου φυσικού μεγέθους και την εύρεση της αβεβαιότητας που προκύπτει από την επανάληψη πολλών μετρήσεων του μεγέθους αυτού χρησιμοποιούνται έννοιες της στατιστικής με τις οποίες θα ασχοληθούμε στα Κεφάλαια 3 και 4. Στη συνέχεια θα περιοριστούμε στην αβεβαιότητα της μέτρησης που προκύπτει κατά την ανάγνωση τιμών στις κλίμακες των οργάνων μέτρησης (άμεσες μετρήσεις) και τους παράγοντες από τους οποίους αυτή εξαρτάται.

1.5. Η αβεβαιότητα σε μία άμεση μέτρηση

Στις μετρήσεις που πραγματοποιούμε στο εργαστήριο εμφανίζονται συχνά και οι δύο κατηγορίες σφαλμάτων (τυχαία και συστηματικά σφάλματα). Για παράδειγμα, για τη μέτρηση της περιόδου ενός εκκρεμούς, χρησιμοποιούμε ένα ηλεκτρονικό χρονόμετρο που μπορεί να μετράει έως και εκατοστά του δευτερολέπτου (Loyd, 2008). Το χρονόμετρο έχει δηλαδή όπως λέμε διακριτική ικανότητα 0.01s. Ωστόσο, το χρονόμετρο αυτό μπορεί να «χάνει», να παρουσιάζει δηλαδή κάποιο συστηματικό σφάλμα στις μετρήσεις του που είναι πιθανό να μη γνωρίζουμε και να είναι αρκετά σημαντικό και ίσως μεγαλύτερο από τη διακριτική ικανότητα του χρονομέτρου. Επίσης, μπορεί να προκύπτει σε κάθε μέτρηση σφάλμα λόγω του χρόνου αντίδρασης που κάνει ο πειραματιστής να πατήσει την έναρξη και τη λήξη λειτουργίας του χρονομέτρου, ταυτόχρονα με την έναρξη και τη λήξη του φαινομένου, τη διάρκεια του οποίου θέλει να μετρήσει. Το σφάλμα αυτό προκαλεί

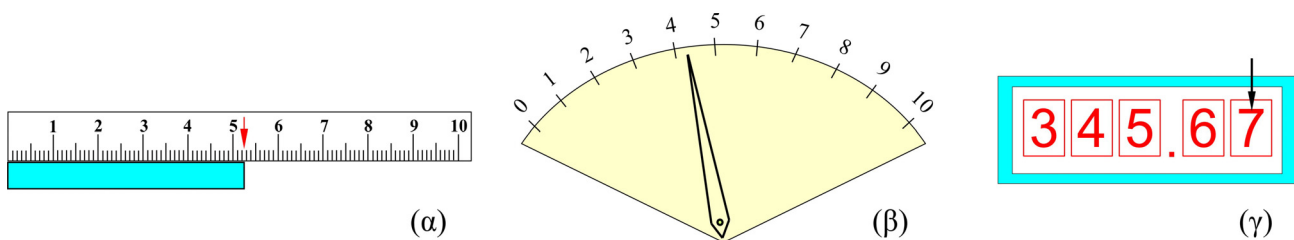
τυχαίες διακυμάνσεις στο αποτέλεσμα της μέτρησης, αλλά μπορεί να έχει και συστηματικό χαρακτήρα λόγω της υποκειμενικότητας του πειραματιστή. Επιπλέον, τα αποτελέσματα μπορεί να διαφέρουν ανάλογα με το αν ο πειραματιστής μέτρησε την περίοδο μίας μόνον ταλάντωσης ή τη διάρκεια 10 ταλαντώσεων και στη συνέχεια διαίρεσε με το 10. Ήδη στο απλό αυτό παράδειγμα, διαπιστώνουμε ότι για την εύρεση της αβεβαιότητας μίας απλής (άμεσης) μέτρησης υπεισέρχονται διαφορετικοί παράγοντες που έχουν να κάνουν με τα συστηματικά και τα τυχαία σφάλματα που εμφανίζονται, καθώς και με την πειραματική μεθοδολογία που διαφοροποιεί την αβεβαιότητα της μέτρησης.

Γενικά, η μέτρηση ενός φυσικού μεγέθους X με οποιοδήποτε όργανο, δίνει μια αριθμητική τιμή που μπορούμε να διαβάσουμε στην κλίμακα του οργάνου και εκφράζεται ως

$$X = X_o \pm \delta X \quad (1.6)$$

Στην παραπάνω έκφραση, το X_o είναι η κεντρική τιμή του διαστήματος $2\delta X$, όπου το δX εκφράζει την αβεβαιότητα λόγω της περιορισμένης διακριτικής ικανότητας ΔX του οργάνου. Η τελευταία οφείλεται στο πεπερασμένο πλήθος των υποδιαίρεσεων της κλίμακας του χρησιμοποιούμενου οργάνου.

Έστω για παράδειγμα ότι μετράμε το μήκος L ενός αντικειμένου με έναν χάρακα (Σχήμα 1.3α). Παρατηρούμε ότι το άκρο του αντικειμένου δε συμπίπτει ακριβώς με μια χαραγή του χάρακα, αλλά βρίσκεται μεταξύ των χαραγών που αντιστοιχούν στα 5.2 και 5.3 cm. Έτσι, δε μπορούμε να πούμε με βεβαιότητα ότι το μήκος του αντικειμένου είναι 5.25 cm αφού το τελευταίο ψηφίο του αριθμού αυτού δε μπορούμε να το καθορίσουμε με ακρίβεια. Το ψηφίο αυτό ονομάζεται αβέβαιο ή κατ' εκτίμηση ψηφίο.



Σχήμα 1.3 Η διαδικασία (α) της μέτρησης του μήκους ενός αντικειμένου με χάρακα ή της ανάγνωσης μιας ένδειξης σε ένα (β) αναλογικό ή (γ) ψηφιακό όργανο, εμπεριέχει πάντα την αβεβαιότητα λόγω της διακριτικής ικανότητας του οργάνου.

Έχοντας ωστόσο μια ακριβή εκτίμηση των ορίων μέσα στα οποία μπορεί να βρεθεί η μετρούμενη τιμή, δηλ.

$$5.2 \text{ cm} < L < 5.3 \text{ cm}$$

μπορούμε να γράψουμε με βεβαιότητα ότι το μήκος του αντικειμένου είναι

$$L = L_o \pm \delta L = (5.25 \pm 0.05) \text{ cm} = (52.5 \pm 0.5) \text{ mm}$$

Ο δεύτερος αριθμός αποτελεί την αβεβαιότητα δL της μίας μέτρησης που πραγματοποιήσαμε (αναφέρεται και ως σφάλμα ανάγνωσης) και ισούται στην προκειμένη περίπτωση με το μισό της ελάχιστης υποδιαίρεσης του οργάνου μέτρησης που ορίζεται ως η διακριτική ικανότητα ΔL του οργάνου, δηλαδή

$$\delta L = \frac{\Delta L}{2} = \frac{1 \text{ mm}}{2} = 0.5 \text{ mm}$$

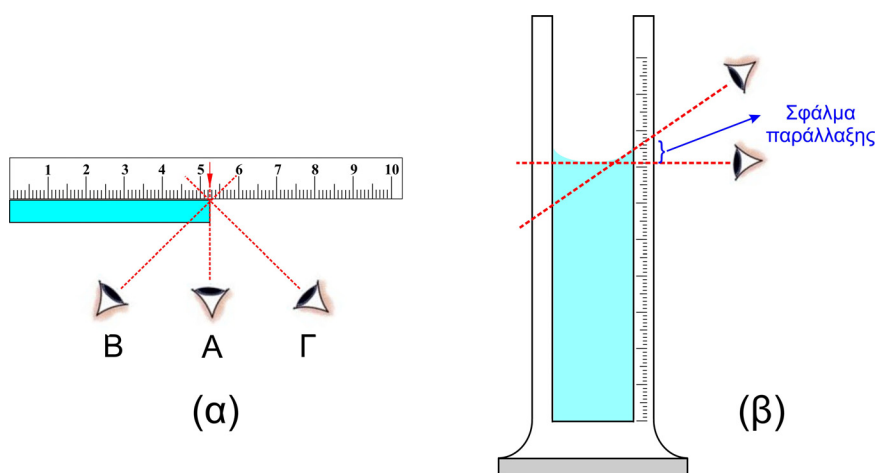
Σε ένα αναλογικό όργανο, η διακριτική του ικανότητα αντιστοιχεί στην ελάχιστη απόσταση μεταξύ δύο χαραγών. Έτσι, στο χάρακα του προηγούμενου παραδείγματος θα έχουμε $\Delta L=1 \text{ mm}$, για ένα χρονόμετρο χειρός η διακριτική ικανότητα είναι συνήθως $\Delta t=0.01 \text{ s}$, για ένα μικρόμετρο θα έχουμε $\Delta L=0.01 \text{ mm}$ και η αβεβαιότητα θα ισούται σε κάθε περίπτωση με το μισό των τιμών αυτών. Βέβαια η αβεβαιότητα της μέτρησης μπορεί να είναι ένα κλάσμα της ελάχιστης υποδιαίρεσης της κλίμακας του οργάνου μέτρησης, ανάλογα πάντα με το εύρος της ελάχιστης υποδιαίρεσης (Σχήμα 1.3β).

Σε ένα ψηφιακό όργανο η τιμή X_0 διαβάζεται κατευθείαν πάνω στην οθόνη του οργάνου (Σχήμα 1.3γ) και η διακριτική ικανότητα ισούται με τη μικρότερη δυνατή τιμή του τελευταίου ψηφίου που στην περίπτωση του παραδείγματος στο Σχήμα 1.3γ είναι 0.01. Το αποτέλεσμα τότε θα πρέπει να αναγραφεί ως εξής

$$X = X_0 \pm \delta X = 345.67 \pm 0.005$$

Η διακριτική ικανότητα ενός οργάνου μέτρησης δε θα πρέπει να συγκρίνεται με την ακρίβεια του οργάνου η οποία εξαρτάται από την επίδραση των συστηματικών και τυχαίων σφαλμάτων καθώς και τη διακριτική του ικανότητα. Επιπλέον, σημαντικό ρόλο στην ακρίβεια παίζει η σταθερότητα του οργάνου, δηλαδή η ικανότητα του να δίνει παρόμοια αποτελέσματα σε μετρήσεις του ίδιου μεγέθους που επαναλαμβάνονται σε τακτά χρονικά διαστήματα, πολύ μεγαλύτερα από τη διάρκεια μίας μέτρησης. Η ακρίβεια ενός οργάνου μέτρησης συνήθως αναγράφεται στο εγχειρίδιο χρήσης του ή και πάνω στο ίδιο το όργανο ως η αριθμητική τιμή της αβεβαιότητας, $\pm \delta X$. Σε περίπτωση που δεν αναφέρεται ρητά, μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα τυχαία και συστηματικά σφάλματα καθώς και η αστάθεια του οργάνου είναι αμελητέα σε σχέση με τη διακριτική του ικανότητα ΔX . Στην περίπτωση αυτή, η ακρίβεια θα ισούται με $\delta X = \Delta X/2$. Για παράδειγμα, σε ένα μεταλλικό χάρακα που αναγράφεται η διακριτική του ικανότητα, $\Delta X=1\text{mm}$, η αβεβαιότητα της μέτρησης δεν είναι μεγαλύτερη από 0.5mm. Στο εγχειρίδιο χρήσης ωστόσο ενός ψηφιακού θερμομέτρου διακριτικής ικανότητας $\Delta T=0.1\text{ }^\circ\text{C}$, η ακρίβεια αναφέρεται ότι είναι $\delta T=0.4\text{ }^\circ\text{C}$ σε εύρος θερμοκρασιών -20 ως $105\text{ }^\circ\text{C}$. Στην περίπτωση αυτή, οι ενδείξεις που λαμβάνουμε είναι προφανώς πολλαπλάσιες της διακριτικής ικανότητας του θερμομέτρου αλλά η αβεβαιότητα των μετρήσεων του είναι σαφώς μεγαλύτερη από το μισό της διακριτικής του ικανότητας.

Ένα σημαντικό σφάλμα που θα πρέπει να αποφεύγουμε κατά την ανάγνωση τιμών σε κλίμακες αναλογικών οργάνων που φέρουν δείκτες-βελόνες όπως στο Σχήμα 1.3β, συνδέεται με τη γωνία παρατήρησης της μετρούμενης ένδειξης και αναφέρεται ως σφάλμα παράλλαξης (Σχήμα 1.4). Παρατηρείται συχνά στο εργαστήριο όπου οι φοιτητές δουλεύουν συνήθως σε ομάδες και προσπαθούν ταυτόχρονα να διαβάσουν πάνω σε μία κλίμακα αναλογικού οργάνου το αποτέλεσμα της μέτρησης, δίνοντας ο καθένας και διαφορετική τιμή. Ο φοιτητής που παρατηρεί από αριστερά την κλίμακα (Σχήμα 1.4α) θα δώσει αποτέλεσμα μεγαλύτερο του πραγματικού, ενώ ο παρατηρητής από τα δεξιά θα δώσει μικρότερη τιμή. Το ίδιο λάθος βέβαια μπορεί να προκύψει από έναν μόνο παρατηρητή που δε γνωρίζει το σωστό τρόπο παρατήρησης των οργάνων μέτρησης (Σχήμα 1.4β).



Σχήμα 1.4 Σφάλμα παράλλαξης (α) κατά τη μέτρηση του μήκους ενός αντικειμένου και (β) της ανάγνωσης της ένδειξης σε έναν ογκομετρικό σωλήνα. Και στις δύο περιπτώσεις, αν η παρατήρηση της ένδειξης δε γίνεται κάθετα, το αποτέλεσμα θα είναι λανθασμένο. Στην περίπτωση (α) ο παρατηρητής Β θα διαβάσει μεγαλύτερη τιμή ενώ ο παρατηρητής Γ μικρότερη από τη σωστή που προκύπτει από τον παρατηρητή Α.

Θα πρέπει λοιπόν η παρατήρηση να γίνεται πάντα κάθετα στην κλίμακα, είτε πρόκειται να διαβάσουμε το αποτέλεσμα της μέτρησης, είτε να θέσουμε κάποια συγκεκριμένη τιμή σε κάποιο όργανο (π.χ. την τάση

τροφοδοσίας μιας πηγής). Σε κάποιες περιπτώσεις για την αποφυγή του σφάλματος παράλλαξης, υπάρχει πάνω στην κλίμακα και πίσω από τη μετακινούμενη βελόνα ένας καθρέπτης που εξασφαλίζει ότι η γωνία παρατήρησης είναι η σωστή εφόσον φυσικά δε φαίνεται το είδωλο της βελόνας πάνω στον καθρέπτη.

Ένα άλλο συστηματικό σφάλμα που εμφανίζεται αρκετά συχνά είτε σε αναλογικά είτε σε ψηφιακά όργανα μέτρησης αφορά στην μη μηδενική ένδειξη του οργάνου για μηδενική τιμή του μετρούμενου μεγέθους. Το σφάλμα αυτό ονομάζεται σφάλμα μετάθεσης του μηδενός και συνήθως είναι αρκετά εύκολο να το εντοπίσουμε και να το αφαιρέσουμε από τη μετρούμενη τιμή. Πολλά όργανα (π.χ. οι ηλεκτρονικοί ζυγοί) έχουν ειδικό διακόπτη για τη διόρθωση του σφάλματος του μηδενός. Η μετάθεση του μηδενός εμφανίζεται για παράδειγμα στα πολύμετρα που μας δίνουν αρκετά συχνά μη μηδενική ένδειξη χωρίς να έχουν συνδεθεί πάνω στο κύκλωμα ή σε όργανα ακριβείας μέτρησης αποστάσεων όπως τα μικρόμετρα (δες Κεφάλαιο 6).

1.6. Ερωτήσεις – Ασκήσεις

1. Η μονάδα μέτρησης του έργου στο Διεθνές Σύστημα μονάδων μέτρησης (SI) είναι το J (Joule) και στο σύστημα CGS, το erg. Υπολογίστε το συντελεστή μετατροπής μεταξύ των δύο μονάδων.
2. Γράψτε τη διαστατική εξίσωση για το μέγεθος της πυκνότητας ($\rho = m/V$) και για το μέγεθος της πίεσης ($P = F/A$) συναρτήσει των βασικών μεγεθών της μηχανικής (μήκος, μάζα και χρόνος).
3. Σε σώμα που εκτελεί πτώση υπό την επίδραση της βαρύτητας, θεωρούμε ότι η αντίσταση από τον αέρα είναι ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας του σώματος ($F_{res} = k \cdot v^2$). Βρείτε τις μονάδες της σταθεράς αναλογίας k στην περίπτωση αυτή.
4. Βρείτε με τη χρήση διαστατικής ανάλυσης, μία έκφραση για την υδροστατική πίεση σε ένα σημείο εντός ρευστού πυκνότητας ρ που βρίσκεται σε δοχείο όγκου V . Θεωρείστε αρχικά ότι η πίεση εξαρτάται από τις ποσότητες ρ , V και g (επιτάχυνση της βαρύτητας).
5. Ο νόμος της βαρυτικής έλξης μεταξύ δύο μαζών m_1 και m_2 που απέχουν απόσταση R αναφέρει ότι η ελκτική δύναμη F που αναπτύσσεται είναι ανάλογη του γινομένου των δύο μαζών και αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης ($F = Gm_1m_2/R^2$). Βρείτε τις διαστάσεις που θα πρέπει να έχει η σταθερά αναλογίας G .

Βιβλιογραφία/Αναφορές

- Τρικαλινός, Χ. (2014). *Εισαγωγή στη θεωρία Σφαλμάτων (σημειώσεις)*. Αθήνα: Εθνικό Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών.
- Formasini, P. (2008). *The Uncertainty in Physical Measurements – An Introduction to Data Analysis in the Physics Laboratory*. New York: Springer.
- ISO VIM (2004). *International Vocabulary of Basic and General Terms in Metrology (3rd Ed.)*. DGIUDE 99999. Ανακτήθηκε 2 Ιουνίου, 2013, από <http://www.bipm.org/en/publications/guides/vim.html>
- Loyd, D. H. (2008). *Physics Laboratory Manual (3rd Ed.)*. USA: Thomson Brooks/Cole.
- Taylor, B. N. & Thompson, A. (editors) (2008). *The International System of Units (SI)*. Washington: NIST Special Publication 330.
- Taylor, J. R. (1997). *An Introduction to Error Analysis – The Study of Uncertainties in Physical Measurements (2nd Ed.)*. California: University Science Books.

Κεφάλαιο 2 – Όργανα μετρήσεων

Σύνοψη

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται βασικές έννοιες των οργάνων μέτρησης και της μετρολογίας γενικότερα, ώστε ο φοιτητής να αποκτήσει τις απαραίτητες εισαγωγικές γνώσεις και να εξοικειωθεί με τη σχετική ορολογία των οργάνων και συστημάτων μέτρησης τα οποία θα κληθεί να χρησιμοποιήσει στο εργαστήριο. Παρουσιάζεται η δομή των μετρητικών διατάξεων και γίνεται η ταξινόμηση τους με διάφορα κριτήρια. Περιγράφονται τα βασικά στατικά χαρακτηριστικά λειτουργίας των οργάνων μέτρησης καθώς και η συμπεριφορά τους σε χρονικά μεταβαλλόμενα μετρούμενα μεγέθη (δυναμικός χαρακτηρισμός). Οι γνώσεις του κεφαλαίου αυτού κρίνονται σημαντικές για την κατανόηση της οργανολογίας που χρησιμοποιείται στα εργαστηριακά πειράματα φυσικής και αποτελούν μία εισαγωγή σε έννοιες που είναι ιδιαίτερα χρήσιμες σε φοιτητές τεχνολογικής κατεύθυνσης.

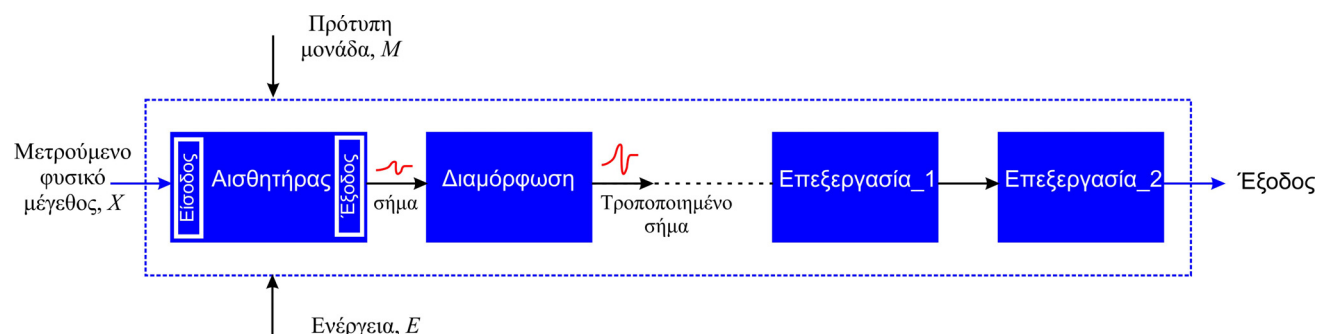
Προαπαιτούμενη γνώση

Κεφάλαιο 1.5, εισαγωγικές έννοιες διαφορικού λογισμού.

2.1. Όργανα μέτρησης και μετρητικές διατάξεις

Η μέτρηση ενός φυσικού μεγέθους πραγματοποιείται με τη χρήση των οργάνων μέτρησης. Όργανα μέτρησης όπως ο χάρακας, η ζυγαριά, το χρονόμετρο, εμφανίζονται στην καθημερινότητά μας για τη μέτρηση απλών φυσικών μεγεθών ενώ η χρήση τους είναι απαραίτητη μέσα σε εργαστήρια για εκπαιδευτικές και ερευνητικές δραστηριότητες. Δε θα πρέπει ωστόσο να αντιμετωπίζουμε τα όργανα μέτρησης σαν ένα μαύρο κουτί που μας παρέχει μία πληροφορία για το μέγεθος που θέλουμε να μετρήσουμε. Προκειμένου οι μετρήσεις που πραγματοποιούμε να είναι σωστές ή να μπορούμε να κρίνουμε για την ορθότητα τους, θα πρέπει να έχουμε γνώση του τρόπου με τον οποίο τα όργανα βαθμονομούνται και χρησιμοποιούνται για να παρέχουν ορθές ενδείξεις. Γι αυτόν το λόγο, στις ενότητες που ακολουθούν γίνεται μία γενική περιγραφή των βασικών χαρακτηριστικών περιγραφής και λειτουργίας των οργάνων μέτρησης, ώστε ο χρήστης τους να είναι σε θέση να μπορεί να «αποκωδικοποιεί» τα διαφορετικά χαρακτηριστικά τους και να τα χρησιμοποιεί με το βέλτιστο δυνατό τρόπο κατά τη λήψη των μετρήσεων στο εργαστήριο.

Η αλματώδη ανάπτυξη της τεχνολογίας και η απαίτηση για ακριβείς μετρήσεις έχει οδηγήσει αναπόφευκτα στην δομική πολυπλοκότητα των οργάνων μέτρησης έτσι ώστε να μιλάμε πλέον για συστήματα μέτρησης τα οποία αποτελούνται από ένα σύνολο οργάνων και συσκευών κατάλληλα διασυνδεδεμένων μεταξύ τους, ώστε να μπορούν να μετρήσουν ένα ή περισσότερα φυσικά μεγέθη (Καλοβρέκτης και Κατέβας, 2014). Η δομή μιας μετρητικής διάταξης απεικονίζεται στο Σχήμα 2.1. Μπορούμε να θεωρήσουμε μία μετρητική διάταξη ως μία αλυσίδα διάφορων λειτουργικών στοιχείων, κάθε ένα από τα οποία επιτελεί και διαφορετικό ρόλο. Η καρδιά της διάταξης αποτελείται από τον αισθητήρα (sensor) ο οποίος χρησιμοποιείται για την ανίχνευση και τη μέτρηση της τιμής X ενός φυσικού μεγέθους στην είσοδο του.



Σχήμα 2.1 Δομή μιας μετρητικής διάταξης σε μορφή αλυσίδας διαφορετικών λειτουργικών στοιχείων.

Σε πολλές περιπτώσεις το αρχικό ερέθισμα που δέχεται ο αισθητήρας μετατρέπεται στην έξοδο του σε ένα ηλεκτρικό σήμα. Το σήμα αυτό συνήθως είναι πολύ ασθενές και χρειάζεται κατάλληλη τροποποίηση, ώστε να ενισχυθεί και να απομακρυνθεί ο ηλεκτρικός θόρυβος που είναι αναπόφευκτος. Η ενίσχυση και το φιλτράρισμα του θορύβου του ηλεκτρικού σήματος στην έξοδο ενός αισθητήρα επιτυγχάνονται από κατάλληλα ηλεκτρονικά κυκλώματα. Το τροποποιημένο σήμα στη συνέχεια υφίσταται επεξεργασία σε διαφορετικά στάδια, όπως φιλτράρισμα ανεπιθύμητων συνιστωσών, φασματική ανάλυση, ψηφιοποίηση, στατιστική επεξεργασία, κ.ά. Στο τελικό ή σε ενδιάμεσο στάδιο, οι μετρήσεις που λαμβάνονται μπορεί να αποθηκεύονται μέσω συσκευής διασύνδεσης σε ηλεκτρονικό υπολογιστή, ώστε να είναι διαθέσιμες ανά πάσα στιγμή στο χρήστη για απεικόνιση και περαιτέρω ανάλυσή τους. Στην απλούστερη περίπτωση μπορεί να υπάρχει ένα σύστημα στιγμιαίας απεικόνισης των μετρήσεων ή καταγραφής τους σε κάποιο αποθηκευτικό μέσο. Η μετρητική διάταξη θα πρέπει να τροφοδοτηθεί με ενέργεια για τα διαφορετικά στάδια της λειτουργίας της.

Σημαντική διαδικασία στη λειτουργία του οργάνου αποτελεί η αντιστοίχιση των ερεθισμάτων που δέχεται ο αισθητήρας από το μετρούμενο φυσικό μέγεθος σε ενδείξεις κατάλληλων μονάδων πάνω στην κλίμακα του οργάνου, λόγω της μεταβολής ενός άλλου γνωστού φυσικού μεγέθους με καλά καθορισμένο τρόπο. Για παράδειγμα, σε ένα υδραργυρικό θερμομέτρο οποιαδήποτε αλλαγή της θερμοκρασίας επιφέρει μεταβολή του ύψους της στήλης του υδραργύρου στο εσωτερικό του γυάλινου σωλήνα, λόγω της θερμικής διαστολής ή συστολής του υδραργύρου, δεδομένου ότι η διαστολή του γυάλινου σωλήνα θεωρείται αμελητέα συγκριτικά με αυτή του υδραργύρου. Η αυξομείωση του ύψους της στήλης έχει αντιστοιχηθεί σε μία διαβαθμισμένη κλίμακα με αριθμούς, οπότε λαμβάνουμε κατευθείαν τις ενδείξεις του μεγέθους που θέλουμε, δηλαδή της θερμοκρασίας, στις κατάλληλες μονάδες μέτρησης. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται βαθμονόμηση του οργάνου και πραγματοποιείται συνήθως από τον κατασκευαστή. Σε διαφορετική περίπτωση, μας παρέχεται η κατάλληλη πληροφορία ώστε να μπορούμε να πραγματοποιήσουμε μόνοι μας τη διαδικασία της βαθμονόμησης. Προφανώς, ένα όργανο που δεν είναι βαθμονομημένο σωστά ή η βαθμονόμηση του έχει αλλοιωθεί, δεν μας παρέχει σωστές ενδείξεις, παρόλο που το φυσικό μέγεθος που αντιλαμβάνεται ο αισθητήρας ανταποκρίνεται με σωστό τρόπο στις μεταβολές των ερεθισμάτων, δηλαδή των μεταβολών του μετρούμενου φυσικού μεγέθους.

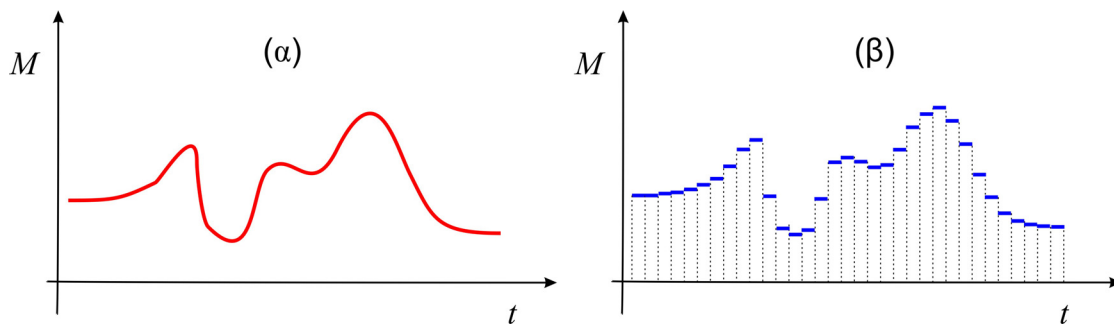
Στο σημείο αυτό θα πρέπει να αναφέρουμε ότι η διαδικασία της βαθμονόμησης δε θα πρέπει να συγχέεται με τη διαδικασία της διακρίβωσης (calibration), δηλαδή της σύγκρισης μεταξύ του οργάνου μέτρησης που διαθέτουμε με ένα άλλο πρότυπο όργανο μέτρησης γνωστής ακρίβειας, προκειμένου να επαναφέρουμε με κατάλληλες ρυθμίσεις την ακρίβεια του υπό έλεγχο οργάνου (Μαθιουλάκης, 2004). Η διαδικασία αυτή σε ακριβή κυρίως όργανα μέτρησης πραγματοποιείται από τον κατασκευαστή του οργάνου ο οποίος μας παρέχει κατάλληλο πιστοποιητικό διακρίβωσης για συγκεκριμένη χρονική διάρκεια λειτουργίας του. Η φυσιολογική φθορά του οργάνου λόγω της χρησιμοποίησής του, που οφείλεται στη γήρανση των υλικών κατασκευής του, αλλά και η ενδεχομένως κακή χρήση που μπορεί να γίνεται, επιβάλλουν η διαδικασία της διακρίβωσης να επαναλαμβάνεται ανά τακτικά χρονικά διαστήματα.

2.2. Ταξινομήσεις των οργάνων μέτρησης

Τα όργανα μέτρησης σε σχέση με τον τρόπο της λειτουργίας τους ταξινομούνται με διαφορετικούς τρόπους όπως παρουσιάζεται στη συνέχεια (Μαθιουλάκης, 2004 · Formasini, 2008).

2.2.1. Αναλογικά και ψηφιακά όργανα μέτρησης

Ανάλογα με το σήμα που παρέχουν στην έξοδο τους, τα μετρητικά όργανα μπορεί να είναι αναλογικής ή ψηφιακής εξόδου. Στα αναλογικά όργανα, το σήμα στην έξοδο τους είναι αναλογικό, δηλαδή μπορεί να μεταβάλλεται με συνεχή τρόπο λαμβάνοντας οποιαδήποτε τιμή από το εύρος τιμών λειτουργίας του (Σχήμα 2.2α). Στα ψηφιακά όργανα μέτρησης, η είσοδος μετασχηματίζεται σε μία ψηφιακή ένδειξη, δηλαδή παίρνει διακριτές τιμές ώστε να μπορεί να αποθηκευτεί σε ηλεκτρονικό υπολογιστή (Σχήμα 2.2β). Η μετατροπή του αναλογικού σήματος εισόδου σε ψηφιακή μορφή στην έξοδο (ψηφιοποίηση) επιτυγχάνεται με κατάλληλα ηλεκτρονικά κυκλώματα, τους μετατροπείς αναλογικού σήματος σε ψηφιακό (Analog to Digital Converter, ADC).



Σχήμα 2.2 (α) Η έξοδος M ενός αναλογικού οργάνου μέτρησης συναρτήσει του χρόνου (β) Το ίδιο σήμα αλλά σε ψηφιακή μορφή. Το αναλογικό σήμα είναι συνεχές ως προς το χρόνο ενώ το ψηφιακό λαμβάνει διακριτές τιμές.

2.2.2. Παθητικά και ενεργητικά όργανα μέτρησης

Στα παθητικά όργανα μέτρησης, η απαιτούμενη ενέργεια για τη λειτουργία του οργάνου δεν προέρχεται από κάποια εξωτερική πηγή αλλά από το ίδιο το σύστημα που πραγματοποιεί τη μέτρηση. Αντίθετα, στα ενεργητικά όργανα μέτρησης απαιτείται εξωτερική πηγή ενέργειας (π.χ. μπαταρία), προκειμένου να μπορέσουν αυτά να λειτουργήσουν.

Για παράδειγμα, κατά τη μέτρηση της θερμοκρασίας με ένα υδραργυρικό θερμόμετρο δεν απαιτείται παροχή ενέργειας για τη λήψη της μέτρησης, οπότε το υδραργυρικό θερμόμετρο είναι ένα παθητικό όργανο μέτρησης, αφού η ένδειξη του παρέχεται κατευθείαν από την επίδραση της μεταβολής της θερμοκρασίας στη θερμική διαστολή της στήλης υδραργύρου στο εσωτερικό ενός γυάλινου σωλήνα. Αντιθέτως, σε ένα ενεργητικό όργανο μέτρησης όπως ένα θερμόμετρο αντιστάσεως, προκειμένου η αλλαγή της ηλεκτρικής αντίστασης να μετατραπεί σε ένδειξη θερμοκρασίας, είναι απαραίτητη η χρήση κατάλληλου τροφοδοτούμενου ηλεκτρικού κυκλώματος.

2.2.3. Όργανα μηδενισμού και απόκλισης

Στα όργανα απόκλισης, ένας δείκτης (συνήθως βελόνα) αποκλίνει πάνω σε μία κατάλληλη βαθμονομημένη κλίμακα, όπου και λαμβάνεται η μέτρηση του μεγέθους. Ένα υδραργυρικό θερμόμετρο μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι όργανο απόκλισης. Στα όργανα μηδενισμού, προσπαθούμε να επιτύχουμε την αντιστάθμιση του άγνωστου μετρούμενου μεγέθους με την κατάλληλη εφαρμογή μιας ομοειδούς γνωστής επίδρασης. Για παράδειγμα, σε έναν μηχανικό ζυγό ισορροπίας η μετρούμενη ένδειξη λαμβάνεται όταν επιτύχουμε την αντιστάθμιση του άγνωστου βάρους (μάζας) με την εφαρμογή κατάλληλων αντίβαρων (σταθμά) στην άλλη πλευρά του ζυγού. Η μέτρηση της ηλεκτρικής αντίστασης με γέφυρα Wheatstone σε ισορροπία είναι ένα άλλο παράδειγμα που χρησιμοποιείται ευρέως σε όργανα μηδενισμού (Βλ. Κεφ. 8.4.1.2. για τους αισθητήρες μέτρησης μηχανικής τάσης). Γενικά, τα όργανα μηδενισμού είναι ορθότερα στις μετρήσεις τους αλλά συνήθως ακριβότερα σε σχέση με τα όργανα απόκλισης.

2.2.4. Όργανα απεικόνισης ή καταγραφής

Στα όργανα απεικόνισης, η έξοδος του οργάνου είναι διαθέσιμη στον παρατηρητή μόνον κατά τη διάρκεια της μέτρησης. Για παράδειγμα, στο υδραργυρικό θερμόμετρο, η ένδειξη της θερμοκρασίας θα πρέπει να λαμβάνεται από τον παρατηρητή την κατάλληλη χρονική στιγμή, γεγονός που απαιτεί την παρουσία του στις μετρήσεις. Αντιθέτως, στα όργανα καταγραφής η ένδειξη (έξοδος) του οργάνου μπορεί να αποθηκεύεται ή να καταγράφεται σε αναλογική ή ψηφιακή μορφή σε κατάλληλα μέσα, όπως το καταγραφικό χαρτί ή οι μαγνητικοί δίσκοι αποθήκευσης. Στην περίπτωση αυτή, δεν είναι πάντα απαραίτητη η παρουσία του παρατηρητή, ειδικά όταν πρέπει να λαμβάνονται μετρήσεις για μεγάλα χρονικά διαστήματα.

2.3. Στατικός χαρακτηρισμός των οργάνων μέτρησης

Ήδη στο 1^ο κεφάλαιο αναφερθήκαμε σε κάποια χαρακτηριστικά των οργάνων μέτρησης, όπως η διακριτική ικανότητα και η ακρίβεια τα οποία σχετίζονται με τα σφάλματα που υπεισέρχονται στη διαδικασία λήψης των μετρήσεων. Γενικά, υπάρχουν διάφορα τεχνικά χαρακτηριστικά των οργάνων μέτρησης τα οποία μετρούν ένα οποιοδήποτε φυσικό μέγεθος που παραμένει αμετάβλητο με το χρόνο και ονομάζονται στατικά χαρακτηριστικά. Τα χαρακτηριστικά αυτά περιγράφονται αναλυτικότερα στη συνέχεια.

2.3.1. Ορθότητα

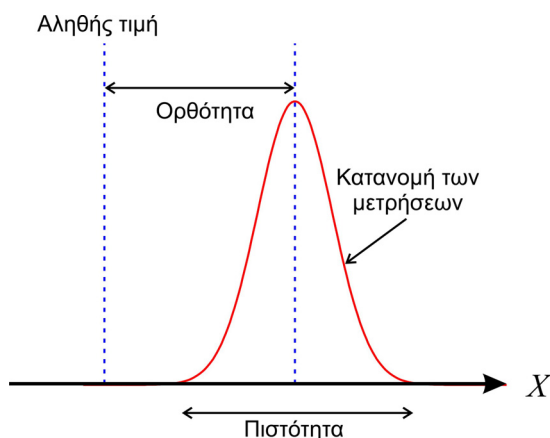
Η ορθότητα (accuracy) εκφράζει τη μέγιστη απόκλιση της μετρούμενης τιμής του οργάνου από την άγνωστη αληθινή τιμή του. Ορίζεται συνήθως ως επί τοις εκατό ποσοστό της πλήρους κλίμακας του οργάνου (full scale ή fs). Έτσι, ένα μανόμετρο που μετράει πιέσεις στην περιοχή 0 – 10 atm και έχει ορθότητα 1% fs, θα παρουσιάζει μέγιστο σφάλμα 0.1 atm για οποιαδήποτε μετρούμενη τιμή. Αυτό σημαίνει ότι μία ένδειξη 1 atm θα έχει σφάλμα 10% ενώ μία ένδειξη 5 atm θα έχει σφάλμα μέτρησης 2%.

Εναλλακτικά, η ορθότητα ενός οργάνου μπορεί να εκφράζεται συναρτήσει των μονάδων του μετρούμενου μεγέθους. Για παράδειγμα, σε ένα θερμομέτρο που έχει ορθότητα $\pm 0.1^{\circ}\text{C}$, κάθε μέτρηση του σε όλο το εύρος των μετρούμενων τιμών του οργάνου θα συνοδεύεται από αυτή τη μέγιστη απόκλιση.

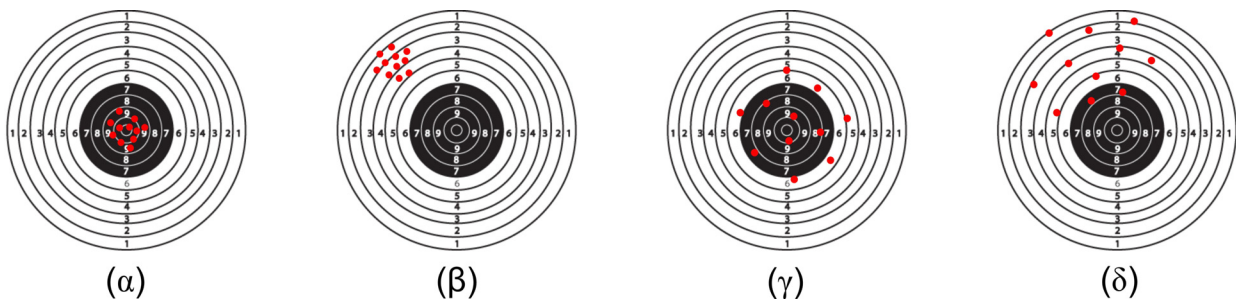
2.3.2. Πιστότητα

Η πιστότητα (precision) ή ακρίβεια όπως τη συναντούμε ως έννοια αρκετά συχνά, περιγράφει ποιοτικά τη διασπορά των αποτελεσμάτων (ενδείξεων) ενός οργάνου μέτρησης κάποιου σταθερού φυσικού μεγέθους. Επομένως, ένα όργανο υψηλής πιστότητας θα παρουσιάζει μικρότερη διασπορά στις ενδείξεις του σε αντίθεση με ένα άλλο όργανο που παρουσιάζει χαμηλή πιστότητα.

Η έννοια της ορθότητας είναι διαφορετική από την έννοια της πιστότητας και σε καμία περίπτωση υψηλή ορθότητα μετρήσεων δε συνεπάγεται και υψηλή πιστότητα ή το αντίθετο. Η ορθότητα σχετίζεται με τα συστηματικά σφάλματα που μπορεί να υπάρχουν στη μέτρηση ενός φυσικού μεγέθους, ενώ η πιστότητα σχετίζεται με τα αναπόφευκτα τυχαία σφάλματα των μετρήσεων ενός οργάνου. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι εφόσον μπορούμε να εξαλείψουμε ή τουλάχιστον να ελαχιστοποιήσουμε τα συστηματικά σφάλματα στις μετρήσεις ενός μεγέθους, μπορούμε να βελτιώσουμε την ορθότητα των μετρήσεων μας. Το τελευταίο επιτυγχάνεται με τη διαδικασία της διακρίβωσης που αναφέραμε στην προηγούμενη ενότητα. Αντίθετα, η πιστότητα είναι μία εγγενής ιδιότητα του συγκεκριμένου οργάνου μέτρησης που χρησιμοποιούμε και δεν μπορούμε να τη βελτιώσουμε. Αν θέλουμε επομένως μετρήσεις υψηλότερης πιστότητας, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ένα άλλο όργανο μέτρησης του ίδιου φυσικού μεγέθους που μας παρέχει αυτήν τη δυνατότητα. Σχηματικά, η διαφορά μεταξύ ορθότητας και πιστότητας απεικονίζεται στα Σχήματα 2.3 και 2.4.



Σχήμα 2.3 Σχηματική απεικόνιση της διαφοράς μεταξύ ορθότητας και πιστότητας. Η ορθότητα εκφράζει τη διαφορά μιας μετρούμενης τιμής από την αληθινή (άγνωστη) τιμή της μέτρησης. Όσο πιο μεγάλη αυτή η διαφορά, τόσο μικρότερη είναι η ορθότητα της μέτρησης. Η πιστότητα σχετίζεται με τη διασπορά των μετρούμενων τιμών ενός σταθερού φυσικού μεγέθους X. Μικρή διασπορά τιμών συνεπάγεται υψηλή πιστότητα του οργάνου μέτρησης.



Σχήμα 2.4 Διαφορετικές περιπτώσεις που απεικονίζουν σχηματικά την πιστότητα και την ορθότητα ενός οργάνου μέτρησης. Οι βολές στους στόχους απεικονίζουν τα αποτελέσματα των μετρήσεων με την ορθή μέτρηση να αντιστοιχεί στο κέντρο του στόχου. Όσο μεγαλύτερη είναι η διασπορά των μετρήσεων, τόσο χαμηλότερη είναι η πιστότητα του οργάνου. (α) Μετρήσεις ορθές υψηλής πιστότητας, (β) μη ορθές μετρήσεις υψηλής πιστότητας, (γ) μετρήσεις ορθές αλλά χαμηλής πιστότητας, (δ) μη ορθές μετρήσεις, χαμηλής πιστότητας.

2.3.3. Επαναληψιμότητα και αναπαραγωγιμότητα

Η επαναληψιμότητα (repeatability) και η αναπαραγωγιμότητα (reproducibility) αποτελούν δύο διαφορετικές συνιστώσες της πιστότητας των μετρήσεων οι οποίες εκφράζονται ποσοτικά αλλά διαφέρουν στις συνθήκες που λαμβάνονται οι μετρήσεις (ISO VIM, 2004).

Η επαναληψιμότητα περιγράφει το βαθμό συμφωνίας μεταξύ των αποτελεσμάτων διαδοχικών μετρήσεων του ίδιου φυσικού μεγέθους που πραγματοποιούνται υπό τις ίδιες συνθήκες μέτρησης οι οποίες ονομάζονται συνθήκες επαναληψιμότητας. Οι συνθήκες μέτρησης του μεγέθους αφορούν την ίδια διαδικασία μέτρησης, με το ίδιο όργανο μέτρησης, στην ίδια τοποθεσία και με τον ίδιο παρατηρητή. Επίσης, οι επαναλαμβανόμενες μετρήσεις εκτελούνται μέσα σε μικρό χρονικό διάστημα, ώστε να παραμένουν οι ίδιες εξωτερικές συνθήκες.

Η αναπαραγωγιμότητα περιγράφει το βαθμό συμφωνίας μεταξύ των αποτελεσμάτων διαδοχικών μετρήσεων του ίδιου φυσικού μεγέθους, που πραγματοποιούνται ωστόσο υπό διαφορετικές συνθήκες. Οι διαφορετικές συνθήκες μπορούν να περιλαμβάνουν διαφορετική διαδικασία και όργανα μέτρησης, διαφορετικό πειραματιστή, διαφορετικό πρότυπο αναφοράς, διαφορετική τοποθεσία και χρόνο που εκτελούνται οι μετρήσεις.

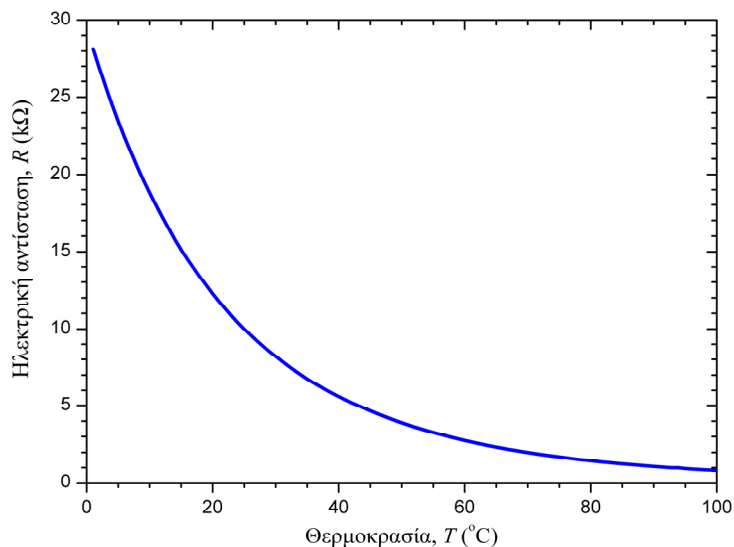
2.3.4. Εύρος τιμών

Το εύρος (range ή span) ενός οργάνου μέτρησης ισούται με την απόσταση μεταξύ της ελάχιστης και της μέγιστης τιμής που μπορεί να μετρήσει το συγκεκριμένο όργανο, μέσα στα πλαίσια των προδιαγραφών που θέτει ο κατασκευαστής. Σε πολλές περιπτώσεις, ένα όργανο μέτρησης διαθέτει παραπάνω από ένα διαστήματα μετρούμενων τιμών που μπορεί να επιλέξει ο χρήστης, με διαφορετικά χαρακτηριστικά στο κάθε διάστημα. Ένα θερμόμετρο του οποίου η κλίμακα έχει διαγράμμιση από $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$ έως $+110\text{ }^{\circ}\text{C}$, έχει εύρος $130\text{ }^{\circ}\text{C}$.

2.3.5. Γραμμικότητα

Ένα όργανο μέτρησης ονομάζεται γραμμικό όταν η μεταβολή των ενδείξεών του στην έξοδο είναι γραμμική ως προς τη μεταβολή του μετρούμενου μεγέθους στην είσοδό του. Αυτό σημαίνει ότι αν διπλασιαστεί το μετρούμενο μέγεθος στην είσοδο του οργάνου, θα διπλασιαστεί και η ένδειξη του στην έξοδο. Η γραμμικότητα των οργάνων είναι επιθυμητή παρόλο που αυτό δεν είναι πάντα εφικτό. Το υδραργυρικό θερμόμετρο συμπεριφέρεται σε καλή προσέγγιση με γραμμικό τρόπο, αφού ο συντελεστής γραμμικής διαστολής του υδραργύρου που βρίσκεται εντός της γυάλινης στήλης παραμένει σταθερός στο εύρος των μετρούμενων θερμοκρασιών και το ύψος της στήλης αυξάνεται γραμμικά με τη θερμοκρασία. Αντίθετα, ένα θερμόμετρο ημιαγωγού (thermistor) είναι μη γραμμικό όργανο μέτρησης. Στην περίπτωση αυτή, η αλλαγή της

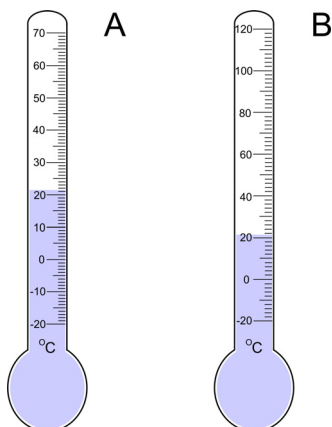
θερμοκρασίας μεταβάλλει την ηλεκτρική αντίσταση του υλικού του thermistor αλλά με μη γραμμικό τρόπο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.5.



Σχήμα 2.5 Η μεταβολή της ηλεκτρικής αντίστασης ενός NTC thermistor συναρτήσει της θερμοκρασίας του αποτελεί ένα παράδειγμα μη γραμμικού οργάνου μέτρησης.

2.3.6. Ευαισθησία

Ως ευαισθησία ενός οργάνου μέτρησης ορίζεται ο λόγος των μεταβολών των τιμών στην έξοδο του οργάνου προς τις αντίστοιχες τιμές της εισόδου. Σε όργανα μέτρησης που εμφανίζουν γραμμικότητα, η ευαισθησία ισούται με την κλίση σε ένα γράφημα μεταβολής της εξόδου ως προς την είσοδο και προφανώς παραμένει σταθερή σε όλο το εύρος των μετρούμενων τιμών. Αν το όργανο δεν είναι γραμμικό, θα παρουσιάζει μεταβαλλόμενη ευαισθησία, ανάλογα με την περιοχή τιμών που μετράει.



Σχήμα 2.6 Δύο υδραργυρικά θερμοόμετρα με διαφορετική ευαισθησία (προσέξτε τη μεγαλύτερη διακριτική ικανότητα στην κλίμακα του θερμομέτρου A).

Σε ένα υδραργυρικό θερμοόμετρο, οι αλλαγές στη θερμοκρασία που αποτελούν το σήμα εισόδου, αυξομειώνουν το ύψος της στήλης υδραργύρου στο γυάλινο σωλήνα, που αντιστοιχεί σε κατάλληλη ένδειξη στην αντίστοιχη κλίμακα. Τα θερμοόμετρα A και B του Σχήματος 2.6 παρουσιάζουν διαφορετική ευαισθησία

αφού για την ίδια αύξηση της θερμοκρασίας, η στήλη του υδραργύρου θα ανέβει περισσότερο στο Α από ότι στο Β θερμόμετρο. Και στις δύο περιπτώσεις ωστόσο, η ευαισθησία είναι σταθερή αφού τα δύο θερμόμετρα θεωρούνται γραμμικά όργανα μέτρησης. Αντίθετα, για το θερμόμετρο ημιαγωγού (thermistor) του Σχήματος 2.5, η ευαισθησία μεταβάλλεται συνεχώς, από $1172.5 \Omega/^{\circ}\text{C}$ στους 0°C , σε $26.7 \Omega/^{\circ}\text{C}$ κοντά στους 100°C .

2.3.7. Μετατόπιση και ολίσθηση

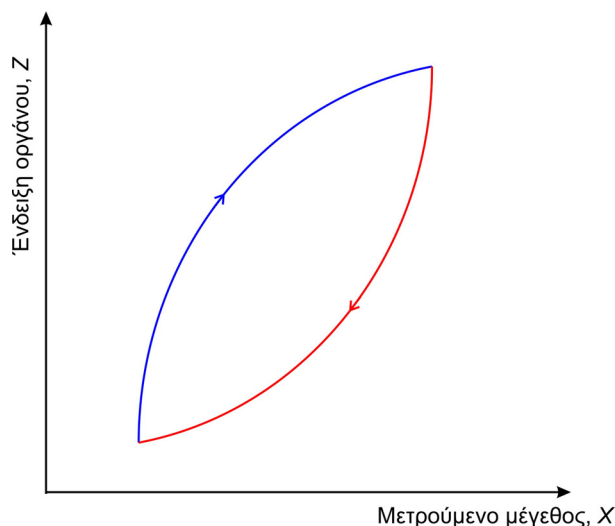
Η μετατόπιση (bias) ενός οργάνου μέτρησης αφορά στο συστηματικό σφάλμα που αυτό παρουσιάζει σε όλο το εύρος των μετρήσεών του. Χαρακτηριστική περίπτωση αποτελεί η μετάθεση του μηδενός σε βολτόμετρα ή σε μηχανικούς ζυγούς για μηδενικό σήμα εισόδου. Συνήθως, μπορεί να διορθωθεί με τη διαδικασία της διακρίβωσης.

Τα τεχνικά χαρακτηριστικά ενός οργάνου μέτρησης παρέχονται από τον κατασκευαστή και αφορούν σε συγκεκριμένο εύρος τιμών των εξωτερικών συνθηκών όπως η πίεση, η θερμοκρασία, η υγρασία, το υψόμετρο, η επιτάχυνση λόγω ταλαντώσεων. Η ολίσθηση (drift) περιγράφει την τάση ενός οργάνου μέτρησης να μεταβάλλει τα χαρακτηριστικά του με το χρόνο, λόγω της επίδρασης των διαφορετικών περιβαλλοντικών συνθηκών και κυρίως της θερμοκρασίας. Δε διορθώνεται εύκολα όπως η μετατόπιση αλλά μπορεί να συνυπολογιστεί στην αβεβαιότητα της μέτρησης.

2.3.8. Υστέρηση

Η υστέρηση (hysteresis) χαρακτηρίζει τα όργανα μέτρησης στα οποία η έξοδός τους (ένδειξη) διαφέρει ανάλογα με την κατεύθυνση μεταβολής του φυσικού μεγέθους στην είσοδό τους. Κύριο παράγοντα εμφάνισης υστέρησης στα όργανα μέτρησης αποτελούν τα διάφορα κινητά μέρη (ρουλεμάν, γρανάζια, ελατήρια, κ.ά.) στα οποία δημιουργούνται τριβές και παραμένουσες τάσεις, με αποτέλεσμα η μετρητική ιστορία του οργάνου να επηρεάζει τις νέες μετρήσεις. Χαρακτηριστικό της ύπαρξης υστέρησης σε ένα όργανο είναι η εμφάνιση ενός κλειστού βρόγχου στο διάγραμμα μεταβολής της εξόδου με την είσοδο, όταν το μετρούμενο μέγεθος αυξάνεται και στη συνέχεια ελαττώνεται (Σχήμα 2.7).

Για παράδειγμα, ένας ζυγός με εύρος 120 kg χρησιμοποιείται για τη ζύγιση ενός σώματος μάζας 80 kg . Στη συνέχεια αφαιρείται το σώμα αυτό και αντικαθιστάται από ένα άλλο της ίδιας μάζας. Η νέα ένδειξη μπορεί να είναι λίγο μικρότερη (79 kg) λόγω της εμφάνισης παραμένουσας τάσης στα στοιχεία του ζυγού.



Σχήμα 2.7 Βρόγχος υστέρησης στο γράφημα της μεταβολής της εξόδου (ένδειξης) με την είσοδο (μετρούμενο μέγεθος) του οργάνου μέτρησης.

2.4. Δυναμικός χαρακτηρισμός των οργάνων μέτρησης

Πολλές φορές θέλουμε να μετρήσουμε με ένα όργανο μέτρησης ένα μέγεθος το οποίο δεν παραμένει σταθερό αλλά είναι χρονικά μεταβαλλόμενο. Τότε έχει μεγάλη σημασία η χρονική στιγμή στην οποία θα πραγματοποιήσουμε τη μέτρηση, γιατί η απόκριση του κάθε οργάνου μέτρησης σε χρονικά μεταβαλλόμενα μετρούμενα μεγέθη δεν είναι πάντα η ίδια. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η μέτρηση της θερμοκρασίας με ένα υδραργυρικό θερμομέτρο. Έστω ότι αρχικά το θερμομέτρο βρίσκεται στο περιβάλλον του εργαστηρίου θερμοκρασίας 22 °C και στη συνέχεια τοποθετείται σε δοχείο με ζεστό νερό θερμοκρασίας 70 °C. Η μεταβολή αυτή της θερμοκρασίας ονομάζεται βηματική και εμφανίζεται κατά τη μέτρηση διαφόρων φυσικών μεγεθών. Παρατηρούμε ότι απαιτείται κάποιος χρόνος για να ανταποκριθεί το θερμομέτρο στη μεταβολή της θερμοκρασίας και να μεγιστοποιηθεί το ύψος της στήλης του υδραργύρου. Έτσι, εάν η μέτρηση ληφθεί αμέσως μόλις τοποθετήσουμε το θερμομέτρο στο ζεστό νερό είναι σίγουρο ότι το σφάλμα που θα κάνουμε θα είναι μεγάλο. Θα πρέπει επομένως να περιμένουμε ένα εύλογο χρονικό διάστημα ώστε η ένδειξη του θερμομέτρου να έχει σταθεροποιηθεί και το σφάλμα να είναι αμελητέο. Στην περίπτωση λοιπόν που έχουμε ένα χρονικά μεταβαλλόμενο φυσικό μέγεθος, η μέτρηση του απαιτεί κατάλληλο όργανο που μπορεί να παρακολουθεί τις μεταβολές του μετρούμενου μεγέθους με την κατάλληλη ταχύτητα. Μας ενδιαφέρει όπως λέμε, η δυναμική απόκριση των οργάνων μέτρησης, ο τρόπος δηλαδή που μεταβάλλεται ως προς το χρόνο η ένδειξη $Z(t)$ του οργάνου, εξαιτίας της μεταβολής του μετρούμενου μεγέθους $X(t)$ στην είσοδο του.

Γενικά, το μαθηματικό μοντέλο περιγραφής πολλών οργάνων μέτρησης εκφράζεται από μία διαφορική γραμμική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές, που έχει την ακόλουθη μορφή

$$\alpha_n \frac{d^n Z(t)}{dt^n} + \alpha_{n-1} \frac{d^{n-1} Z(t)}{dt^{n-1}} + \dots + \alpha_1 \frac{dZ}{dt} + \alpha_0 Z(t) = b_0 X(t) \quad (2.1)$$

όπου οι ποσότητες $X(t)$ και $Z(t)$ περιγράφουν το μετρούμενο μέγεθος (είσοδος) και την ένδειξη του οργάνου (έξοδος), αντίστοιχα. Η τάξη n της διαφορικής εξίσωσης περιγράφει την τάξη του οργάνου μέτρησης. Έτσι, στην απλούστερη των περιπτώσεων, τα όργανα μέτρησης μηδενικής τάξης θα προκύψουν από την εξίσωση 2.1 για $n=0$, δηλαδή

$$\alpha_0 Z(t) = b_0 X(t)$$

ή

$$Z(t) = \frac{b_0}{\alpha_0} X(t) \quad (2.2)$$

όπου η σταθερά b_0/α_0 αντιστοιχεί στην ευαισθησία του οργάνου μέτρησης, όπως αυτή ορίστηκε προηγουμένως. Σύμφωνα με την εξίσωση 2.2, η απόκριση του οργάνου είναι στιγμιαία και δεν εξαρτάται από την ταχύτητα μεταβολής του μετρούμενου μεγέθους $X(t)$ στην είσοδο του. Τα όργανα μέτρησης μηδενικής τάξης αποτελούν μία καλή προσέγγιση για την περίπτωση οργάνων που αποκρίνονται γρήγορα, συγκριτικά με το χρονικά μεταβαλλόμενο μετρούμενο μέγεθος.

Στα όργανα μέτρησης πρώτης τάξης ($n=1$) η εξίσωση 2.1 θα πάρει τη μορφή

$$\alpha_1 \frac{dZ(t)}{dt} + \alpha_0 Z(t) = b_0 X(t) \quad (2.3)$$

Η παρουσία του όρου $\alpha_1 (dZ(t)/dt)$ στην παραπάνω εξίσωση υποδηλώνει ότι η ένδειξη του οργάνου δε μπορεί να ακολουθεί ακαριαία τις μεταβολές του μετρούμενου μεγέθους.

Ένα παράδειγμα οργάνου μέτρησης πρώτης τάξης αποτελεί το υδραργυρικό θερμομέτρο. Αν T_{in} και T_{out} είναι η θερμοκρασία εισόδου και η ένδειξη του θερμομέτρου αντίστοιχα, αποδεικνύεται ότι η σχέση μεταξύ εισόδου και εξόδου δίνεται από την ακόλουθη διαφορική εξίσωση

$$C \frac{dT_{out}(t)}{dt} + k \frac{S}{d} T_{out}(t) = k \frac{S}{d} T_{in}(t) \quad (2.4)$$

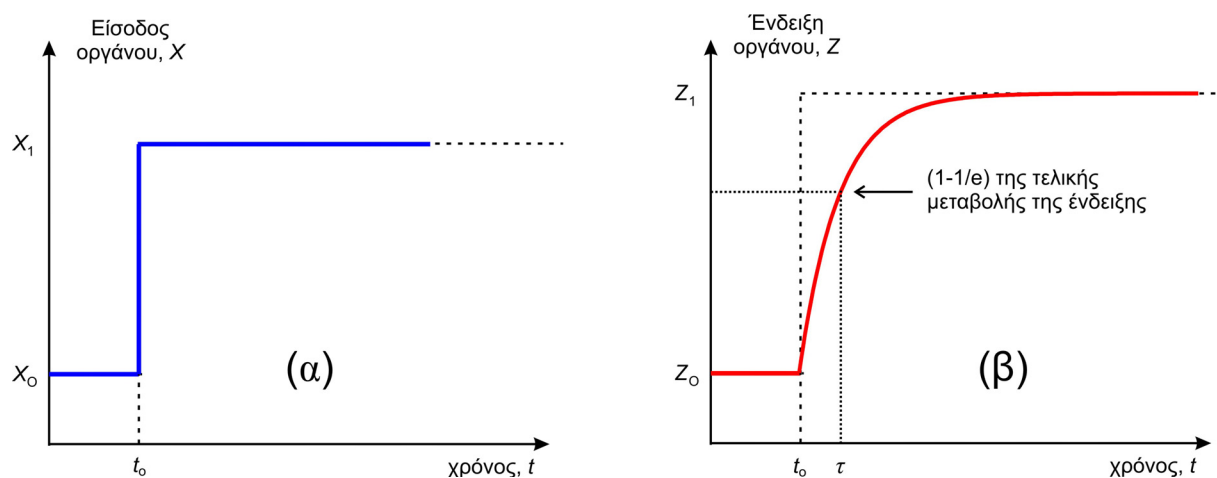
όπου C είναι η θερμοχωρητικότητα του υδραργύρου, k η θερμική αγωγιμότητα του γυάλινου σωλήνα, S το εμβαδόν της επιφάνειας του και d το πάχος του γυαλιού. Η εξαγωγή της προηγούμενης διαφορικής εξίσωσης προκύπτει από το νόμο διάδοσης της θερμότητας με αγωγή (νόμος Fourier) μεταξύ δύο σωμάτων που βρίσκονται σε επαφή, δηλαδή του υδραργύρου και του γυάλινου σωλήνα, ξεφεύγει ωστόσο από το σκοπό του παρόντος κεφαλαίου για αυτό και δίνεται χωρίς απόδειξη.

Στην περίπτωση μίας βηματικής μεταβολής του μετρούμενου μεγέθους από X_0 (για $t < t_0$) σε X_1 (για $t \geq t_0$) και θεωρώντας ότι για $t < t_0$ το όργανο είναι σταθεροποιημένο και η ένδειξη του είναι $Z_0 = (b_0/\alpha_0)X_0$, η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης 2.3 (θέτοντας $t_0 = 0$) δίνεται από την ακόλουθη συνάρτηση

$$Z(t) = \frac{b_0}{\alpha_0}(X_0 - X_1)e^{-t/\tau} + \frac{b_0}{\alpha_0}X_1 \quad (2.5)$$

Η εξίσωση 2.5 παριστάνει μία εκθετική μεταβολή της εξόδου στην τελική σταθερή τιμή $Z_1 = (b_0/\alpha_0)X_1$, όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 2.8β. Η παράμετρος τ στη σχέση 2.5 ονομάζεται σταθερά χρόνου του οργάνου και είναι ένα μέτρο του χρόνου απόκρισης του οργάνου. Ορίζεται ως ο χρόνος που η ένδειξη του οργάνου θα μεταβληθεί κατά 63% από την αρχική τιμή Z_0 στην τελική σταθερή τιμή Z_1 . Μικρή τιμή του τ σημαίνει ότι οι ενδείξεις του οργάνου μεταβάλλονται γρήγορα και προσεγγίζουν την τελική σταθερή ένδειξη σε μικρό χρονικό διάστημα. Αντίθετα, μεγάλη σταθερά χρόνου σε ένα όργανο συνεπάγεται καθυστέρηση στη λήψη της μέτρησης, προκειμένου να αποφύγουμε σημαντικό σφάλμα.

Κατ' αναλογία με τη σχέση 2.5, μπορεί να προκύψει η αντίστοιχη λύση για την περίπτωση του υδραργυρικού θερμομέτρου για μία βηματική μεταβολή της θερμοκρασίας T_{in} από T_0 σε T_1 , όπως θα δούμε στο Κεφ. 6.



Σχήμα 2.8 Η απόκριση $Z(t)$ ενός οργάνου μέτρησης πρώτης τάξης (β) σε μία βηματική μεταβολή του μετρούμενου μεγέθους (α). Τη χρονική στιγμή $t=\tau$ (μία σταθερά χρόνου) η ένδειξη του οργάνου θα απέχει κατά $1/e$ από την τελική τιμή Z_1 .

Στα όργανα μέτρησης δεύτερης τάξης, η σχέση μεταξύ των μεγεθών $Z(t)$ και $X(t)$ περιγράφεται από μία διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης ($n=2$) και η εξίσωση 2.1 στην περίπτωση αυτή γίνεται

$$\alpha_2 \frac{d^2 Z(t)}{dt^2} + \alpha_1 \frac{dZ}{dt} + \alpha_0 Z(t) = b_0 X(t) \quad (2.6)$$

που έχει τη μορφή της εξίσωσης που περιγράφει ένα αρμονικό ταλαντωτή με απόσβεση στον οποίο εξασκείται μία εξωτερική δύναμη. Έτσι, ένα δυναμόμετρο με ελατήριο που χρησιμοποιείται για τη μέτρηση δυνάμεων ή ένας αισθητήρας μέτρησης της εδαφικής κίνησης (σεισμόμετρο), μπορούν να περιγραφούν από τη διαφορική εξίσωση της προηγούμενης μορφής. Στην περίπτωση του δυναμόμετρου, η είσοδος είναι η

δύναμη F που θέλουμε να μετρήσουμε και η έξοδος του Z , η μετατόπιση της άκρης του ελατηρίου. Η εξίσωση που περιγράφει την κίνηση σε αυτή την περίπτωση προκύπτει από την εφαρμογή του 2^{ου} νόμου του Newton

$$\sum F_i = m \frac{d^2 Z}{dt^2} \quad (2.7)$$

όπου οι δυνάμεις που ασκούνται, πέρα από τη δύναμη $F_{εξ}$ που θέλουμε να μετρήσουμε, είναι η δύναμη επαναφοράς του ελατηρίου που δίνεται από το νόμο του Hooke, $F_{ελ} = -kZ$ και η δύναμη απόσβεσης, λόγω των τριβών, $F_{τρ} = -b(dZ/dt)$. Με αντικατάσταση στην εξίσωση 2.7 προκύπτει η τελική μορφή της διαφορικής εξίσωσης

$$m \frac{d^2 Z(t)}{dt^2} + b \frac{dZ(t)}{dt} + kZ(t) = F_{εξ}$$

Η διερεύνηση των λύσεων της παραπάνω μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης είναι αρκετά περίπλοκη και ξεφεύγει από το σκοπό του παρόντος συγγράμματος. Ο τρόπος ωστόσο με τον οποίο θα μεταβάλλεται η ένδειξη του οργάνου εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά του συστήματος, δηλαδή τη μάζα, τη σταθερά ελατηρίου και το συντελεστή απόσβεσης.

Βιβλιογραφία/Αναφορές

- Καλοβρέκτης, Κ. και Κατέβας, Ν. (2014). *Αισθητήρες Μέτρησης και Ελέγχου (2^η Έκδοση)*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα.
- Μαθιουλάκης, Μ. (2004). *Μέτρηση, Ποιότητα Μέτρησης και Αβεβαιότητα*. Αθήνα: Ελληνική Ένωση Εργαστηρίων.
- Formasini, P. (2008). *The Uncertainty in Physical Measurements – An Introduction to Data Analysis in the Physics Laboratory*. New York: Springer.
- ISO VIM (2004). *International Vocabulary of Basic and General Terms in Metrology (3rd Ed.)*. DGIUDE 99999. Ανακτήθηκε 2 Ιουνίου, 2013, από <http://www.bipm.org/en/publications/guides/vim.html>

Κεφάλαιο 3 – Παρουσίαση πειραματικών αποτελεσμάτων

Σύνοψη

Πέραν από την ιδιαίτερη προσοχή που θα πρέπει να επιδείξουμε κατά τη λήψη μετρήσεων σε ένα πείραμα, μεγάλη σημασία έχει ο τρόπος που θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια τα αποτελέσματά μας και η επεξεργασία που θα κάνουμε, προκειμένου να καταλήξουμε σε σωστά και ασφαλή συμπεράσματα. Στο κεφάλαιο αυτό συνοψίζονται οι τρόποι με τους οποίους παρουσιάζουμε και επεξεργαζόμαστε τα αποτελέσματα των πειραματικών μας μετρήσεων. Παρουσιάζεται ο υπολογισμός της καλύτερης τιμής και της αβεβαιότητας κατά την επαναλαμβανόμενη μέτρηση ενός φυσικού μεγέθους, σε συνδυασμό με τους κανόνες που θα πρέπει να ακολουθούμε για τη σωστή αναγραφή των αποτελεσμάτων. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στη γραφική αναπαράσταση δύο εξαρτημένων μεταξύ τους φυσικών μεγεθών (σε χιλιοστομετρικό, λογαριθμικό, και ημιλογαριθμικό χαρτί) και των μαθηματικών σχέσεων που μπορεί να τα συνδέουν (γραμμική, νόμος δύναμης, και εκθετική). Σε κάθε περίπτωση, παρουσιάζεται αναλυτικά ο τρόπος με τον οποίο μπορούμε να υπολογίσουμε τις παραμέτρους των εξισώσεων, είτε κατευθείαν από τη γραφική παράσταση, είτε με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων.

Προαπαιτούμενη γνώση

Δεν απαιτείται γνώση άλλων εννοιών.

3.1. Μέση τιμή και αβεβαιότητα

Μετρώντας την τιμή ενός φυσικού μεγέθους, τα αριθμητικά αποτελέσματα κατά την επανάληψη των μετρήσεων θα διαφέρουν μεταξύ τους και η διαφορά αυτή μπορεί να είναι ουσιώδης ή αμελητέα, ανάλογα με το είδος των σφαλμάτων που υπεισέρχονται στη διαδικασία της μέτρησης. Ποτέ επομένως μία μόνον μέτρηση ενός φυσικού μεγέθους δεν είναι αρκετή. Ως εκ τούτου, η μέτρηση θα πρέπει να επαναληφθεί αρκετές φορές, ώστε να βρεθεί τελικά η καλύτερη τιμή του μετρούμενου μεγέθους.

Κατά την επανάληψη της μέτρησης ενός μεγέθους x , N το πλήθος φορές, η καλύτερη εκτίμηση της αληθινής τιμής προκύπτει από την αριθμητική μέση τιμή ή μέσο όρο των μετρήσεων. Ο μέσος όρος \bar{x} των τιμών x_i ($i = 1, 2, \dots, N$) ενός μεγέθους ορίζεται ως το άθροισμα των τιμών της μέτρησης διαιρεμένο με το πλήθος των τιμών. Δηλαδή ισχύει

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \quad (3.1)$$

Επιπλέον, χρειαζόμαστε μία ποσοτική εκτίμηση της διασποράς των πειραματικών μας τιμών γύρω από τη μέση τιμή. Στις περισσότερες των περιπτώσεων που ο αριθμός των μετρήσεων ενός μεγέθους είναι σχετικά μικρός ($N < 30$), αποδεικνύεται με τη βοήθεια της στατιστικής, ότι η εκτίμηση αυτή εκφράζεται από την αβεβαιότητα ή τυπική απόκλιση του μέσου όρου $\sigma_{\bar{x}}$ ενός συνόλου N μετρήσεων, μέσω της σχέσης:

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}} \quad (3.2)$$

Θα πρέπει να επισημανθεί ότι τα παραπάνω βασίζονται στην προϋπόθεση ότι η επαναλαμβανόμενη μέτρηση αφορά σε ένα σαφώς προσδιορισμένο και μη μεταβαλλόμενο μέγεθος, οι μεταβολές του οποίου είναι τυχαίες (ακολουθούν δηλαδή την κανονική κατανομή) και το πλήθος των μετρήσεων είναι ικανοποιητικό ($N > 10$).

Εκτός από την αβεβαιότητα $\sigma_{\bar{x}}$, αρκετά συχνά χρησιμοποιείται η σχετική αβεβαιότητα ή αλλιώς σχετικό σφάλμα R που είναι το απόλυτο μέτρο της ακρίβειας της μέτρησης και δίνεται από τη σχέση:

$$R = \frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}} \quad (3.3)$$

ή ισοδύναμα

$$R(\%) = \frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}} \cdot 100 \quad (3.4)$$

και αναφέρεται ως η επί τοις εκατό αβεβαιότητα της μέσης τιμής.

3.2. Σημαντικά ψηφία και στρογγυλοποίηση αποτελεσμάτων

Η ακρίβεια μιας μέτρησης αντανακλάται κατά κύριο λόγο στο πλήθος των ψηφίων που περιέχονται στο αποτέλεσμα. Είναι προφανές ότι η τιμή 1.12 m του μήκους ενός αντικειμένου που μετρήθηκε με χάρακα, είναι λιγότερο ακριβής από την τιμή 1.1235 m που μετρήθηκε με μία οπτική μέθοδο.

Ως σημαντικά ψηφία ενός αριθμού, ορίζονται τα ψηφία που είναι γνωστά με βεβαιότητα και ένα ακόμη ψηφίο που είναι το πρώτο αβέβαιο ή κατ' εκτίμηση ψηφίο. Παραδείγματα υπολογισμού σημαντικών ψηφίων δίνονται στον Πίνακα 3.1.

Αριθμοί	Πλήθος σημαντικών ψηφίων
8, 0.02, 3×10^6	1
15, 7.5, 0.23	2
3.18, 0.0205, 3.72×10^5	3
0.02785, 1562×10^3 , 2015	4
0.015243, 1823.6	5

Πίνακας 3.1 Σημαντικά ψηφία αριθμών

Στον υπολογισμό δηλαδή των σημαντικών ψηφίων ενός αριθμού, δεν λαμβάνουμε υπόψη την υποδιαστολή και δεν υπολογίζουμε το μηδέν πριν την υποδιαστολή. Τα μηδενικά ωστόσο που βρίσκονται δεξιότερα ενός μη μηδενικού ψηφίου μετά την υποδιαστολή, θα πρέπει να θεωρηθούν σημαντικά. Για παράδειγμα, ο αριθμός 0.020 έχει 2 σημαντικά ψηφία αφού το μηδέν μετά το ψηφίο 2 θα πρέπει να θεωρηθεί σημαντικό ψηφίο. Ο καλύτερος τρόπος ωστόσο για να γράψουμε πολύ μικρούς ή μεγάλους αριθμούς είναι χρησιμοποιώντας δυνάμεις του 10. Στην περίπτωση αυτή, τα σημαντικά ψηφία είναι αυτά που περιέχει ο προεκθετικός όρος. Γενικά, μπορούμε να αναφέρουμε τους ακόλουθους κανόνες για την εύρεση των σημαντικών ψηφίων ενός αριθμού.

(α) Κάθε μη μηδενικό ψηφίο θεωρείται σημαντικό.

(β) Τα μηδενικά τα οποία έχουν αριστερά τους οποιοδήποτε μη μηδενικό ψηφίο, θεωρούνται σημαντικά. Εξαιρέση αποτελούν τα μηδενικά στο τέλος των ακεραίων για τους οποίους δε γνωρίζουμε την ακρίβειά τους. Αν η ακρίβεια ωστόσο είναι γνωστή, τα μηδενικά μπορούν να θεωρηθούν ότι είναι σημαντικά ψηφία (π.χ. 300 ± 1 , το 300 έχει 3 σημαντικά ψηφία).

(γ) Όλα τα μηδενικά που δεν υπόκεινται στον κανόνα (β) θεωρούνται σημαντικά (π.χ. ο αριθμός 0.0300 έχει 3 σημαντικά ψηφία).

Κάθε αριθμητική τιμή που προκύπτει από μέτρηση θα πρέπει να φέρει ένα μόνο κατ' εκτίμηση ψηφίο. Είναι άσκοπο και λανθασμένο να γράψουμε την τιμή μιας μέτρησης με περισσότερα του ενός αβέβαια ψηφία. Το κατ' εκτίμηση ψηφίο συνδέεται με την αβεβαιότητα της μέτρησης (πειραματική αβεβαιότητα), που καθορίζεται από την ακρίβεια και τη βαθμονόμηση του οργάνου. Όταν επομένως καταγράφουμε το αποτέλεσμα μιας μέτρησης ή ενός υπολογισμού που έχουμε κάνει με την επιστημονική αριθμομηχανή, με περισσότερα ψηφία απ' όσα πρέπει, δημιουργούμε στον αναγνώστη λανθασμένη εντύπωση αναφορικά με την ακρίβεια της χρησιμοποιούμενης πειραματικής μεθόδου.

Τα αποτελέσματα των μετρήσεων που λαμβάνουμε, τα χρησιμοποιούμε συνήθως προκειμένου να υπολογίσουμε κάποιο άλλο φυσικό μέγεθος εκτελώντας υπολογισμούς. Υπάρχουν ορισμένοι κανόνες που πρέπει να ακολουθούνται κατά τις πράξεις αριθμητικών τιμών που έχουν προκύψει από μετρήσεις (Καμαράτος, 2002).

- (i) Κατά την πρόσθεση ή αφαίρεση αριθμών προερχόμενων από μετρήσεις, αν σε μία στήλη έστω και ένα ψηφίο δεν είναι σημαντικό, τότε το αντίστοιχο ψηφίο του αποτελέσματος δεν είναι επίσης σημαντικό. Έτσι στην ακόλουθη πρόσθεση

$$\begin{array}{r} 324.42 \\ + \quad 0.3663 \\ \hline 324.7863 \end{array}$$

τα ψηφία πέραν (δηλ. δεξιά) του 8 στο αποτέλεσμα παύουν να είναι σημαντικά και το αποτέλεσμα θα πρέπει να στρογγυλοποιηθεί κατάλληλα.

- (ii) Στην περίπτωση αφαίρεσης αριθμών που είναι παρόμοιοι, ενδέχεται το αποτέλεσμα να έχει λιγότερα σημαντικά ψηφία από καθένα από τους δύο αριθμούς. Έτσι, στην ακόλουθη αφαίρεση

$$\begin{array}{r} 3215.8 \\ - 3178.3 \\ \hline 37.5 \end{array}$$

το αποτέλεσμα έχει μόνον 3 σημαντικά ψηφία, κατά 2 λιγότερα δηλαδή από τους αριθμούς που αφαιρούμε.

- (iii) Κατά τον πολλαπλασιασμό ή τη διαίρεση αριθμών προερχόμενων από μετρήσεις, το τελικό αποτέλεσμα έχει τόσα σημαντικά ψηφία, όσα έχει ο λιγότερο ακριβής αριθμός. Το αποτέλεσμα επομένως του ακόλουθου πολλαπλασιασμού

$$\begin{array}{r} 2.81 \\ \times 42 \\ \hline 118.02 \end{array}$$

θα πρέπει να έχει δύο μόνον σημαντικά ψηφία.

Στο τελευταίο παράδειγμα όπως και στο πρώτο, η απομάκρυνση των ψηφίων που θεωρούνται μη σημαντικά και η αναγραφή του αποτελέσματος μόνο με τα σημαντικά ψηφία ονομάζεται στρογγυλοποίηση του παραγώγου αποτελέσματος. Κατά τη διαδικασία της στρογγυλοποίησης αποτελεσμάτων αυξάνουμε το τελευταίο ψηφίο που κρατάμε κατά μία μονάδα, αν το επόμενο είναι μεγαλύτερο του πέντε, ενώ αν είναι μικρότερο του πέντε, το αφήνουμε αμετάβλητο. Αν το ψηφίο από το οποίο αρχίζουμε να παραλείπουμε είναι ακριβώς πέντε, τότε το ψηφίο που κρατάμε παραμένει ίδιο αν είναι άρτιος αριθμός και αυξάνεται κατά μία μονάδα αν είναι περιττός. Έτσι, στο παράδειγμα της προηγούμενης πρόσθεσης, το αποτέλεσμα θα πρέπει να στρογγυλοποιηθεί στον αριθμό 324.79, ενώ στο παράδειγμα του πολλαπλασιασμού, το αποτέλεσμα 118.02 θα πρέπει να έχει δύο σημαντικά ψηφία και στρογγυλοποιείται στο 120 ή καλύτερα στο 1.2×10^2 .

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι οι στρογγυλοποιήσεις εφαρμόζονται μόνον στα αποτελέσματα των πράξεων που χρησιμοποιούμε πειραματικές μετρήσεις και όχι στις αριθμητικές τιμές φυσικών σταθερών όπου εκεί χρησιμοποιούμε την τιμή που μας παρέχει η βιβλιογραφία, με όση ακρίβεια έχει αυτή υπολογιστεί.

Γενικά, στην γραφή ενός μετρούμενου μεγέθους ως

$$x = \bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}$$

- i. η μέση τιμή \bar{x} θα πρέπει να γράφεται με ένα περισσότερο ψηφίο από τα σημαντικά ψηφία που έχουν οι μετρήσεις.
- ii. Η αβεβαιότητα $\sigma_{\bar{x}}$ γράφεται με ένα μόνον σημαντικό ψηφίο.
- iii. η μέση τιμή \bar{x} δεν πρέπει να γράφεται με περισσότερα ψηφία από το πρώτο σημαντικό ψηφίο της αβεβαιότητας.

Για παράδειγμα, κατόπιν πράξεων έχουν προκύψει τα ακόλουθα αποτελέσματα για τη μέση τιμή και την αβεβαιότητα των μετρήσεων του μήκους ενός εξαρτήματος:

$$\bar{x} = 4.6592 \text{ cm}$$

και

$$\sigma_{\bar{x}} = 0.0732953 \text{ cm}$$

Κατόπιν των κατάλληλων στρογγυλοποιήσεων, θα πρέπει να δηλώσουμε το αποτέλεσμα ως:

$$x = \bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}} = (4.66 \pm 0.07) \text{ cm}$$

Αντίστοιχα, οι τιμές:

$$\bar{x} = 6873.8 \text{ m}$$

και

$$\sigma_{\bar{x}} = 12.42 \text{ m}$$

θα πρέπει να στρογγυλοποιηθούν στο τελικό αποτέλεσμα ως:

$$x = \bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}} = (6870 \pm 10) \text{ cm}$$

Η αναγραφή της αβεβαιότητας μπορεί κατ' εξαίρεση να γίνει με δύο σημαντικά ψηφία στις εξής περιπτώσεις:

(α) Όταν η ακρίβεια των μετρήσεων μας είναι πολύ μεγάλη, κάτι που ωστόσο δεν ισχύει για τις μετρήσεις στα πλαίσια του φοιτητικού εργαστηρίου και

(β) Όταν το πρώτο ψηφίο είναι το 1 ή το 2. Στην περίπτωση αυτή, η στρογγυλοποίηση μπορεί να επιφέρει μεγάλο λάθος στον υπολογισμό (π.χ. αν η τιμή 1.4 στρογγυλοποιηθεί στο 1, έχουμε απόκλιση κατά 40%) και είναι προτιμότερο να κρατήσουμε και δεύτερο σημαντικό ψηφίο.

3.3. Παραδείγματα

3.3.1. Υπολογισμός όγκου ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου

Για τον προσδιορισμό του όγκου ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, μετρήθηκαν οι τρεις διαστάσεις του και βρέθηκαν:

$$a = 12.32 \text{ cm}, b = 5.64 \text{ cm}, \text{ και } c = 8.60 \text{ cm}$$

Ο αριθμός των σημαντικών ψηφίων των τιμών των μετρήσεων είναι 4, 3 και 3, αντίστοιχα (στην τελευταία μέτρηση το μηδέν δεν μπορεί να παραληφθεί). Ο όγκος του παραλληλεπιπέδου που θα προκύψει από την πράξη θα είναι:

$$V = a \cdot b \cdot c = 597.56928 \text{ cm}^3$$

Στο αποτέλεσμα αυτό δεν μπορούμε να κρατήσουμε όλα τα ψηφία γιατί τότε θα έπρεπε να τα θεωρήσουμε σημαντικά. Έτσι λοιπόν το αποτέλεσμα θα πρέπει να γραφεί με τρία σημαντικά ψηφία, όσα δηλαδή έχει ο λιγότερο ακριβής αριθμός. Έτσι, μετά την στρογγυλοποίηση, το αποτέλεσμα γράφεται ως εξής:

$$V = 598 \text{ cm}^3$$

3.3.2. Πράξεις μεταξύ αριθμών από πειραματικές μετρήσεις

Έστω οι παρακάτω πράξεις μεταξύ αριθμών οι οποίοι προέρχονται από πρωταρχικές πειραματικές μετρήσεις κάποιων φυσικών μεγεθών. Τα τελικά αποτελέσματα έχουν στρογγυλοποιηθεί εφαρμόζοντας τους κανόνες που προαναφέρθηκαν:

- α) $13.8 \times 0.032 \times 285 = 125.856 = 130$ (2 σημαντικά ψηφία)
 β) $152 \times 3201 \times 426 = 2.07 \times 10^8$ (3 σημαντικά ψηφία)
 γ) $317 \times 102 : 0.06 = 5 \times 10^5$ (1 σημαντικό ψηφίο)

3.3.3. Υπολογισμός μέσης τιμής και τυπικής απόκλισης

Για τον υπολογισμό της μέσης τιμής και της αβεβαιότητάς της είναι βολικό να χρησιμοποιούμε κατάλληλο πίνακα (Πίνακας 3.2) όπου θα αναγράφονται οι μετρήσεις μας και όλοι οι υπολογισμοί που θα εκτελέσουμε. Οι υπολογισμοί αυτοί μπορούν να απλουστευθούν σημαντικά με τη χρήση ενός λογιστικού φύλλου εργασίας. Στον Πίνακα 3.2 παρατίθενται οι 10 μετρήσεις της διαμέτρου μιας σφαίρας και οι κατάλληλοι υπολογισμοί, προκειμένου να εξάγουμε τη μέση τιμή και την αβεβαιότητα.

Θα έχουμε επομένως:

$$\bar{D} = \sum_{i=1}^{10} D_i / N = 14.534 / 10 = 1.4534 \text{ cm}$$

και

$$\sigma_{\bar{D}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (D_i - \bar{D})^2}{N(N-1)}} = \sqrt{\frac{0.0001124}{10(10-1)}} = 0.001118 \text{ cm}$$

Τελικά, μπορούμε να γράψουμε:

$$D = \bar{D} \pm \sigma_{\bar{D}} = (1.4534 \pm 0.0011) \text{ cm}$$

a/a	D (cm)	\bar{D} (cm)	$(D_i - \bar{D})^2$
1	1.450	1.4534	0.0000116
2	1.453		0.0000002
3	1.448		0.0000292
4	1.456		0.0000068
5	1.455		0.0000026
6	1.452		0.0000020
7	1.458		0.0000212
8	1.456		0.0000068
9	1.449		0.0000194
10	1.457		0.0000130
	$\sum_{i=1}^N D_i = 14.534$		$\sum_{i=1}^N (D_i - \bar{D})^2 = 0.0001124$

Πίνακας 3.2 Πίνακας υπολογισμού μέσης τιμής και αβεβαιότητας. Οι υπολογισμοί υπάρχουν ξεχωριστά σε αρχείο excel (πατήστε [εδώ](#)), ώστε ο φοιτητής να μπορεί εύκολα να υπολογίσει μέσες τιμές και αβεβαιότητες, προσαρμόζοντας κατάλληλα τα δεδομένα του.

3.4. Γραφικές παραστάσεις και συσχετισμός δεδομένων

Πέραν από την εύρεση της καλύτερης τιμής ενός φυσικού μεγέθους, είτε με απευθείας είτε με σύνθετη μέτρηση, το μεγαλύτερο ενδιαφέρον παρουσιάζεται στον προσδιορισμό της μαθηματικής σχέσης που συνδέει δύο μετρούμενα, εξαρτημένα μεταξύ τους φυσικά μεγέθη. Το μέγεθος, τις τιμές του οποίου έχουμε τη δυνατότητα να καθορίσουμε εμείς όταν εκτελούμε το πείραμα, ονομάζεται ανεξάρτητη μεταβλητή. Τέτοια φυσικά μεγέθη σε ένα πείραμα μπορεί να είναι ο χρόνος ή η απόσταση (χωρίς βέβαια αυτό να είναι και απόλυτο). Το άλλο μέγεθος, οι τιμές του οποίου εξαρτώνται από τις τιμές που θα έχει η ανεξάρτητη μεταβλητή, ονομάζεται εξαρτημένη μεταβλητή.

Για τον προσδιορισμό της μαθηματικής σχέσης μεταξύ των δύο αυτών μετρούμενων μεγεθών, καταφεύγουμε σχεδόν πάντα στη γραφική απεικόνιση της μεταβολής του ενός φυσικού μεγέθους (εξαρτημένης μεταβλητής) σε συνάρτηση με το άλλο (ανεξάρτητη μεταβλητή). Το είδος της γραφικής αναπαράστασης που θα χρησιμοποιήσουμε κάθε φορά, εξαρτάται από τη μαθηματική σχέση που συνδέει τα δύο μετρούμενα φυσικά μεγέθη – μεταβλητές. Οι απλούστερες των μαθηματικών σχέσεων στις οποίες θα αναφερθούμε είναι η γραμμική, η σχέση δύναμης και η εκθετική σχέση. Η γραμμική σχέση (ευθεία γραμμή) αποτελεί την απλούστερη σχέση μεταξύ δύο φυσικών μεγεθών, ενώ όπως θα δούμε και στη συνέχεια, μπορούν να αναχθούν σε τέτοια και άλλες πολυπλοκότερες σχέσεις, όπως η λογαριθμική και η εκθετική. Επομένως, η σωστή απεικόνιση δύο γραμμικώς εξαρτημένων μεγεθών και η εύρεση της γραμμικής τους σχέσης, είναι βασική για την περαιτέρω κατανόηση των υπολοίπων μαθηματικών σχέσεων (Καμαράτος, 2002 · Παπαγεωργόπουλος, 1998).

3.4.1. Γραμμική εξάρτηση δύο μεγεθών

3.4.1.1. Διάγραμμα διασποράς

Η μαθηματική σχέση που περιγράφει τη γραμμική εξάρτηση δύο μεταβλητών y και x (που μπορεί να αντιστοιχούν σε δύο μετρούμενα φυσικά μεγέθη) είναι :

$$y = \kappa \cdot x + \beta \quad (3.5)$$

όπου κ και β είναι σταθερές τις οποίες μπορούμε να υπολογίσουμε είτε από τη γραφική παράσταση, είτε με τη θεωρία των ελαχίστων τετραγώνων, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Για τον υπολογισμό των παραμέτρων κ και β της ευθείας 3.5 με τη γραφική μέθοδο, θα πρέπει πρώτα να χαράξουμε τη γραφική παράσταση $y=f(x)$ τοποθετώντας τις πειραματικές τιμές των μεγεθών x και y σε χιλιοστομετρικό χαρτί.

Για τη χάραξη μιας γραφικής παράστασης που απεικονίζει την εξάρτηση δύο φυσικών μεγεθών η οποία ονομάζεται και διάγραμμα διασποράς, θα πρέπει να ακολουθήσουμε κάποιους γενικούς κανόνες:

1. Άσχετα με το ποια είναι η μαθηματική σχέση μεταξύ των δύο μεγεθών, αρχικά χαράζουμε τη γραφική παράσταση σε χιλιοστομετρικό χαρτί, ώστε να αποκτήσουμε μία πρώτη εικόνα της μεταβολής του ενός μεγέθους ως προς το άλλο και του πιθανού συσχετισμού τους (η εικόνα αυτή είναι πιο κατανοητή όταν οι δύο κλίμακες είναι γραμμικές).
2. Το γράφημα που θα φτιάξουμε θα πρέπει να καλύπτει όλο το διαθέσιμο χώρο που έχουμε στο χιλιοστομετρικό χαρτί (συνήθως μεγέθους A4) ή τουλάχιστον το μισό ώστε να είναι ευκρινές και κατανοητό.
3. Χαράζουμε στα περιθώρια της διαγράμμισης του χαρτιού τους δύο άξονες των μεγεθών που θα αναπαραστήσουμε γραφικά και τοποθετούμε τα σύμβολά τους με τις αντίστοιχες μονάδες μέτρησης.
4. Σημαντική είναι η επιλογή της κατάλληλης κλίμακας που θα κάνουμε σε κάθε έναν από τους δύο άξονες, ώστε τελικά να καλύψουμε όλο το διαθέσιμο χώρο και όχι μόνον ένα μικρό μέρος αυτού, αλλά και να μπορούμε να τοποθετήσουμε με ευκολία τα πειραματικά μας σημεία. Η επιλογή της κλίμακας σε κάθε άξονα γίνεται ανάλογα με το εύρος των πειραματικών τιμών των δύο μετρούμενων μεγεθών. Επιλέγουμε συνήθως ανά cm της διαγράμμισης του χαρτιού πολλαπλάσια του 1, 2, 4 ή 5 για τις πειραματικές μας τιμές. Αποφεύγουμε πολλαπλάσια του 3 στις κλίμακες μας γιατί μετά ίσως θα δυσκολευτούμε να τοποθετήσουμε κάποιες πειραματικές τιμές. Προφανώς, δεν είναι απαραίτητο ο

κάθε άξονας να ξεκινά από το μηδέν, αλλά μπορούμε να μεταθέσουμε την αρχή καθενός από τους άξονες σε τιμές που μας εξυπηρετούν ώστε να έχουμε καλύτερο αποτέλεσμα.

5. Τοποθετούμε τα ζεύγη των πειραματικών μας σημείων πάνω στο γράφημα με τη βοήθεια του χάρακα, σημειώνοντας ευκρινώς τα σημεία με τη χρήση κάποιου απλού συμβόλου (+, ×, □, ♦, ○, ▲, κ.ά.). Αποφεύγουμε τη χάραξη βοηθητικών γραμμών και την αναγραφή των πειραματικών μας τιμών πάνω στο γράφημα.
6. Στη συνέχεια, θα πρέπει να χαράζουμε την καλύτερη ευθεία που περνάει από τα πειραματικά σημεία. Η χάραξη της ευθείας γίνεται με υποκειμενικό τρόπο, μπορεί να διαφέρει από πειραματιστή σε πειραματιστή, ωστόσο ο κανόνας είναι ότι προσέχουμε να τέμνει όσο το δυνατόν περισσότερα πειραματικά σημεία αφήνοντας εκατέρωθέν της, με συμμετρικό τρόπο τα υπόλοιπα.

Αφού χαράζουμε τη γραφική παράσταση των μετρούμενων μεγεθών, το επόμενο βήμα είναι να υπολογίσουμε τις παραμέτρους της εξίσωσης της ευθείας 3.5. Η τιμή που θα αναγνώσουμε στον κατακόρυφο άξονα, αν προεκτείνουμε κατάλληλα την ευθεία (τεταγμένη επί την αρχή), είναι η τιμή του β (αφού ισχύει $y(x=0)=\beta$).

Η σταθερά κ ονομάζεται κλίση της ευθείας και υπολογίζεται εύκολα ως εξής:

Επιλέγουμε δύο σημεία A και B της ευθείας με συντεταγμένες (x_A, y_A) και (x_B, y_B) . Οι συντεταγμένες των A και B επαληθεύουν την 3.5, θα ισχύει δηλαδή,

$$y_A = \kappa \cdot x_A + \beta$$

$$y_B = \kappa \cdot x_B + \beta$$

Αφαιρώντας τις δύο παραπάνω σχέσεις κατά μέλη, προκύπτει τελικά η τιμή του κ :

$$\kappa = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad (3.6)$$

Θα πρέπει να επισημάνουμε ότι, τόσο το κ όσο και το β έχουν μονάδες μέτρησης και αυτές θα πρέπει να γράφονται πάντα δίπλα στις τιμές που υπολογίζουμε για κάθε ένα από αυτά. Έτσι, το κ έχει μονάδες ίδιες με αυτές του λόγου $\Delta y / \Delta x$ των δύο μεγεθών, ενώ το β έχει τις μονάδες του μεγέθους y . Επίσης, για τον προσδιορισμό της κλίσης μέσω της σχέσης 3.6, δεν επιλέγουμε πειραματικά σημεία γιατί αυτά δεν είναι απαραίτητα σημεία της ευθείας και άρα δεν επαληθεύουν τη σχέση 3.5.

3.4.1.2. Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων για την εύρεση της καλύτερης ευθείας

Οι τιμές των παραμέτρων της ευθείας κ και β μπορούν να υπολογιστούν με ακριβέστερο τρόπο με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων με την οποία βρίσκουμε αλγεβρικά την καλύτερη ευθεία (η οποία είναι μοναδική) που αντιστοιχεί στα πειραματικά μας δεδομένα. Η μέθοδος αυτή στηρίζεται στην αρχή των ελαχίστων τετραγώνων του Legendre σύμφωνα με την οποία, η καλύτερη τιμή x_{best} ενός μεγέθους είναι εκείνη για την οποία το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων των μετρήσεων x_i από την τιμή x_{best} είναι ελάχιστο (Taylor, 1997). Η απόδειξη βέβαια για τον υπολογισμό των παραμέτρων κ και β ξεφεύγει από τους σκοπούς του παρόντος συγγράμματος, γι αυτό και δίνονται μόνο οι σχέσεις υπολογισμού τους:

$$\kappa = \frac{N \sum_{i=1}^N x_i y_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N y_i}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2} \quad (3.7)$$

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2 \sum_{i=1}^N y_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N x_i y_i}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2} \quad (3.8)$$

Οι τιμές των παραμέτρων κ και β έχουν και αυτές αβεβαιότητες που δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\sigma_{\kappa} = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - (\sum_{i=1}^N x_i)^2}} \quad (3.9)$$

και

$$\sigma_{\beta} = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - (\sum_{i=1}^N x_i)^2}} \quad (3.10)$$

όπου

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \kappa - \beta x_i)^2}{N - 2}} \quad (3.11)$$

και εκφράζει την αβεβαιότητα στις τιμές y_i .

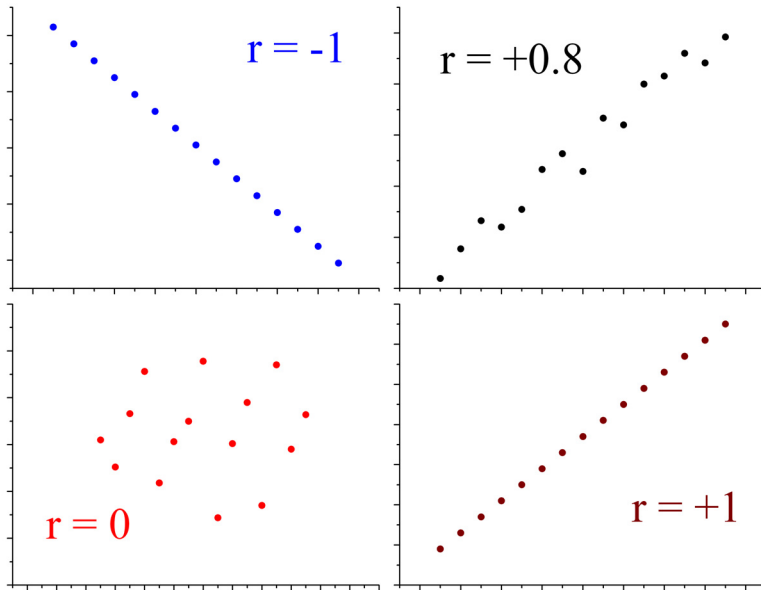
Θα πρέπει να επισημάνουμε ότι με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων μπορούμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές κ και β της εξίσωσης ευθείας 3.5, ανεξάρτητα από το αν τα δύο μετρούμενα μεγέθη συσχετίζονται γραμμικά ή όχι μεταξύ τους. Η εύρεση δηλαδή των δύο αυτών παραμέτρων δε μας εξασφαλίζει τη γραμμική εξάρτηση δύο μετρούμενων φυσικών μεγεθών, αλλά εμείς θεωρούμε δεδομένο ότι υπάρχει αυτού του είδους η εξάρτηση.

Για να βρούμε κατά πόσο δύο μετρούμενα μεγέθη συσχετίζονται γραμμικά μεταξύ τους, θα πρέπει να υπολογίσουμε το συντελεστή γραμμικής συσχέτισης (correlation coefficient, r) που δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$r = \frac{N \sum_{i=1}^N x_i y_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N y_i}{\sqrt{[\sum_{i=1}^N x_i^2 - (\sum_{i=1}^N x_i)^2] \cdot [\sum_{i=1}^N y_i^2 - (\sum_{i=1}^N y_i)^2]}} \quad (3.12)$$

Οι τιμές του συντελεστή συσχέτισης κυμαίνονται μεταξύ +1 και -1. Τιμές του r πολύ κοντά στο ± 1 , υποδηλώνουν τέλει γραμμικό συσχετισμό (θετικό ή αρνητικό) μεταξύ των μεγεθών x και y , ενώ όσο η τιμή του r ελαττώνεται, τόσο μικρότερος γραμμικός συσχετισμός υπάρχει μεταξύ των δύο μετρούμενων μεγεθών. Τιμή του r ίση με μηδέν υποδηλώνει ότι δεν υπάρχει κανένας συσχετισμός μεταξύ των δύο μετρούμενων μεγεθών (Σχήμα 3.1). Ωστόσο, όπως προαναφέρθηκε, η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων, ακόμα και για ανύπαρκτο γραμμικό συσχετισμό των δύο μεγεθών, θα μας δώσει τις παραμέτρους της «καλύτερης» ευθείας που αντιστοιχεί στα δεδομένα μας. Πρέπει λοιπόν να είμαστε πολύ προσεκτικοί στην καταλληλότητα της εφαρμογής της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων, αν και συνήθως, για πειράματα στο φοιτητικό εργαστήριο, η γραμμική σχέση μεταξύ δύο μεγεθών είναι προφανής ή/και αναμένεται βάσει της αντίστοιχης θεωρίας. Γενικά, η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων μπορεί να εφαρμοστεί για την προσαρμογή των δεδομένων όχι μόνον με μία γραμμική σχέση, αλλά και με συναρτήσεις μεγαλύτερου βαθμού ως προς το x (πολυωνυμικές, εκθετικές, τριγωνομετρικές συναρτήσεις, κ.ά.).

Ο τρόπος εφαρμογής των οδηγιών χάραξης μίας γραφικής παράστασης καθώς και ο υπολογισμός των παραμέτρων της εξίσωσης της ευθείας γίνεται πιο κατανοητός μέσω του ακόλουθου παραδείγματος.



Σχήμα 3.1 Τιμές του συντελεστή συσχέτισης r σε διάφορες περιπτώσεις γραμμικής εξάρτησης δύο μεγεθών.

3.4.1.3. Εφαρμογή στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση

Κατά την κίνηση ενός σώματος σε ευθύγραμμη τροχιά μετρήθηκε ανά 1 sec και για χρονική διάρκεια 10 sec, η μετατόπιση τους σώματος. Οι τιμές καταχωρήθηκαν στον Πίνακα Μετρήσεων 3.3. Να εξεταστεί το είδος κίνησης του σώματος.

t (s)	1.00	2.00	3.00	4.00	5.00	6.00	7.00	8.00	9.00	10.00
x (cm)	10.1	13.9	19.8	26.1	29.8	33.9	40.9	44.7	51.3	55.3

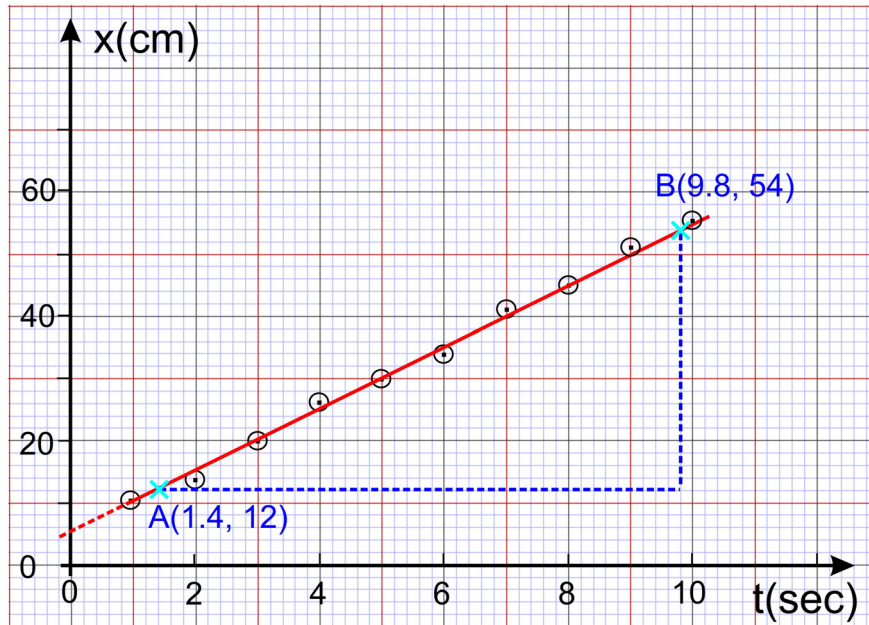
Πίνακας 3.3 Πίνακας μετρήσεων της θέσης ενός σώματος ως προς το χρόνο. Η ακρίβεια στη μέτρηση του χρόνου είναι 0.01 s και στη μέτρηση της μετατόπισης 1 mm. Η ακρίβεια αυτή φαίνεται στο πλήθος των δεκαδικών ψηφίων των μετρήσεων.

Από τις τιμές του Πίνακα 3.3 κάνουμε τη γραφική παράσταση $x=f(t)$ σε χιλιοστομετρικό χαρτί (Σχήμα 3.2). Στο παράδειγμά μας, ο χρόνος αποτελεί την ανεξάρτητη μεταβλητή γιατί καθορίζεται από τον πειραματιστή ποιες χρονικές στιγμές θα μετρήσει τη θέση του σώματος, ενώ η μετατόπιση εξαρτάται από τη χρονική στιγμή που θα γίνει η μέτρηση. Στον οριζόντιο άξονα τοποθετούμε την ανεξάρτητη μεταβλητή t , ενώ στον κατακόρυφο άξονα την εξαρτημένη μεταβλητή, δηλαδή τη μετατόπιση x του σώματος. Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση παριστάνει ευθεία. Άρα, η σχέση $x=f(t)$ θα είναι της μορφής:

$$x = \kappa \cdot t + \beta$$

όπου β το σημείο τομής της ευθείας με τον κατακόρυφο άξονα (x) και κ η κλίση της ευθείας.

Από τη γραφική παράσταση και με όση ακρίβεια μας παρέχει αυτή στην ανάγνωση τιμών, παρατηρούμε ότι η ευθεία τέμνει τον άξονα της μετατόπισης στο σημείο $x=5\text{cm}$. Άρα, $\beta=5\text{cm}$. Διαλέγοντας δύο σημεία A και B της ευθείας που χαραζάμε προσεγγιστικά με το χέρι, η κλίση της ευθείας κ ισούται με:



Σχήμα 3.2 Γραφική παράσταση της θέσης του σώματος ως προς το χρόνο.

$$\kappa = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A} = \frac{(54 - 12) \text{ cm}}{(9.8 - 1.4) \text{ s}} = 5.0 \text{ cm/s}$$

Η ευθεία επομένως, όπως υπολογίστηκε γραφικά, θα είναι η $x = 5.0 \cdot t + 5$ που παριστάνει την ευθύγραμμη ομαλή κίνηση ενός σώματος που ξεκινάει από την αρχική θέση $x_0 = 5 \text{ cm}$ και κινείται με σταθερή ταχύτητα $v_0 = 5 \text{ cm/s}$, δηλαδή,

$$x = x_0 + v_0 \cdot t$$

Σε πιο ακριβή αποτελέσματα για τον υπολογισμό της γραμμικής σχέσης που συνδέει τα μεγέθη x και t μπορεί να καταλήξει κανείς με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Στην περίπτωση αυτή, ο υπολογισμός των σταθερών κ και β γίνεται με αλγεβρικό τρόπο χωρίς να υπόκειται στον υποκειμενισμό του πειραματιστή που σχεδιάζει την ευθεία, δίνοντας μας έτσι την καλύτερη ευθεία που μπορεί να σχεδιαστεί για το δεδομένο σύνολο των πειραματικών μας σημείων (t_i, x_i) . Προκειμένου να υπολογίσουμε τους συντελεστές κ και β από τις σχέσεις 3.7 και 3.8, σύμφωνα με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, κατασκευάζουμε τον Πίνακα ελαχίστων τετραγώνων 3.4. Αντικαθιστώντας επομένως στις σχέσεις 3.7 και 3.8 τα αριθμητικά αποτελέσματα που υπολογίζονται στον Πίνακα 3.4, προκύπτουν οι τιμές των συντελεστών κ και β .

$$\kappa = \frac{N \sum_{i=1}^N t_i x_i - \sum_{i=1}^N t_i \sum_{i=1}^N x_i}{N \sum_{i=1}^N t_i^2 - (\sum_{i=1}^N t_i)^2} = \frac{10 \cdot 2212 - 55 \cdot 325.8}{10 \cdot 385 - 55^2} = 5.1 \text{ cm/s}$$

και

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^N t_i^2 \sum_{i=1}^N x_i - \sum_{i=1}^N t_i \sum_{i=1}^N t_i x_i}{N \sum_{i=1}^N t_i^2 - (\sum_{i=1}^N t_i)^2} = \frac{385 \cdot 325.8 - 55 \cdot 2212}{10 \cdot 385 - 55^2} = 4.53 \text{ cm}$$

Η εξίσωση της ευθείας επομένως είναι $x = 4.53 + 5.1 \cdot t$

Όπως παρατηρούμε, οι τιμές των κ και β οι οποίες υπολογίστηκαν από τη γραφική παράσταση, δεν διαφέρουν πολύ από τις αντίστοιχες που υπολογίσαμε με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Ο δεύτερος

τρόπος ωστόσο είναι πιο ακριβής, αλλά αν δεν υπάρχει μεγάλη διασπορά των πειραματικών σημείων, δεν αναμένεται να βρούμε μεγάλη διαφορά στις τιμές των σταθερών κ και β μεταξύ της γραφικής μεθόδου και της θεωρίας των ελαχίστων τετραγώνων. Γι αυτό θα πρέπει να δίνεται μεγάλη προσοχή στη σύγκριση των τιμών που υπολογίζουμε με τον καθένα τρόπο ξεχωριστά, ώστε να αποφεύγονται τυχόν λάθη ή απροσεξίες κατά τους υπολογισμούς.

a/a	t (s)	x (cm)	t^2 (s ²)	$x \cdot t$ (cm · s)
1	1.00	10.1	1.00	10.1
2	2.00	13.9	4.00	27.8
3	3.00	19.8	9.00	59.4
4	4.00	26.1	16.0	104
5	5.00	29.8	25.0	149
6	6.00	33.9	36.0	203
7	7.00	40.9	49.0	286
8	8.00	44.7	64.0	358
9	9.00	51.3	81.0	462
10	10.00	55.3	100	553
ΣΥΝΟΛΑ	$\sum_{i=1}^{10} t_i = 55.0$	$\sum_{i=1}^{10} x_i = 325.8$	$\sum_{i=1}^{10} t_i^2 = 385$	$\sum_{i=1}^{10} x_i \cdot t_i = 2212$

Πίνακας 3.4 Πίνακας ελαχίστων τετραγώνων για τον προσδιορισμό των παραμέτρων της ευθείας. Οι υπολογισμοί υπάρχουν ξεχωριστά σε αρχείο excel (πατήστε [εδώ](#)), ώστε ο φοιτητής να μπορεί εύκολα να υπολογίσει μέσες τιμές και αβεβαιότητες, προσαρμόζοντας κατάλληλα τα δεδομένα του.

3.4.2. Εξάρτηση δύναμης δύο μεγεθών

3.4.2.1. Λογαριθμική αναπαράσταση

Σε πολλές περιπτώσεις φυσικών προβλημάτων, η εξάρτηση δύο φυσικών μεγεθών x και y δίνεται από ένα νόμο δύναμης, σύμφωνα με τη σχέση:

$$y = c \cdot x^n \quad (3.13)$$

όπου c είναι μια σταθερή ποσότητα και n ένας αριθμός. Για $n=1$ η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία, ενώ για $n=2$ είναι η γνωστή παραβολή.

Λογαριθμίζοντας με βάση το 10 τη σχέση 3.13 θα έχουμε :

$$\log y = \log c + n \cdot \log x \quad (3.14)$$

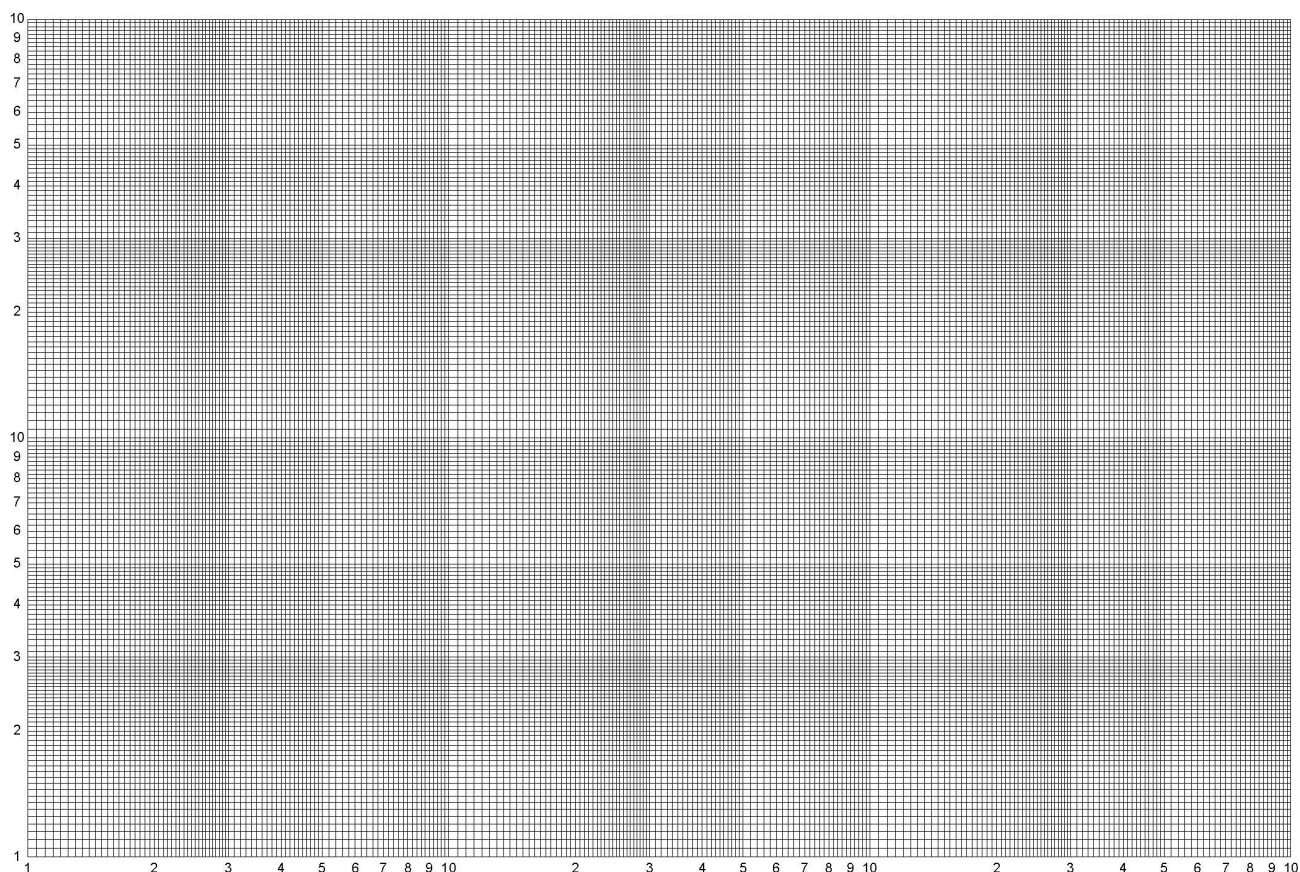
Αν θέσουμε $Y = \log y$, $X = \log x$ και $C = \log c$, η 3.14 γίνεται:

$$Y = C + n \cdot X \quad (3.15)$$

που είναι η εξίσωση της ευθείας. Έτσι, αν αντί των μεταβλητών x , y χρησιμοποιήσουμε τους λογαρίθμους αυτών, η εύρεση των σταθερών c και n στη σχέση 3.13 ανάγεται στον προσδιορισμό των σταθερών της ευθείας 3.15.

Η γραφική παράσταση επομένως των λογαρίθμων των πειραματικών μας μετρήσεων ($\log x_i$, $\log y_i$) σε χιλιοστομετρικό χαρτί αναμένεται να είναι ευθεία. Είναι δυνατόν ωστόσο, να γίνει η γραφική παράσταση των λογαρίθμων των τιμών μας, χωρίς να χρειαστεί να τους υπολογίσουμε, αν χρησιμοποιήσουμε λογαριθμικό χαρτί (Σχήμα 3.3). Στο λογαριθμικό χαρτί οι άξονες δεν ακολουθούν γραμμική μεταβολή αλλά κάθε

υποδιαίρεση τους είναι ανάλογη του λογαρίθμου του αντίστοιχου ακέραιου αριθμού της χιλιοστομετρικής κλίμακας. Η αρίθμηση των αξόνων στο λογαριθμικό χαρτί δε μπορεί να αλλάξει, αλλά μπορούμε ωστόσο να χρησιμοποιήσουμε σε κάθε άξονα όποια ακολουθία δυνάμεων του 10 μας βολεύει για την τοποθέτηση των πειραματικών μας τιμών. Το πλεονέκτημα έναντι του χιλιοστομετρικού χαρτιού είναι ότι μπορούμε να έχουμε μεγάλη λεπτομέρεια στην απεικόνιση πειραματικών τιμών που παρουσιάζουν μεγάλο εύρος.



Σχήμα 3.3 Το λογαριθμικό χαρτί.

Έτσι, αν η γραφική παράσταση δύο μεγεθών x , y σε λογαριθμικό χαρτί είναι ευθεία, τότε η μεταξύ τους σχέση θα είναι της μορφής 3.13.

Οι σταθερές c και n προκύπτουν από τις ακόλουθες σχέσεις:
 $c=y(x=1)$, δηλ., το σημείο τομής της ευθείας με τον κατακόρυφο άξονα στο $x=1$ και

$$n = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} = \frac{\log y_2 - \log y_1}{\log x_2 - \log x_1}$$

όπου (x_1, y_1) και (x_2, y_2) σημεία της ευθείας που σχεδιάσαμε στο λογαριθμικό χαρτί.

Η θεωρία των ελαχίστων τετραγώνων για τον υπολογισμό των σταθερών της ευθείας εφαρμόζεται με ακριβώς ανάλογο τρόπο όπως και στην περίπτωση της ευθείας σε χιλιοστομετρικό χαρτί, με τη μόνη διαφορά ότι τώρα οι τιμές που θα χρησιμοποιήσουμε είναι οι λογάριθμοι των πειραματικών μετρήσεων. Η ακριβής διαδικασία που πρέπει να ακολουθούμε φαίνεται στο ακόλουθο παράδειγμα.

3.4.2.2. Εφαρμογή στην ταλάντωση του απλού εκκρεμούς

Η περίοδος ταλάντωσης T ενός απλού εκκρεμούς για μικρές απομακρύνσεις από τη θέση ισορροπίας δίνεται από τη σχέση :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (3.16)$$

όπου L το μήκος του εκκρεμούς και g η επιτάχυνση της βαρύτητας. Για διάφορα μήκη L του εκκρεμούς μετρήθηκε η περίοδος T . Οι τιμές καταχωρήθηκαν στον Πίνακα Μετρήσεων 3.5.

a/a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
L (cm)	10	20	35	50	75	100	130	160	190	220
T (s)	0.65	0.88	1.17	1.44	1.72	2.02	2.29	2.56	2.73	3.01

Πίνακας 3.5 Πίνακας μετρήσεων της περιόδου ταλάντωσης απλού εκκρεμούς συναρτήσει του μήκους του.

Από τις τιμές του Πίνακα 3.5 σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση $T=f(L)$ σε χιλιοστομετρικό χαρτί (Σχήμα 3.4). Παρατηρούμε ότι η σχέση δεν είναι γραμμική. Τοποθετώντας ωστόσο τις πειραματικές τιμές σε λογαριθμικό χαρτί (Σχήμα 3.5) βλέπουμε ότι προκύπτει ευθεία γραμμή. Η σχέση επομένως που συνδέει την περίοδο T με το μήκος L του εκκρεμούς θα είναι της μορφής 3.13, ή

$$T = cL^n$$

Συγκρίνοντας την παραπάνω σχέση με την 3.16 βλέπουμε ότι θα πρέπει να ισχύει:

$$c = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}$$

και

$$n = \frac{1}{2}$$

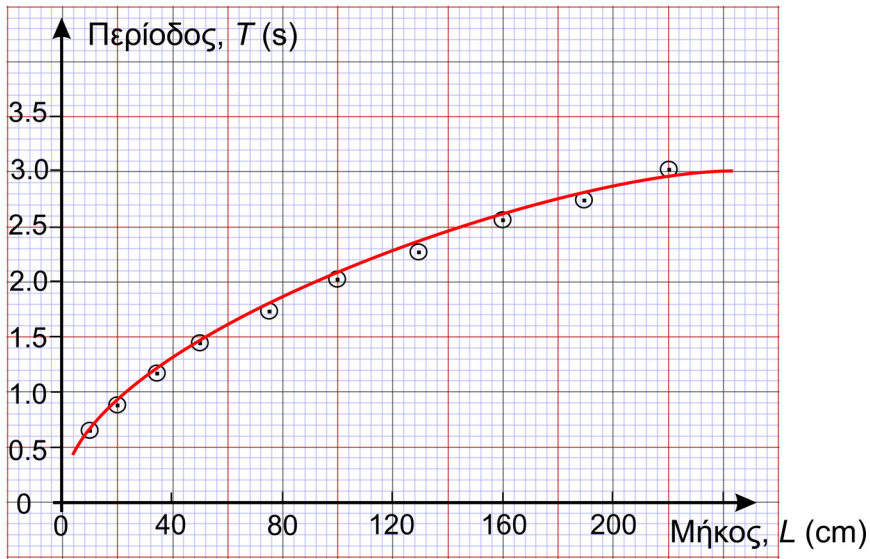
Λογαριθμίζοντας την 3.16 έχουμε:

$$\log T = \log \left(\frac{2\pi}{\sqrt{g}} \right) + \frac{1}{2} \log L$$

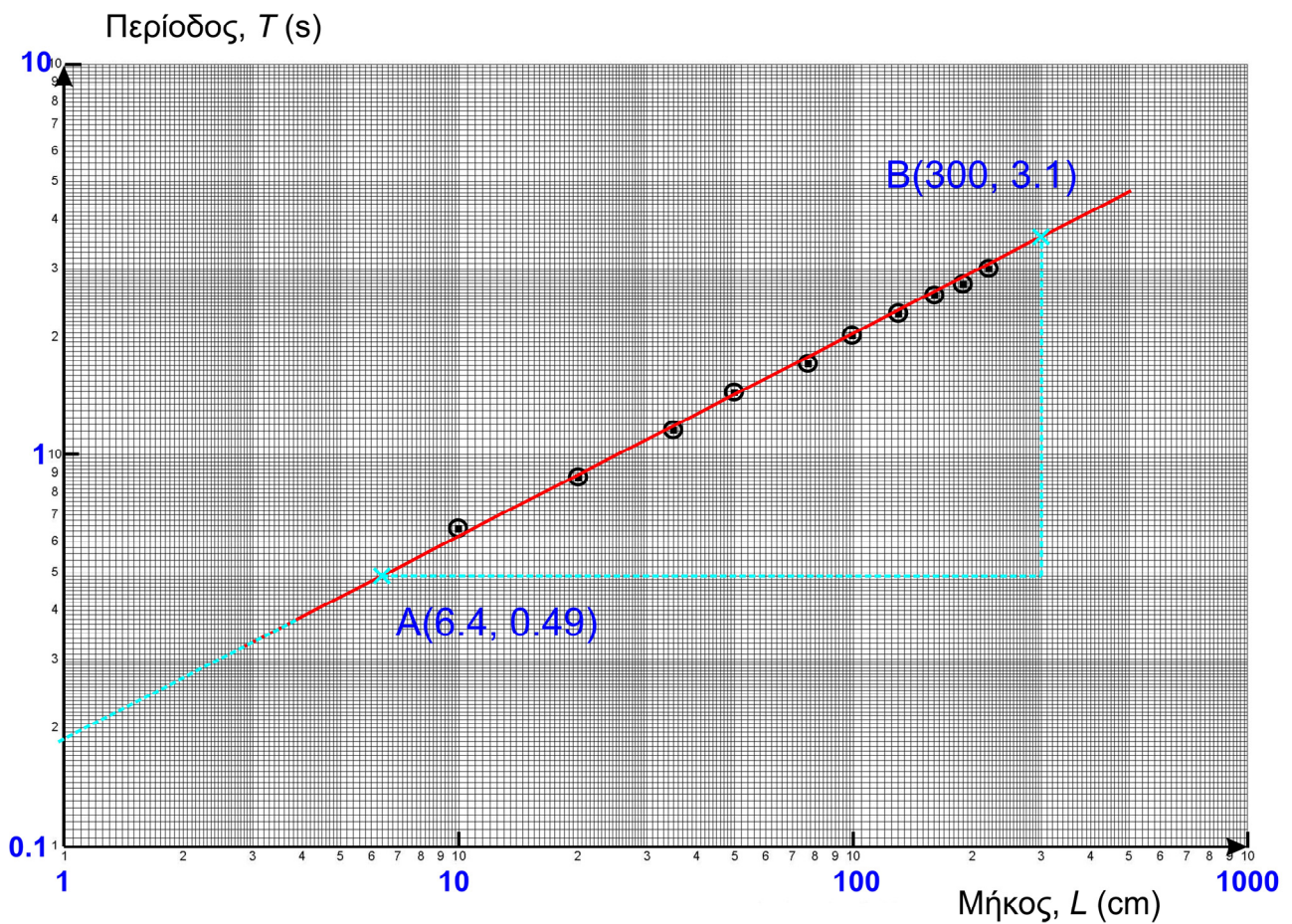
Με άλλα λόγια, η κλίση της $\log T=f(\log L)$ στο Σχήμα 3.5 θα πρέπει να βρεθεί ίση με $1/2$, ενώ η τιμή της περιόδου T , για $L=1$ cm, θα ισούται με $\frac{2\pi}{\sqrt{g}}$. Οι τιμές αυτές μπορούν να βρεθούν είτε από τη γραφική παράσταση κατευθείαν, είτε με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.

Από τα σημεία A και B της ευθείας του Σχήματος 3.5 με συντεταγμένες A(6.4, 0.49) και B(300, 3.1), η κλίση θα ισούται με:

$$n = \frac{\log T_B - \log T_A}{\log L_B - \log L_A} = \frac{\log 3.1 - \log 0.49}{\log 300 - \log 6.4} = \frac{0.49 - (-0.31)}{2.48 - 0.84} = 0.49$$



Σχήμα 3.4 Γραφική παράσταση της περιόδου T εκκρεμούς ως συνάρτηση του μήκους του L σε χιλιοστομετρικό χαρτί.



Σχήμα 3.5 Γραφική παράσταση της περιόδου T ως συνάρτηση του μήκους L του εκκρεμούς σε λογαριθμικό χαρτί.

Η τιμή επομένως του εκθέτη της περιόδου T είναι σε πολύ καλή συμφωνία με την προβλεπόμενη από τη θεωρία τιμή, 0.5. Επίσης, όπως προκύπτει από τη γραφική παράσταση, $T(L=1 \text{ cm})=0.19$. Από τη θεωρητική σχέση $T(L=1) = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}$, μπορεί να προκύψει η πειραματική τιμή της επιτάχυνσης της βαρύτητας, η οποία είναι $g_x=10.93 \text{ m/s}^2$. Η τιμή αυτή αποκλίνει ~11% από τη θεωρητική τιμή, $g=9.81 \text{ m/s}^2$.

Οι προηγούμενες τιμές των σταθερών n και c μπορούν να βρεθούν με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Για το σκοπό αυτό κατασκευάζουμε τον πίνακα ελαχίστων τετραγώνων (Πίνακας 3.6). Στο σημείο αυτό πρέπει να προσέξουμε έτσι ώστε, αντί των μεταβλητών $L (=x)$ και $T (=y)$ στις σχέσεις 3.7 και 3.8, να χρησιμοποιήσουμε τους αντίστοιχους λογαρίθμους $Y=\log y$ και $X=\log x$. Έτσι για $N=10$, θα προκύψουν οι τιμές:

$$n = \frac{N \sum_{i=1}^N \log L_i \log T_i - \sum_{i=1}^N \log L_i \sum_{i=1}^N \log T_i}{N \sum_{i=1}^N (\log L_i)^2 - (\sum_{i=1}^N \log L_i)^2} = \frac{10 \times 4.94 - 18.4 \times 2.21}{10 \times 35.5 - 18.4^2} = 0.50$$

και

$$c = \frac{\sum_{i=1}^N (\log L_i)^2 \sum_{i=1}^N \log T_i - \sum_{i=1}^N \log L_i \sum_{i=1}^N \log L_i \log T_i}{N \sum_{i=1}^N (\log L_i)^2 - (\sum_{i=1}^N \log L_i)^2} = \frac{35.5 \times 2.21 - 18.4 \times 4.94}{10 \times 35.5 - 18.4^2} = -0.70$$

Άρα, $\log \frac{2\pi}{\sqrt{g}} = -0.70$ ή $\frac{2\pi}{\sqrt{g}} = 10^{-0.70}$, οπότε $g=9.91 \text{ m/s}^2$, τιμή που είναι σε καλύτερη συμφωνία με τη θεωρητική τιμή, σε σχέση με την τιμή που βρήκαμε με την γραφική μέθοδο.

a/a	T (s)	L (cm)	$\log T$	$\log L$	$(\log L)^2$	$\log T \cdot \log L$
1	0.65	10	-0.19	1.0	1.0	-0.187
2	0.88	20	-0.056	1.30	1.69	-0.072
3	1.17	35	0.068	1.54	2.38	0.105
4	1.44	50	0.158	1.70	2.89	0.269
5	1.72	75	0.236	1.87	3.52	0.442
6	2.02	100	0.305	2.0	4.0	0.611
7	2.29	130	0.360	2.11	4.47	0.761
8	2.56	160	0.408	2.20	4.86	0.900
9	2.73	190	0.436	2.28	5.19	0.994
10	3.01	220	0.479	2.34	5.49	1.121
ΣΥΝΟΛΑ	$\sum_{i=1}^{10} T_i = 18.47$	$\sum_{i=1}^{10} L_i = 990$	$\sum_{i=1}^{10} \log T_i = 2.21$	$\sum_{i=1}^{10} \log L_i = 18.4$	$\sum_{i=1}^{10} \log L_i^2 = 35.5$	$\sum_{i=1}^{10} \log T_i \cdot \log L_i = 4.94$

Πίνακας 3.6 Πίνακας ελαχίστων τετραγώνων για το παράδειγμα της ταλάντωσης απλού εκκρεμούς.

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι οι ενδιάμεσες στρογγυλοποιήσεις στις πράξεις του πίνακα, μπορεί να επιφέρουν σημαντικές αποκλίσεις στα τελικά αποτελέσματα. Γι αυτόν το λόγο, θα πρέπει να κρατούμε όλα τα ψηφία των ενδιάμεσων πράξεων και να κάνουμε στρογγυλοποίηση μόνον στο τελικό αποτέλεσμα. Ο φοιτητής ενθαρρύνεται να χρησιμοποιεί για τους υπολογισμούς στους πίνακες ελαχίστων τετραγώνων κάποιο λογιστικό φύλλο εργασίας (π.χ. excel) ώστε να είναι σίγουρος ότι οι πράξεις, που θα έκανε σε διαφορετική περίπτωση με την επιστημονική αριθμομηχανή, είναι σωστές και επιπλέον ότι οι υπολογισμοί γίνονται με τη μεγάλη ακρίβεια που διαθέτει ο υπολογιστής. Ο Πίνακας 3.6 των ελαχίστων τετραγώνων, δίνεται ξεχωριστά σε αρχείο excel [εδώ](#), ώστε ο φοιτητής να εξοικειωθεί με τον τρόπο που μπορούμε να εκτελέσουμε τους υπολογισμούς, ελαχιστοποιώντας το χρόνο που χρειάζεται και ταυτόχρονα αποφεύγοντας τα λάθη.

3.4.3. Εκθετική εξάρτηση δύο μεγεθών

3.4.3.1. Εκθετική αναπαράσταση μεγεθών

Σε πολλές περιπτώσεις, μεταξύ δύο φυσικών μεγεθών υπάρχει εκθετική εξάρτηση της μορφής:

$$y = c \cdot e^{nx} \quad (3.17)$$

όπου c και n σταθερές, τις οποίες πρέπει να υπολογίσουμε. Λογαριθμίζοντας την 3.17 με βάση το 10, θα προκύψει τελικά:

$$\log y = \log c + n \cdot x \cdot \log e \Rightarrow \log y = \log c + \frac{n}{2.303} \cdot x \quad (3.18)$$

Κάνοντας επομένως τη γραφική παράσταση των τιμών $(x_i, \log y_i)$ σε χιλιοστομετρικό χαρτί, σχηματίζεται ευθεία με τεταγμένη $\log c = \log y(x=0)$ και κλίση:

$$\frac{n}{2.303} = \frac{\log y_B - \log y_A}{x_B - x_A} \quad (3.19)$$

Η γραφική παράσταση της σχέσης $y=f(x)$ μπορεί να αναπαρασταθεί σε ημιλογαριθμικό χαρτί όπου τοποθετούμε κατευθείαν τις τιμές (x_i, y_i) , χωρίς να χρειαστεί να υπολογίσουμε τους λογάριθμους των y_i . Η διαφορά του ημιλογαριθμικού χαρτιού από το λογαριθμικό είναι ότι μόνο η κάθετη κλίμακα είναι λογαριθμική, ενώ η οριζόντια είναι γραμμική, όπως ακριβώς είναι στο χιλιοστομετρικό χαρτί (Σχήμα 3.6).

3.4.3.2. Εφαρμογή στην αποσβενόμενη ταλάντωση

Αν σε σώμα που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση εξασκηθούν δυνάμεις τριβής, η κίνηση ονομάζεται αποσβενόμενη ταλάντωση και το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται βαθμιαία μέχρι να μηδενιστεί. Στην περίπτωση αυτή, το πλάτος ταλάντωσης του σώματος ακολουθεί εκθετική μείωση με το χρόνο, σύμφωνα με τη σχέση:

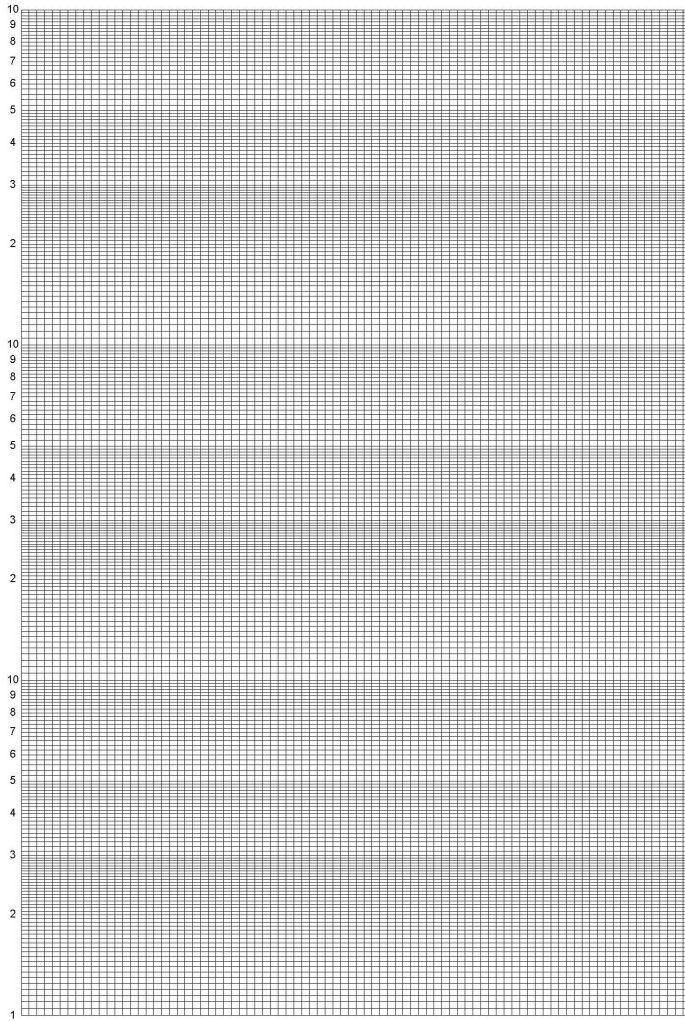
$$L = L_0 e^{-bt/2m} \quad (3.20)$$

όπου L_0 το μέγιστο πλάτος της ταλάντωσης (για $t=0$ s), m η μάζα του ταλαντούμενου σώματος και b θετική σταθερά που ονομάζεται σταθερά απόσβεσης.

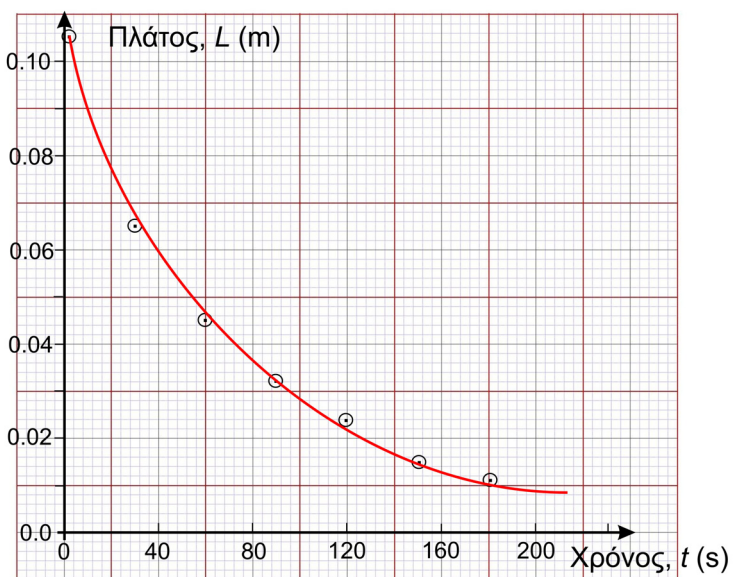
Παρατηρητής μέτρησε για διάφορες χρονικές στιγμές t το πλάτος της ταλάντωσης ενός σώματος. Οι τιμές καταχωρήθηκαν στον Πίνακα 3.7.

a/a	1	2	3	4	5	6	7
t (s)	1.6	29.9	59.9	89.8	119.7	149.6	179.5
L (m)	0.105	0.065	0.044	0.032	0.024	0.015	0.011

Πίνακας 3.7 Πίνακας μετρήσεων του πλάτους αποσβενόμενης ταλάντωσης εκκρεμούς συναρτήσει του χρόνου.



Σχήμα 3.6 Το ημιλογαριθμικό χαρτί, όπου μόνο η κάθετη διεύθυνση είναι λογαριθμική.

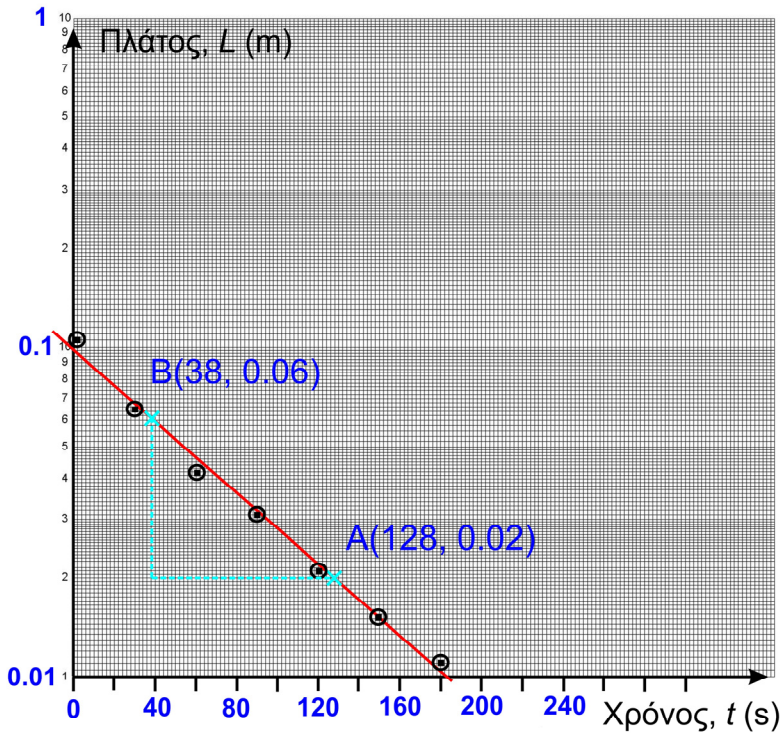


Σχήμα 3.7 Γραφική παράσταση του πλάτους αποσβενόμενης ταλάντωσης L συναρτήσει του χρόνου t , $L=f(t)$ σε χιλιοστομετρικό χαρτί.

Η εκθετική μείωση του πλάτους του ταλαντευόμενου σώματος σε χιλιοστομετρικό χαρτί, απεικονίζεται στο σχήμα 3.7.

Τοποθετώντας τις πειραματικές τιμές σε ημιλογαριθμικό χαρτί (Σχήμα 3.8) βλέπουμε ότι για την σχέση $L=f(t)$ προκύπτει ευθεία γραμμή. Λογαριθμίζοντας την 3.20 και σύμφωνα με την 3.18, προκύπτει:

$$\log L = \log L_o - \frac{b}{2m \cdot 2.303} \cdot t \quad (3.21)$$



Σχήμα 3.8 Γραφική παράσταση του πλάτους αποσβενόμενης ταλάντωσης L συναρτήσει του χρόνου t , σε ημιλογαριθμικό χαρτί.

Από την κλίση επομένως της ευθείας του σχήματος 3.8 και γνωρίζοντας τη μάζα m του σώματος, μπορούμε να προσδιορίσουμε τη σταθερά απόσβεσης b . Από τα σημεία A(128, 0.02) και B(38, 0.06) της ευθείας, η κλίση θα ισούται με:

$$\frac{\log L_B - \log L_A}{T_B - T_A} = \frac{\log 0.06 - \log 0.02}{38 - 128} = 0.0053 \text{ s}^{-1}$$

και συγκρίνοντας με την 3.21, προκύπτει:

$$-\frac{b}{2m \cdot 2.303} = 0.0053 \text{ s}^{-1}$$

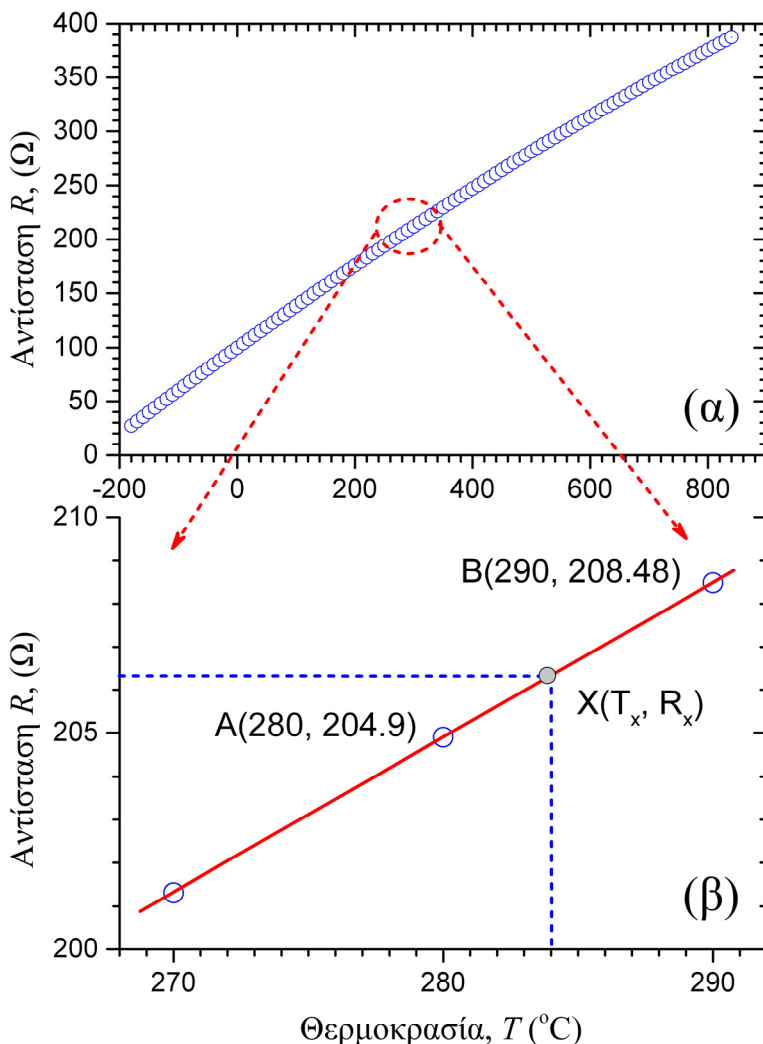
Για $m=0.2865 \text{ kg}$ θα έχουμε τελικά $b=0.007 \text{ kg/s}$.

Ακριβέστεροι υπολογισμοί μπορούν να γίνουν, όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις, με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.

3.5. Πίνακες – Γραμμική Παρεμβολή

Αρκετά συχνά χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε δεδομένα τα οποία παρατίθενται σε μορφή πινάκων και μπορεί να αφορούν σε πειραματικές τιμές δύο εξαρτημένων μεγεθών. Για παράδειγμα, στον Πίνακα 11.7 δίνονται οι τιμές της ηλεκτρικής αντίστασης πλατίνας Pt100 για διάφορες τιμές της θερμοκρασίας (ανά 10 °C), από -200 °C έως 840 °C. Η μεταβολή αυτή δεν είναι γραμμική και περιγράφεται μαθηματικά από μια πολυωνυμική [συνάρτηση](#) 2^{ου} ή 3^{ου} βαθμού ως προς τη θερμοκρασία, ανάλογα με την περιοχή της θερμοκρασίας στην οποία βρίσκεται ο αισθητήρας. Η γραφική παράσταση της αντίστασης με τη θερμοκρασία, για όλο το εύρος θερμοκρασιών λειτουργίας, δίνεται στο Σχήμα 3.9α. Το ζητούμενο είναι να μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή της θερμοκρασίας για οποιαδήποτε μετρούμενη τιμή της ηλεκτρικής αντίστασης, έχοντας στη διάθεσή μας τον πίνακα των τιμών που μας δίνεται.

Ένας απλός τρόπος για να βρούμε ενδιάμεσες τιμές της θερμοκρασίας από αυτές που αναγράφονται στον Πίνακα 11.7, είναι η μέθοδος της γραμμικής παρεμβολής (linear interpolation), όπου υποθέτουμε ότι μεταξύ δύο διαδοχικών τιμών του πίνακα, η μεταβολή της ηλεκτρικής αντίστασης με τη θερμοκρασία είναι γραμμική. Η παραδοχή της γραμμικής εξάρτησης για μικρό εύρος μεταβολών του μετρούμενου μεγέθους είναι σε πολλές περιπτώσεις σωστή (όπως και στην περίπτωση μας), παρόλο που η εξάρτηση των δύο μεγεθών εν γένει δεν ακολουθεί τέτοιου είδους μεταβολή σε όλο το εύρος των τιμών.



Σχήμα 3.9 (α) Γραφική παράσταση της ηλεκτρικής αντίστασης πλατίνας Pt100 ως συνάρτηση της θερμοκρασίας. (β) Θεωρώντας γραμμική μεταβολή της αντίστασης με τη θερμοκρασία για μικρές μεταβολές της θερμοκρασίας, μπορούμε να υπολογίσουμε την αντίσταση R σε οποιαδήποτε θερμοκρασία.

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε την άγνωστη τιμή της θερμοκρασίας T_x , για κάποια συγκεκριμένη τιμή της αντίστασης R_x η οποία βρίσκεται ανάμεσα σε δύο γνωστές τιμές Α και Β του Πίνακα 11.7. Η ζητούμενη τιμή της αντίστασης προκύπτει αν υπολογίσουμε την κλίση της ευθείας από δύο διαφορετικά ζεύγη σημείων, δηλαδή από τα σημεία Α, Β και τα σημεία Α, Χ. Θα ισχύει επομένως:

$$\frac{R_B - R_A}{T_B - T_A} = \frac{R_X - R_A}{T_X - T_A}$$

απ' όπου λύνοντας ως προς T_x γράφουμε

$$T_X = T_A + \frac{T_B - T_A}{R_B - R_A}(R_X - R_A)$$

Με αντικατάσταση των αντίστοιχων τιμών του Πίνακα 11.7, προκύπτει τελικά η άγνωστη τιμή της θερμοκρασίας για μετρούμενη τιμή της ηλεκτρικής αντίστασης, $R_x=206.33\Omega$:

$$T_X = 280 \text{ }^\circ\text{C} + \frac{290 - 280}{208.48 - 204.90}(206.33 - 204.90) \text{ }^\circ\text{C} = 284.0 \text{ }^\circ\text{C}$$

3.6. Ασκήσεις

1. Σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με σταθερή επιτάχυνση a . Η μεταβολή της ταχύτητας του ως προς το χρόνο θα είναι επομένως της μορφής $v = v_0 + at$, όπου v_0 η αρχική του ταχύτητα και a η σταθερή επιτάχυνση. Παρατηρητής μετράει σε διάφορες χρονικές στιγμές την ταχύτητα του σώματος. Οι τιμές καταχωρήθηκαν στον ακόλουθο πίνακα.

a/a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t (s)	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0	11.0	12.0	13.0	14.0
v (m/s)	21.0	25.5	27.1	31.0	32.2	33.9	39.2	42.1	43.0	47.2

- i) Να γίνει η γραφική παράσταση $v=f(t)$ σε χιλιοστομετρικό χαρτί και να υπολογίσετε από αυτή, την αρχική ταχύτητα v_0 και την επιτάχυνση a του σώματος.
 - ii) Να υπολογιστούν τα v_0 και a με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.
2. Σε μια αδιαβατική μεταβολή ενός πολυατομικού αερίου μετρήθηκαν για διάφορες τιμές του όγκου V , η πίεση P του αερίου. Οι μετρήσεις καταχωρήθηκαν στον ακόλουθο πίνακα.

a/a	1	2	3	4	5	6	7
P (Pa)	85.7	58.5	49.5	37.6	28.4	19.2	9.7
V (m ³)	40.8	54.3	61.5	72.4	88.7	118.6	194

Σε μια αδιαβατική μεταβολή ισχύει η σχέση $P = c \cdot V^{-\gamma}$, όπου c και γ σταθερές (για πολυατομικό αέριο $\gamma=1.30$).

- i) Να γίνει η γραφική παράσταση $P=f(V)$ σε χιλιοστομετρικό και λογαριθμικό χαρτί. Να υπολογιστεί γραφικά η σταθερά γ .
 - ii) Να υπολογιστεί η σταθερά γ με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων.
3. Κατά τη φόρτιση ενός πυκνωτή χωρητικότητας C που συνδέεται σε σειρά με ωμική αντίσταση R και πηγή τάσης V_s (κύκλωμα RC), το ρεύμα στο κύκλωμα ελαττώνεται εκθετικά με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $I_c = \frac{V_s}{R} e^{-t/RC}$, όπου V_s/R η αρχική τιμή του ρεύματος. Η τιμή της ποσότητας RC που βρίσκεται στον εκθέτη έχει διαστάσεις χρόνου, ονομάζεται σταθερά χρόνου του κυκλώματος ($\tau=RC$) και εκφράζει το χρονικό διάστημα που απαιτείται ώστε το ρεύμα κατά τη φόρτιση του πυκνωτή να μειωθεί στο $1/e$ της

αρχικής του τιμής. Το ρεύμα που διαρρέει τον πυκνωτή μετρήθηκε σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές και οι μετρήσεις καταχωρήθηκαν στον ακόλουθο πίνακα.

a/a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
t (s)	0	1	2	3	4	5	6	8	10	12	15	20	25
I_C (μΑ)	14.85	13.29	11.68	10.26	8.99	7.92	6.94	5.38	4.16	3.18	2.15	1.13	0.54

- i) Να γίνει η γραφική παράσταση $I_C=f(t)$ σε χιλιοστομετρικό και ημιλογαριθμικό χαρτί. Να υπολογιστεί γραφικά, μέσω της κλίσης, η σταθερά χρόνου, τ .
 - ii) Να υπολογιστεί η σταθερά χρόνου τ με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.
4. Η θερμοκρασία ενός σώματος προσδιορίζεται με τη χρήση αισθητήρα πλατίνας Pt100 ο οποίος είναι τοποθετημένος πάνω σε αυτό. Αν η μετρούμενη τιμή της ηλεκτρικής αντίστασης είναι 122 Ω, προσδιορίστε την ακριβή θερμοκρασία του σώματος με τη βοήθεια του Πίνακα 11.7 και τη μέθοδο της γραμμικής παρεμβολής.

Βιβλιογραφία/Αναφορές

- Καμαράτος, Μ. (2002). *Εισαγωγή στην ανάλυση πειραματικών μετρήσεων. Απλά πειράματα μηχανικής-θερμότητας*. Ιωάννινα: Πανεπιστημιακό Τυπογραφείο.
- Παπαγεωργόπουλος, Χ. (1998). *Εισαγωγή στα Πειράματα Φυσικής (Μηχανικής-Θερμότητας)*. Ιωάννινα: Πανεπιστημιακό Τυπογραφείο.
- Taylor, J. R. (1997). *An Introduction to Error Analysis – The Study of Uncertainties in Physical Measurements (2nd Ed)*. California: University Science Books.

Κεφάλαιο 4 – Εισαγωγή στη στατιστική ανάλυση μετρήσεων

Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται οι βασικές έννοιες της στατιστικής ανάλυσης των μετρήσεων που υπόκεινται σε τυχαία σφάλματα. Παρουσιάζεται μέσω κατάλληλων παραδειγμάτων ο τρόπος με τον οποίο μπορούμε να απεικονίσουμε τις μετρήσεις ενός μεγέθους με τη μορφή ιστογράμματος. Εισάγεται η έννοια της οριακής κατανομής και στη συνέχεια περιγράφεται η κανονική κατανομή ή κατανομή Gauss ως η πιο αντιπροσωπευτική κατανομή που χρησιμοποιείται σε μετρήσεις φυσικών μεγεθών.

Προαπαιτούμενη γνώση

Βασικές έννοιες ολοκληρωτικού λογισμού.

4.1. Τυχαία και συστηματικά σφάλματα

Στο πρώτο κεφάλαιο είδαμε ότι στις μετρήσεις ενός φυσικού μεγέθους υπεισέρχονται συστηματικά και τυχαία σφάλματα τα οποία θα πρέπει να αποτιμηθούν ώστε να εκτιμηθεί η αβεβαιότητα των μετρήσεων μας. Ο τρόπος ωστόσο με τον οποίο διαχειριζόμαστε τις δύο αυτές κατηγορίες σφαλμάτων είναι διαφορετικός. Σε ότι αφορά τα συστηματικά σφάλματα, δεν υπάρχει γενικός κανόνας υπολογισμού τους και θα πρέπει κατά περίπτωση να μπορούμε να τα αναγνωρίσουμε και να τα ποσοτικοποιήσουμε. Το σφάλμα μετάθεσης του μηδενός που υπάρχει σε αρκετά όργανα μετρήσεων, όπως τα μικρόμετρα, τα διαστημόμετρα και τα πολύμετρα, ή το σφάλμα της παράλλαξης κατά την παρατήρηση της κλίμακας ενός οργάνου υπό την ίδια λανθασμένη γωνία παρατήρησης, είναι παραδείγματα συστηματικών σφαλμάτων που απαντώνται συχνά στο φοιτητικό εργαστήριο και πρέπει να είμαστε εξοικειωμένοι με αυτά, ώστε να μπορούμε να τα αποφύγουμε ή να διορθώσουμε κατάλληλα τις μετρήσεις μας (Τρικάλινός, 2014). Από την άλλη πλευρά, τα τυχαία σφάλματα είναι αναπόφευκτα στις πειραματικές μετρήσεις λόγω παραγόντων που δε μπορούμε να γνωρίζουμε ή να ελέγξουμε, όμως με τη βοήθεια της στατιστικής ανάλυσης μπορούμε να υπολογίσουμε την αβεβαιότητα που εισάγουν στις μετρήσεις μας.

Κατά τη μέτρηση ενός φυσικού μεγέθους στο εργαστήριο, είδαμε ότι η αβεβαιότητα της μίας μέτρησης μπορεί να οφείλεται στην περιορισμένη διακριτική ικανότητα του οργάνου που χρησιμοποιούμε. Πολλές φορές βέβαια δεν είναι αρκετή μόνον μία μέτρηση και θα πρέπει να λάβουμε αρκετές μετρήσεις προκειμένου να μπορέσουμε να εκτιμήσουμε τόσο την καλύτερη τιμή του μετρούμενου μεγέθους, όσο και την αβεβαιότητα του. Για παράδειγμα, για τη μέτρηση της χρονικής διάρκειας ενός φαινομένου με ένα χρονόμετρο χειρός, θα υπάρχει πάντα ένα τυχαίο σφάλμα που σχετίζεται με το χρόνο αντίδρασης του πειραματιστή, κατά την έναρξη και λήξη λειτουργίας του χρονομέτρου. Θα πρέπει λοιπόν να επαναλάβουμε τη μέτρηση αρκετές φορές και στη συνέχεια με τη χρήση της στατιστικής ανάλυσης να υπολογίσουμε την καλύτερη τιμή, όπως επίσης και την αβεβαιότητά της. Για το σκοπό αυτό, εισάγαμε στο Κεφάλαιο 3 τις έννοιες της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης, με τις οποίες είναι δυνατό να υπολογίσουμε την πιθανότερη τιμή ενός μετρούμενου μεγέθους και την αβεβαιότητά του. Στις επόμενες ενότητες θα ασχοληθούμε αναλυτικά με τον τρόπο παρουσίασης των πειραματικών μετρήσεων που υπόκεινται σε τυχαία (στατιστικά) σφάλματα και του υπολογισμού των παραμέτρων που συνδέονται με τη στατιστική επεξεργασία τους.

Θα πρέπει να επισημάνουμε ότι η στατιστική επεξεργασία των αποτελεσμάτων σε ένα πείραμα απαιτεί τη λήψη όσο το δυνατόν περισσότερων μετρήσεων. Βέβαια στην πράξη, ο διαθέσιμος χρόνος αλλά και οι αλλαγές στις εξωτερικές συνθήκες που μπορεί να επηρεάσουν το πείραμα, περιορίζουν σημαντικά τον αριθμό των μετρήσεων που λαμβάνουμε. Δε νοείται ωστόσο στατιστική ανάλυση με 3 ή 4 μετρήσεις ενός μεγέθους, οπότε θα πρέπει να αποφεύγεται αυτή η πρακτική. Διαφορετικά, πρέπει να αναφέρεται ρητά ότι ο αριθμός τους είναι αρκετά μικρός για την εξαγωγή ασφαλών συμπερασμάτων.

4.2. Απεικόνιση μετρήσεων με τη μορφή ραβδογράμματος και ιστογράμματος

Έστω ότι μετράμε 12 διαδοχικές φορές τη χρονική διάρκεια ενός φαινομένου με ακρίβεια 0.01 s. Τα αποτελέσματα που λαμβάνουμε αναγράφονται στον Πίνακα 4.1 με τη σειρά που λήφθηκαν οι μετρήσεις. Ο πίνακας αυτός, πέρα από το γεγονός ότι καθιστά διαθέσιμα τα πειραματικά δεδομένα σε οποιονδήποτε άλλο θα ήθελε να τα χρησιμοποιήσει, δε μας παρέχει καμία άλλη πληροφορία για το πώς είναι κατανομημένες οι μετρήσεις μας. Αντιλαμβάνεται κανείς ότι σε περίπτωση που είχαμε μεγάλο αριθμό μετρήσεων, η αναγραφή των πρωτογενών δεδομένων σε μία αναφορά είναι άσκοπη και συνήθως, εφόσον αυτά ζητούνται, επισυνάπτονται ξεχωριστά ως παράρτημα ή ως ένα αρχείο δεδομένων. Προκειμένου η πληροφορία των μετρήσεων να είναι καλύτερα αξιοποιήσιμη, θα μπορούσαμε να κατατάξουμε τις μετρήσεις σε αύξουσα σειρά και μάλιστα για να αποφύγουμε την αναγραφή των ίδιων αριθμητικών αποτελεσμάτων, να αναφέρουμε τη συχνότητα εμφάνισης του κάθε αποτελέσματος. Έτσι, μπορεί να προκύψει ο τροποποιημένος Πίνακας 4.2 ο οποίος είναι πιο συνοπτικός και μας παρέχει καλύτερη εικόνα των μετρήσεων που λάβαμε.

a/a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
T (x 0.01 s)	53	49	53	57	53	49	51	49	53	51	47	53

Πίνακας 4.1 Πίνακας μετρήσεων της χρονικής διάρκειας ενός φυσικού φαινομένου. Τα αριθμητικά αποτελέσματα αναγράφονται ως εκατοστά του δευτερολέπτου.

Μετρήσεις με διαφορετικό αποτέλεσμα, i	1	2	3	4	5
Διαφορετικές τιμές, T_i (x 0.01 s)	47	49	51	53	57
συχνότητα εμφάνισης, f_i	1	3	2	5	1

Πίνακας 4.2 Τροποποιημένος πίνακας μετρήσεων όπου αναγράφονται μόνον τα διαφορετικά αποτελέσματα καθώς και η συχνότητα εμφάνισης του καθενός από αυτά.

Η εκτίμηση της καλύτερης τιμής των μετρήσεων μας ως γνωστό (βλ. σχέση 3.1), ισούται με τη μέση τιμή \bar{T} και είναι

$$\begin{aligned}\bar{T} &= \frac{\sum_{i=1}^{12} T_i}{12} = \frac{T_1 + T_2 + \dots + T_{12}}{12} = \\ &= \frac{(53 + 49 + 53 + 57 + 53 + 49 + 51 + 49 + 53 + 51 + 47 + 53) \times 0.01 \text{ s}}{12} = 0.515 \text{ s}\end{aligned}$$

Διαφορετικά, αν λάβουμε υπόψη τη συχνότητα εμφάνισης της κάθε τιμής, μπορούμε να καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα,

$$\bar{T} = \frac{(47 + 49 \times 3 + 51 \times 2 + 53 \times 5 + 57) \times 0.01 \text{ s}}{1 + 3 + 2 + 5 + 1} = 51.5 \times 0.01 \text{ s} = 0.515 \text{ s}$$

όπου αντί να αθροίσουμε όλες τις πειραματικές τιμές, αθροίσαμε μόνον τα διαφορετικά αποτελέσματα, αφού όμως τα πολλαπλασιάσαμε με τη συχνότητα που εμφανίζεται το καθένα από αυτά.

Γενικά, κατά την επανάληψη της μέτρησης ενός μεγέθους x , N το πλήθος φορές, η καλύτερη εκτίμηση της αληθινής τιμής δίνεται εναλλακτικά από την ακόλουθη σχέση

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \dots + f_Nx_N}{f_1 + f_2 + \dots + f_N} = \frac{\sum_{i=1}^N f_i x_i}{\sum_{i=1}^N f_i} = \frac{\sum_{i=1}^N f_i x_i}{N} \quad (4.1)$$

Το άθροισμα στη σχέση 4.1 ονομάζεται σταθμισμένο άθροισμα και μας παρέχει έναν πιο εύχρηστο τρόπο υπολογισμού της μέσης τιμής ενός μεγέθους. Ορίζοντας την κλασματική συχνότητα εμφάνισης των μετρήσεων, $F_i = f_i/N$, η σχέση 4.1 μπορεί να πάρει τη μορφή

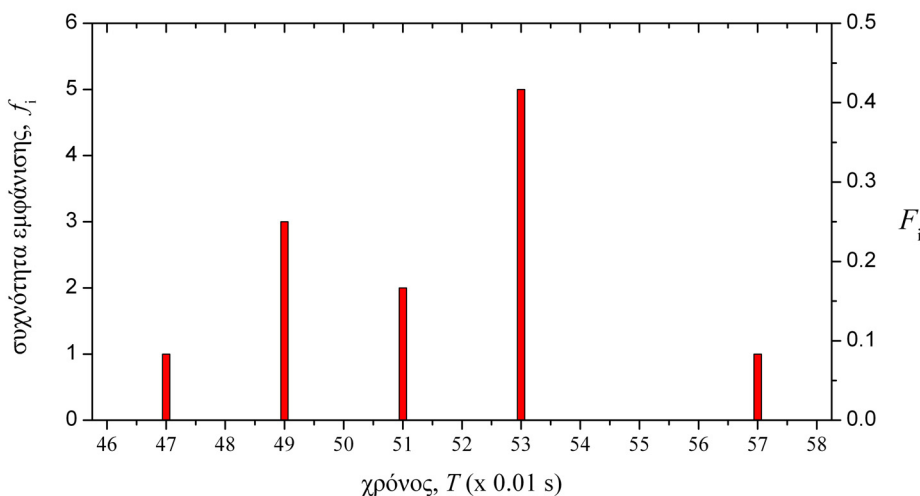
$$\bar{x} = \sum_{i=1}^N F_i x_i \quad (4.2)$$

Αφού $F_i = f_i/N$, θα ισχύει γενικά

$$\sum_{i=1}^N F_i = \frac{\sum_{i=1}^N f_i}{N} = \frac{N}{N} = 1 \quad (4.3)$$

που αποτελεί τη λεγόμενη συνθήκη κανονικοποίησης.

Ο προηγούμενος τρόπος με τον οποίο καταναίμαμε τις μετρήσεις του πειράματος μπορεί να απεικονιστεί σε ένα γράφημα που ονομάζεται ραβδόγραμμα των μετρήσεων (Σχήμα 4.1). Στο ραβδόγραμμα του Σχήματος 4.1, για κάθε ένα από τα διαφορετικά πειραματικά αποτελέσματα που πήραμε, αντιστοιχούμε μία στήλη με ύψος ίσο με τη συχνότητα εμφάνισης της τιμής αυτής, ή εναλλακτικά, με την κλασματική συχνότητα της (βλ. δεξιά άξονα του σχήματος 4.1). Το διάγραμμα αυτό επομένως, μας παρέχει μία εικόνα της κατανομής των αποτελεσμάτων του πειράματος.



Σχήμα 4.1 Ραβδόγραμμα μετρήσεων για τις τιμές του Πίνακα 4.2. Ο κατακόρυφος αριστερός άξονας αναπαριστά τη συχνότητα εμφάνισης των αποτελεσμάτων. Εναλλακτικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την κλασματική συχνότητα εμφάνισης (δεξιός άξονας).

Η κατανομή των αποτελεσμάτων των μετρήσεων υπό τη μορφή ενός ραβδογράμματος είναι κατάλληλη στην περίπτωση που μετράμε μεγέθη που λαμβάνουν διακριτές τιμές (Taylor, 1997). Για παράδειγμα, με τη χρήση ενός ραβδογράμματος μπορούμε να απεικονίσουμε τις βαθμολογίες των μαθητών σε ένα μάθημα όπου οι πιθανές τιμές είναι ακέραιοι αριθμοί σε μία κλίμακα από το 1 έως το 10. Βέβαια, για τα περισσότερα φυσικά μεγέθη κάτι τέτοιο δεν ισχύει, αφού μπορούν να λάβουν οποιαδήποτε τιμή μέσα σε ένα συνεχές διάστημα τιμών. Έτσι, η χρήση ενός ραβδογράμματος στην περίπτωση που όλες οι τιμές διαφέρουν μεταξύ τους θα ήταν ανώφελη, αφού θα μας απεικόνιζε ένα πλήθος στηλών όσων και οι μετρήσεις

μας και ύψους ίσου με τη μονάδα. Γι αυτόν το λόγο, χρησιμοποιούμε για την απεικόνιση της κατανομής των μετρήσεων το λεγόμενο ιστόγραμμα των μετρήσεων, όπως παρουσιάζεται στο επόμενο παράδειγμα.

Έστω ότι πραγματοποιούμε 30 μετρήσεις του μήκους ενός εξαρτήματος μίας μηχανολογικής κατασκευής. Τα αποτελέσματα δίνονται στον Πίνακα 4.3. Δεδομένης της διακριτικής ικανότητας του οργάνου μέτρησης που στην περίπτωση μας είναι 0.01 cm, το μήκος μπορεί να λάβει οποιαδήποτε τιμή με ακρίβεια εκατοστού του cm και τα πιθανά αποτελέσματα βρίσκονται στο διάστημα [8.06, 8.24]. Η παρουσίαση της κατανομής των μετρήσεων αυτών με τη μορφή ενός ραβδογράμματος, όπως στο Σχήμα 4.1, δε θα μας δώσει κάποια ουσιαστική πληροφορία, αφού οι μισές τουλάχιστον από τις μετρήσεις δίνουν διαφορετικό αποτέλεσμα. Αντί αυτού, ομαδοποιούμε τις μετρήσεις σε ένα μικρό πλήθος ομάδων που ονομάζονται κλάσεις ή τάξεις. Με άλλα λόγια, διαιρούμε το διάστημα τιμών που λαμβάνει το μετρούμενο μέγεθος σε έναν κατάλληλο αριθμό διαστημάτων ίδιου εύρους και υπολογίζουμε τον αριθμό των μετρήσεων που βρίσκονται μέσα σε καθένα από τα διαστήματα αυτά. Το πλάτος r όλων των κλάσεων είναι το ίδιο και καθορίζεται από το εύρος R των μετρήσεων μας και το πλήθος των κλάσεων κ , σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση

$$r = \frac{R}{\kappa} = \frac{L_{max} - L_{min}}{\kappa} \quad (4.4)$$

a/a	L (cm)	a/a	L (cm)	a/a	L (cm)
1	8.15	11	8.16	21	8.12
2	8.14	12	8.14	22	8.17
3	8.08	13	8.17	23	8.14
4	8.16	14	8.18	24	8.09
5	8.18	15	8.21	25	8.16
6	8.10	16	8.12	26	8.21
7	8.18	17	8.06	27	8.22
8	8.13	18	8.12	28	8.14
9	8.24	19	8.17	29	8.16
10	8.18	20	8.07	30	8.13

Πίνακας 4.3 Πίνακας 30 μετρήσεων του μήκους ενός εξαρτήματος.

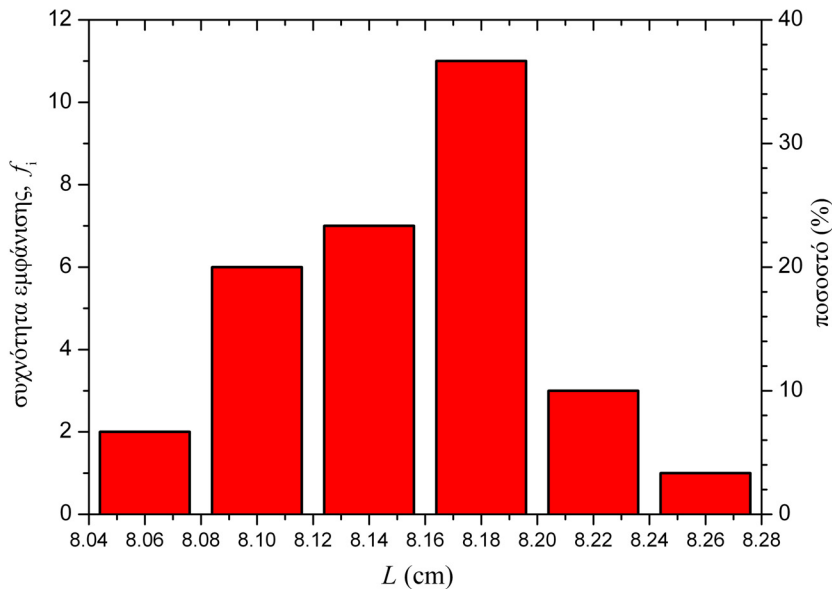
Η επιλογή του πλήθους των κλάσεων είναι σημαντική ώστε να μην χάνετε η απαραίτητη πληροφορία που εμπεριέχει η κατανομή των μετρήσεων μας. Το πλήθος των διαστημάτων αυτών μπορεί να καθοριστεί βάσει του κανόνα του Sturges, σύμφωνα με τον οποίο το κ υπολογίζεται από τη σχέση

$$\kappa = 1 + 3.32 \cdot \log N \quad (4.5)$$

όπου N είναι το πλήθος των μετρήσεών μας (Μαθιουλάκης, 2004). Έτσι, στην περίπτωση των 30 μετρήσεων του παραδείγματος, έχουμε $\kappa \approx 6$. Οι κλάσεις είναι ημι-ανοικτά διαστήματα της μορφής $(\alpha, \beta]$ ή $[\alpha, \beta)$ ώστε τυχόν μετρήσεις που συμπίπτουν με κάποιο άκρο ενός διαστήματος να μη συμπεριληφθούν και στο επόμενο διάστημα. Με τον τρόπο αυτό, οι 30 μετρήσεις κατανέμονται σε 6 κλάσεις, όπως φαίνεται στον Πίνακα 4.4.

Διαστήματα (cm)	[8.04, 8.08)	[8.08, 8.12)	[8.12, 8.16)	[8.16, 8.20)	[8.20, 8.24)	[8.24, 8.28)
Αριθμός μετρήσεων σε κάθε διάστημα	2	6	7	11	3	1
Ποσοστό μετρήσεων(%)	$(2/30) \times 100 = 6.7$	20	23.3	36.7	10	3.3

Πίνακας 4.4 Πίνακας κατανομής των 30 μετρήσεων σε 6 κλάσεις.



Σχήμα 4.2 Ιστόγραμμα μετρήσεων για τις τιμές του Πίνακα 4.3.

Το ιστόγραμμα κατανομής των μετρήσεων κατασκευάζεται αν στην τιμή που αντιστοιχεί στο κέντρο του κάθε διαστήματος (κλάσης) αντιστοιχίσουμε μία στήλη με ύψος ίσο με τον αριθμό των μετρήσεων ή εναλλακτικά, με το επί τοις εκατό ποσοστό τους (Σχήμα 4.2). Έτσι, στο πρώτο διάστημα του παραδείγματος μας, [8.04, 8.08) με κέντρο την τιμή 8.06, αντιστοιχεί μία στήλη ύψους 2, αφού στο διάστημα αυτό περιέχονται μόνο δύο μετρήσεις, οι 8.06 και 8.07, ενώ η μέτρηση 8.08 δεν συμπεριλαμβάνεται, αφού το διάστημα είναι ανοικτό από τα δεξιά. Από το ιστόγραμμα του σχήματος 4.2 έχουμε μία σαφή εικόνα του εύρους των μετρήσεων καθώς και μία πρόχειρη εκτίμηση της πραγματικής τιμής που πρέπει να βρίσκεται στην περιοχή όπου έχουμε τα αποτελέσματα με τη μεγαλύτερη συχνότητα εμφάνισης.

4.3. Η αβεβαιότητα στις μετρήσεις

Εκτός από την εκτίμηση της πραγματικής τιμής ενός φυσικού μεγέθους μέσω της σχέσης 4.1 που αποτελεί ένα γενικευμένο ορισμό της μέσης τιμής, μας ενδιαφέρει επιπλέον να εκτιμήσουμε την αβεβαιότητα των μετρήσεων μας. Θα μπορούσαμε εύλογα να θεωρήσουμε ως έναν εκτιμητή της αβεβαιότητας, τις αποκλίσεις των μετρήσεων από τη μέση τιμή τους, $d_i = x_i - \bar{x}$ που είναι γνωστές και ως υπόλοιπα (residuals). Πράγματι, εάν οι αποκλίσεις των μετρήσεων από τη μέση τιμή είναι μικρές, οι μετρήσεις παρουσιάζουν μικρή διασπορά και πιθανώς έχουν υψηλή ακρίβεια. Αντίθετα, μεγάλες αποκλίσεις αντιστοιχούν σε μετρήσεις μικρής ακρίβειας. Προκειμένου να υπολογίσουμε τη μέση αβεβαιότητα των μετρήσεων πρέπει προφανώς να πάρουμε τη μέση τιμή των αποκλίσεων, αθροίζοντας όλες τις τιμές τους και διαιρώντας με το πλήθος των μετρήσεων. Ωστόσο, επειδή οι αποκλίσεις λαμβάνουν θετικές και αρνητικές τιμές, όταν αθροίζονται μας δίνουν πάντα μηδενικό αποτέλεσμα. Πράγματι, όπως φαίνεται παρακάτω,

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i - \sum_{i=1}^N \bar{x}}{N} = \frac{N\bar{x} - \bar{x} \sum_{i=1}^N 1}{N} = \frac{N\bar{x} - \bar{x}N}{N} = 0$$

οπότε η μέση τιμή των αποκλίσεων δε μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως εκτιμητής της αβεβαιότητας των μετρήσεων ενός μεγέθους. Αν ωστόσο υψώσουμε τις αποκλίσεις στο τετράγωνο, θα έχουμε μόνον θετικές τιμές και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για την εκτίμηση της αβεβαιότητας τη μέση τιμή των τετραγώνων των αποκλίσεων που δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$\sigma_{rms} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (4.6)$$

Η ύπαρξη της τετραγωνικής ρίζας στη σχέση 4.6 διασφαλίζει ότι το αποτέλεσμα θα έχει τις ίδιες μονάδες με το μετρούμενο μέγεθος. Η ποσότητα σ_{rms} ονομάζεται τετραγωνική ρίζα της μέσης τιμής των τετραγώνων των αποκλίσεων (root mean square) και αποτελεί ένα μέτρο της ακρίβειας των μετρήσεων. Το τετράγωνο της ποσότητας αυτής, σ_{rms}^2 , ονομάζεται μεταβλητότητα (variance) των μετρήσεων. Στην πράξη, χρησιμοποιείται μία παραπλήσια σχέση της 4.6 όπου το N έχει αντικατασταθεί με το $N-1$ και αποτελεί την τυπική απόκλιση σ_x των μετρήσεων ενός μεγέθους

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (4.7)$$

Η παραπάνω σχέση 4.7 παρέχει μία καλύτερη εκτίμηση της αβεβαιότητας των μετρήσεων συγκριτικά με τη σχέση 4.6. Ως μία απλοποιημένη απόδειξη αυτού μπορούμε να εξετάσουμε την ακραία περίπτωση της μίας μέτρησης (Μαθιουλάκης, 2004). Για $N=1$, η μέση τιμή θα ταυτίζεται με τη μοναδική μέτρηση και η σχέση 4.6 για την αβεβαιότητα θα μας δώσει μηδενικό αποτέλεσμα, πράγμα ωστόσο που φαντάζει παράλογο για τη μία μόνον μέτρηση που πραγματοποιήσαμε. Αντίθετα, η σχέση 4.7 για $N=1$ καταλήγει σε απροσδιοριστία ($\sigma_x=0/0$), γεγονός που αντανάκλα την άγνοια που έχουμε για τον προσδιορισμό της αβεβαιότητας από τη λήψη μίας και μοναδικής μέτρησης.

Η σχέση 4.7 μας παρέχει μία έκφραση για τον υπολογισμό της αβεβαιότητας της κάθε μίας μέτρησης από τις N μετρήσεις ενός φυσικού μεγέθους, που έχει μέση τιμή \bar{x} . Αν επαναληφθεί το σύνολο των N μετρήσεων του ίδιου μεγέθους, προφανώς θα καταλήξουμε σε διαφορετική μέση τιμή, αφού κάποια αποτελέσματα θα διαφέρουν σίγουρα από τα προηγούμενα. Έτσι λοιπόν, η μέση τιμή δεν παραμένει η ίδια και αποδεικνύεται ότι η αβεβαιότητα της μέσης τιμής εκφράζεται από την ακόλουθη σχέση

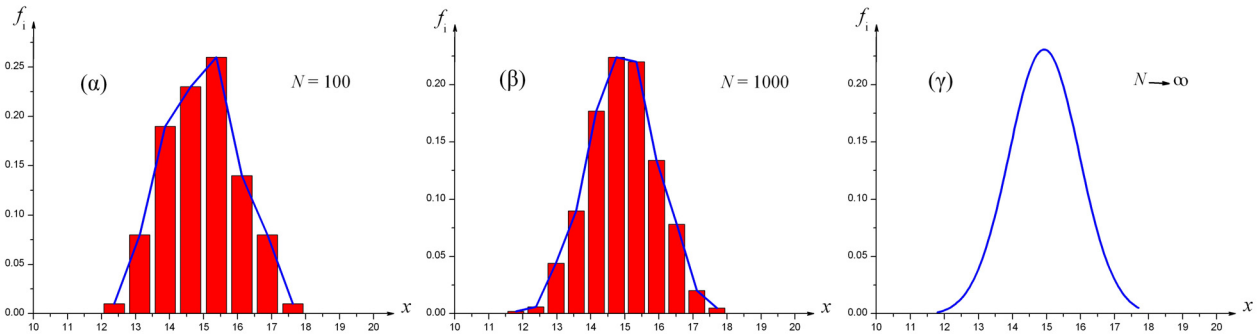
$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (4.8)$$

Ο παράγοντας \sqrt{N} στον παρανομαστή της σχέσης 4.8 μας υποδηλώνει ότι για να αυξηθεί η ακρίβεια των μετρήσεων, θα πρέπει να πραγματοποιήσουμε περισσότερες μετρήσεις. Βέβαια, αν θέλουμε να αυξήσουμε την ακρίβεια στις μετρήσεις ενός μεγέθους κατά έναν παράγοντα 10, θα πρέπει να αυξήσουμε τον αριθμό των μετρήσεων 100 φορές, γεγονός που στην πράξη καθίσταται αδύνατο να πραγματοποιηθεί.

Τελικά θα πρέπει να επισημάνουμε ότι η ορθότητα των μετρήσεων που σχετίζεται με τα συστηματικά σφάλματα δε θα αλλάξει αν αυξήσουμε τον αριθμό των μετρήσεων. Για να λάβουμε ορθότερες μετρήσεις θα πρέπει μάλλον να χρησιμοποιήσουμε μία διαφορετική πειραματική μέθοδο η οποία μας εξασφαλίζει πιστοποιημένα ορθότερα αποτελέσματα.

4.4. Οριακή κατανομή

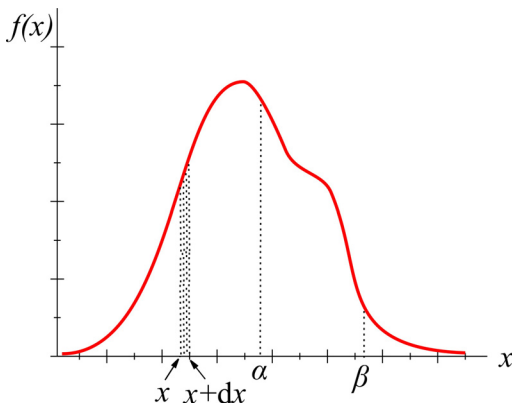
Καθώς ο αριθμός των μετρήσεων σε ένα πείραμα αυξάνεται, η κατανομή των μετρήσεων προσεγγίζει μία ομαλή συνεχή καμπύλη η οποία ονομάζεται οριακή κατανομή και περιγράφεται από τη συνάρτηση $f(x)$ (Taylor, 1997). Έτσι, στα Σχήματα 4.3α και 4.3β αυξάνοντας τον αριθμό των μετρήσεων από $N=100$ σε $N=1000$, η καμπύλη που ενώνει τις κορυφές των στηλών ομαλοποιείται, προσεγγίζοντας την ιδανική περίπτωση μίας ομαλής συμμετρικής καμπύλης, όπως αυτής του Σχήματος 4.3γ που ισχύει για άπειρο θεωρητικά αριθμό μετρήσεων.



Σχήμα 4.3 Καθώς ο αριθμός των μετρήσεων αυξάνεται, η κατανομή τους προσεγγίζει την οριακή κατανομή.

Η σημασία της οριακής κατανομής $f(x)$ ή αλλιώς της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας (probability density function, pdf) έγκειται στο γεγονός ότι το κλάσμα των μετρήσεων που βρίσκονται στο μικρό διάστημα από x έως $x+dx$ ισούται με το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης στήλης στο Σχήμα 4.4, ή διαφορετικά με $f(x)dx$. Με άλλα λόγια, η ποσότητα $f(x)dx$ εκφράζει την πιθανότητα μία μέτρηση να δώσει αποτέλεσμα που βρίσκεται μέσα στο διάστημα $[x, x+dx]$. Αντίστοιχα, η πιθανότητα που υπάρχει μία μέτρηση του μεγέθους να δώσει αποτέλεσμα που βρίσκεται εντός του διαστήματος $[a, \beta]$ θα ισούται με το εμβαδόν κάτω από τη συνάρτηση $f(x)$, μεταξύ των ορίων a και β του διαστήματος, δηλαδή θα εκφράζεται από το ολοκλήρωμα P , ως ακολούθως

$$P(a \leq x \leq \beta) = \int_a^{\beta} f(x)dx \quad (4.9)$$



Σχήμα 4.4 Η καμπύλη παριστάνει μία τυχαία οριακή κατανομή των μετρήσεων ενός φυσικού μεγέθους για θεωρητικά άπειρο πλήθος μετρήσεων.

Επειδή το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη εκφράζει πιθανότητα η οποία δεν μπορεί να υπερβεί το 100% (ή διαφορετικά τη μονάδα), ισχύει ότι το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x)$, όπου το x λαμβάνει όλες τις δυνατές τιμές (θεωρητικά από $-\infty$ έως $+\infty$), πρέπει να ισούται με τη μονάδα. Δηλαδή ισχύει

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \quad (4.10)$$

Η σχέση 4.10 αποτελεί τη λεγόμενη συνθήκη κανονικοποίησης ενώ η συνάρτηση $f(x)$ που ικανοποιεί τη συνθήκη 4.10 αναφέρεται ως κανονικοποιημένη συνάρτηση. Προσέξτε την αναλογία της σχέσης 4.10 με τη σχέση 4.3 που αφορά μεγέθη τα οποία λαμβάνουν διακριτές τιμές.

Στην περίπτωση που έχουμε μεγάλο αριθμό μετρήσεων (θεωρητικά άπειρο), μπορούμε να χωρίσουμε ολόκληρο το εύρος τιμών σε μικρά διαστήματα $[x_i, x_i+dx_i]$, με αποτέλεσμα το κλάσμα των μετρήσεων σε καθένα από αυτά τα διαστήματα να ισούται με $F_i=f(x_i)dx_i$. Στο όριο που τα παραπάνω διαστήματα τείνουν στο μηδέν, η μέση τιμή βάσει της σχέσης 4.2, δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \quad (4.11)$$

Παρόμοια, μπορούμε να υπολογίσουμε την τυπική απόκλιση σ_x των μετρήσεων, υπολογίζοντας το τετράγωνο της, κατ' αντιστοιχία με τη σχέση 4.7

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 f(x)dx \quad (4.12)$$

Όπως και στην περίπτωση που το μετρούμενο μέγεθος λαμβάνει διακριτές τιμές, μικρή τιμή της τυπικής απόκλισης σημαίνει μικρή διασπορά των αποτελεσμάτων γύρω από τη μέση τιμή, δηλαδή μετρήσεις υψηλής ακρίβειας.

Η οριακή κατανομή των μετρήσεων ενός μεγέθους, που πραγματοποιούνται με κάποιο συγκεκριμένο όργανο μέτρησης, μας περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο τα αποτελέσματα κατανέμονται γύρω από μία τιμή, ύστερα από ένα μεγάλο αριθμό μετρήσεων. Γνωρίζοντας επομένως τη συνάρτηση κατανομής $f(x)$, θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τη μέση τιμή των N μετρήσεων του μεγέθους, κατά αντιστοιχία με τον υπολογισμό βάσει της σχέσης 4.2 για πεπερασμένο αριθμό μετρήσεων. Συνήθως βέβαια, η συνάρτηση κατανομής των μετρήσεων ενός φυσικού μεγέθους δεν είναι γνωστή, αλλά προσπαθούμε να την προσεγγίσουμε με μία κατανομή από τις παραμέτρους της οποίας υπολογίζουμε την καλύτερη τιμή και την αβεβαιότητα των μετρήσεων μας.

4.5. Κανονική κατανομή (κατανομή Gauss)

Η μέτρηση ενός φυσικού μεγέθους υπόκειται πάντα σε τυχαία σφάλματα, αλλά αν τα συστηματικά σφάλματα είναι αμελητέα, τα αποτελέσματα των μετρήσεων θα ακολουθούν μία οριακή κατανομή που θα είναι συμμετρική ως προς την αληθινή τιμή του μετρούμενου μεγέθους, ονομάζεται κανονική κατανομή ή κατανομή Gauss και δίνεται από την ακόλουθη μαθηματική συνάρτηση (Formasini, 2008)

$$f_{\mu,\sigma}(x) = e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (4.13)$$

Οι παράμετροι μ και σ της κατανομής καθορίζουν τη θέση της κορυφής της κατανομής, καθώς και το εύρος της που σχετίζεται με τη διασπορά των μετρήσεων. Εναλλακτικά, αντί της ποσότητας σ , μπορεί να χρησιμοποιηθεί το εύρος της κατανομής μετρημένο στο μισό του ύψους της (Full Width at Half Maximum, FWHM), το οποίο αποδεικνύεται ότι συνδέεται με την παράμετρο σ μέσω της ακόλουθης σχέσης

$$FWHM = 2\sigma\sqrt{2\ln 2} \quad (4.14)$$

Η συνθήκη κανονικοποίησης 4.10 επιβάλλει την ύπαρξη μίας σταθεράς K στη συνάρτηση 4.13 ώστε να ισχύει

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Ke^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1 \quad (4.15)$$

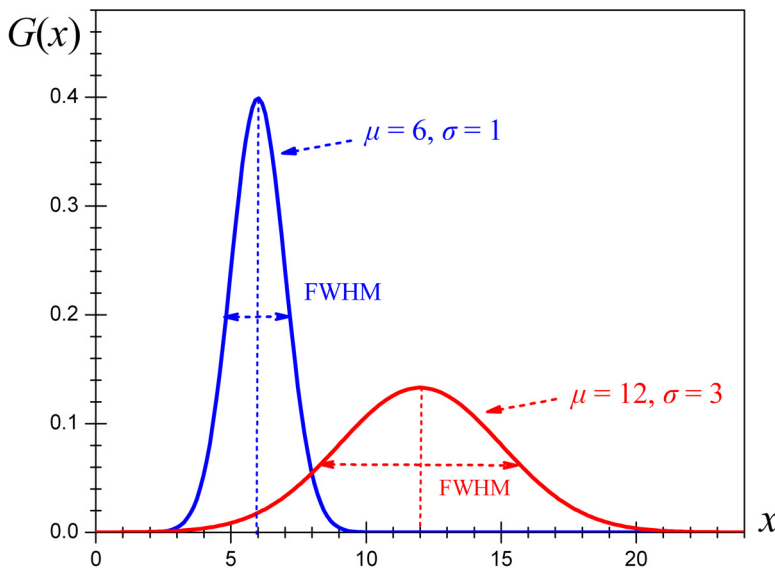
Από τον υπολογισμό του ολοκληρώματος στη συνθήκη 4.15 προκύπτει τελικά ότι η τιμή της σταθεράς είναι

$$K = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

και επομένως, η κανονικοποιημένη συνάρτηση της κατανομής Gauss θα δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$G_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (4.16)$$

Στο Σχήμα 4.5, οι δύο κατανομές Gauss περιγράφονται από την ίδια μαθηματική συνάρτηση της σχέσης 4.14 με διαφορετικές ωστόσο τιμές των παραμέτρων μ και σ . Η παράμετρος μ καθορίζει τη θέση της κορυφής (άρα και ολόκληρης της καμπάνας) στον οριζόντιο άξονα των τιμών των μετρήσεων, ενώ το εύρος της κατανομής καθορίζεται από την παράμετρο σ . Προσέξτε ότι η μεγαλύτερη τιμή του σ στη δεύτερη κατανομή, έχει ως αποτέλεσμα να μειώνεται το ύψος της, προκειμένου και στις δύο περιπτώσεις, το εμβαδόν κάτω από τις δύο καμπύλες να ισούται με τη μονάδα.

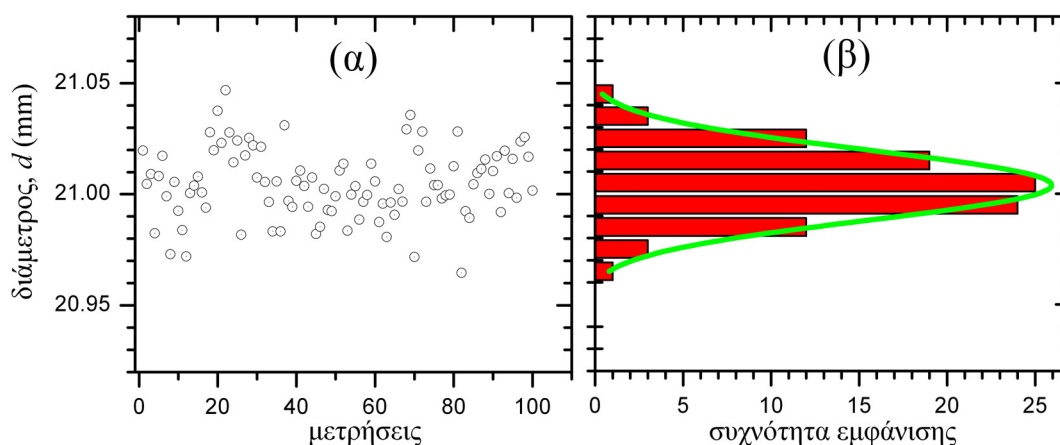


Σχήμα 4.5 Κατανομές Gauss για διαφορετικές τιμές των παραμέτρων μ και σ . Σε κάθε περίπτωση οι καμπάνες Gauss περιγράφονται από τη μαθηματική συνάρτηση της σχέσης 4.16.

Ένα παράδειγμα όπου η κατανομή των μετρήσεων ενός μεγέθους προσεγγίζεται με την κατανομή Gauss, δίνεται στο Σχήμα 4.6. Στο Σχήμα 4.6α απεικονίζονται οι 100 μετρήσεις της διαμέτρου d ενός κυλινδρικού εξαρτήματος που μετρήθηκαν με όργανο μεγάλης ακρίβειας και βρίσκονται στο διάστημα από 20.95 mm έως 21.05 mm. Το ιστόγραμμα των μετρήσεων αυτών έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 4.6β με την συνεχή καμπύλη να αντιστοιχεί στην κανονική κατανομή. Η θέση της κορυφής είναι στην τιμή $\mu=21.004$ mm και το σ ισούται με 0.032 mm. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, οι παράμετροι μ και σ αντιστοιχούν στη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των μετρήσεων ενός μεγέθους που ακολουθεί την κανονική κατανομή.

Η μέση τιμή των μετρήσεων ενός μεγέθους που ακολουθεί την κανονική κατανομή θα δίνεται από τη σχέση 4.11, όπου η συνάρτηση $f(x)$ της οριακής κατανομής θα είναι η συνάρτηση Gauss της σχέσης 4.16. Έτσι, θα έχουμε

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x G_{\mu,\sigma}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \quad (4.17)$$



Σχήμα 4.6 (α) 100 μετρήσεις της διαμέτρου ενός εξαρτήματος. (β) Το ιστόγραμμα των μετρήσεων προσεγγίζεται πολύ καλά με μία κανονική κατανομή. (Τις μετρήσεις μπορείτε να τις βρείτε [εδώ](#)).

Για τον υπολογισμό του προηγούμενου ολοκληρώματος κάνουμε αλλαγή μεταβλητής θέτοντας $y=x-\mu$, οπότε θα ισχύει $dx=dy$ και $x=y+\mu$. Με αντικατάσταση των παραπάνω στην 4.17, προκύπτει

$$\bar{x} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (y + \mu) e^{-y^2/2\sigma^2} dy = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} y e^{-y^2/2\sigma^2} dy + \mu \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2\sigma^2} dy \right) \quad (4.18)$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα στο άθροισμα της σχέσης 4.18 είναι μηδέν γιατί η συνάρτηση $y e^{-y^2/2\sigma^2}$ είναι περιττή και η συνεισφορά στο ολοκλήρωμα από οποιοδήποτε σημείο y ακυρώνεται από την αντίστοιχη στο $-y$. Η τιμή του δεύτερου ολοκληρώματος βρίσκεται από πίνακες ότι ισούται με $\sigma\sqrt{2\pi}$. Προκύπτει επομένως από την 4.18 ότι η μέση τιμή των μετρήσεων είναι ίση με την παράμετρο μ της συνάρτησης Gauss. Το αποτέλεσμα βέβαια αυτό ισχύει στην περίπτωση που ο αριθμός των μετρήσεων είναι θεωρητικά άπειρος. Στην πράξη, για μεγάλο αλλά πεπερασμένο αριθμό μετρήσεων, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η μέση τιμή των μετρήσεων βρίσκεται κοντά στο μ .

Κατά ανάλογο τρόπο μπορεί να προκύψει η τυπική απόκλιση των μετρήσεων που ακολουθούν την κανονική κατανομή, βάσει της σχέσης 4.12, όπου η συνάρτηση της οριακής κατανομής είναι η $G_{\mu,\sigma}(x)$. Πράγματι,

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 G_{\mu,\sigma}(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \quad (4.19)$$

Θέτοντας αυτή τη φορά $y=x-\mu$ και $y/\sigma=z$, οπότε $(x-\mu)/\sigma=z$, θα ισχύει $dx=dy=\sigma dz$ και η σχέση 4.19 θα γίνει

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^2 z^2 e^{-z^2/2} \sigma dz = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-z^2/2} dz \quad (4.20)$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα της 4.20 αποδεικνύεται ότι ισούται με $(2\pi)^{1/2}$, οπότε τελικά προκύπτει από την 4.20 ότι

$$\sigma_x^2 = \sigma^2$$

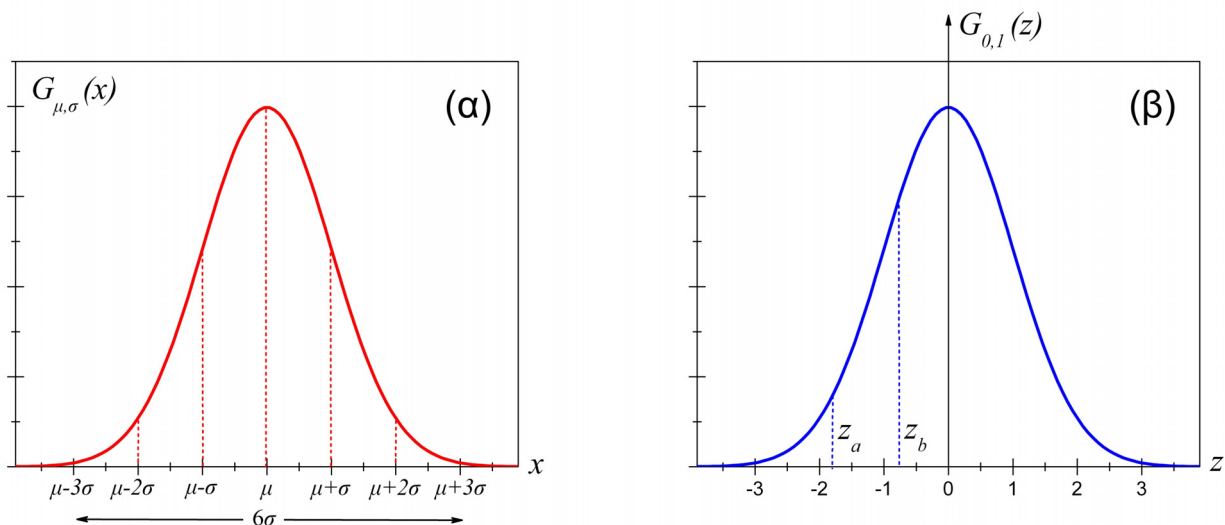
Επομένως, η παράμετρος πλάτους σ της κατανομής Gauss ισούται με την τυπική απόκλιση των μετρήσεων σ_x , στην περίπτωση βέβαια που το πλήθος τους είναι μεγάλο.

Η πιθανότητα μία μέτρηση ενός μεγέθους x που ακολουθεί κανονική κατανομή να βρίσκεται εντός του διαστήματος $[a, \beta]$ δίνεται βάσει της σχέσης 4.9 από το ακόλουθο ολοκλήρωμα

$$P(a \leq x \leq \beta) = \int_a^\beta G_{\mu,\sigma}(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^\beta e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \quad (4.21)$$

Το ολοκλήρωμα αυτό όταν $a, \beta \neq \pm\infty$, δεν είναι δυνατόν να υπολογιστεί αναλυτικά και παρέχονται πίνακες με τις τιμές του ολοκληρώματος σε διάφορες περιπτώσεις. Στην περίπτωση που το διάστημα $[a, \beta]$ είναι συμμετρικό γύρω από τη μέση τιμή των μετρήσεων, δηλαδή την κορυφή μ της κατανομής, τότε αυτό μπορεί να γραφεί στη μορφή $[\mu-t\sigma, \mu+t\sigma]$, όπου η σταθερά t μπορεί να πάρει οποιαδήποτε θετική τιμή. Πρακτικά, για τιμές του t μεγαλύτερες του 3, το ολοκλήρωμα ισούται με τη μονάδα, δηλαδή το εύρος της κατανομής Gauss είναι 6σ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.7α. Οι τιμές του ολοκληρώματος 4.21 για διάφορες τιμές του παράγοντα t δίνονται στον Πίνακα 11.4. Όπως προκύπτει από τον Πίνακα 11.4, για $t=1$, η αντίστοιχη πιθανότητα είναι $P(t - \sigma \leq x \leq t + \sigma) = 68\%$.

Από τα παραπάνω καταλήγουμε στο σημαντικό συμπέρασμα, ότι κατά τη μέτρηση ενός μεγέθους πολλές το πλήθος φορές, κάνοντας χρήση της ίδιας μεθόδου όπου όλες οι πηγές αβεβαιότητας είναι μικρές και τυχαίες, τα αποτελέσματα θα κατανέμονται ομοιόμορφα γύρω από τη μέση τιμή, σύμφωνα με την κατανομή Gauss και το 68% των αποτελεσμάτων αυτών θα βρίσκεται στην περιοχή εύρους $2\sigma_x$ εκατέρωθεν της μέσης τιμής. Η πραγματοποίηση μίας επιπλέον μέτρησης θα έχει πιθανότητα 68% να βρεθεί μέσα στο διάστημα αυτό.



Σχήμα 4.7 (α) Το εύρος της κατανομής Gauss είναι πρακτικά ίσο με 6σ . (β) Η τυπική κανονική κατανομή $G_{0,1}(z)$ με μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση 1.

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος της σχέσης 4.21 όταν το διάστημα $[a, \beta]$ δεν είναι συμμετρικό καταφεύγουμε στην αλλαγή μεταβλητής που εφαρμόσαμε προηγουμένως για τον υπολογισμό της τυπικής απόκλισης της κατανομής. Θέτοντας στη συνάρτηση Gauss (Σχέση 4.16) $z=(x-\mu)/\sigma$, προκύπτει η ακόλουθη συνάρτηση

$$G_{0,1}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \quad (4.22)$$

που ονομάζεται τυπική κανονική κατανομή, με μέση τιμή και τυπική απόκλιση 0 και 1, αντίστοιχα (Σχήμα 4.7β). Έτσι, το ολοκλήρωμα της σχέσης 4.21 για την εύρεση της αντίστοιχης πιθανότητας θα γίνει

$$P(a \leq x \leq \beta) = P(z_\alpha \leq z \leq z_\beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{z_\alpha}^{z_\beta} e^{-z^2/2} \sigma dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_\alpha}^{z_\beta} e^{-z^2/2} dz \quad (4.23)$$

όπου τα όρια του ολοκληρώματος α και β με την αλλαγή της μεταβλητής από x σε z έχουν αντικατασταθεί με τα

$$z_\alpha = \frac{\alpha - \mu}{\sigma}$$

και

$$z_\beta = \frac{\beta - \mu}{\sigma}$$

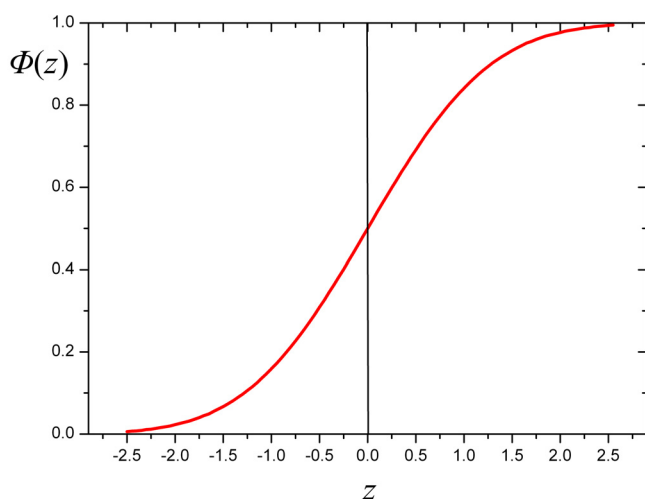
Από την 4.23 θα έχουμε για την πιθανότητα ότι

$$P(z_\alpha \leq z \leq z_\beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_\alpha}^{z_\beta} e^{-z^2/2} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_\beta} e^{-z^2/2} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_\alpha} e^{-z^2/2} dz = \Phi(z_\beta) - \Phi(z_\alpha)$$

Η συνάρτηση $\Phi(z)$ ονομάζεται συνάρτηση αθροιστικής κατανομής και μας παρέχει το εμβαδόν κάτω από την τυπική κανονική κατανομή από το $-\infty$ έως μία καθορισμένη τιμή z , σύμφωνα με τη σχέση

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-z^2/2} dz \quad (4.24)$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\Phi(z)$ απεικονίζεται στο Σχήμα 4.8. Για $z=0$, η τιμή της συνάρτησης είναι 0.5, η οποία αντιστοιχεί στο μισό εμβαδόν κάτω από την καμπύλη του Σχήματος 4.7β. Για $z>2.5$, πρακτικά το εμβαδόν είναι σχεδόν ίσο με τη μονάδα. Οι τιμές της συνάρτησης $\Phi(z)$ για διάφορες τιμές του z δίνονται στον Πίνακα 11.5.



Σχήμα 4.8 Η συνάρτηση αθροιστικής κατανομής $\Phi(z)$ για τιμές του z από -2.5 έως $+2.5$.

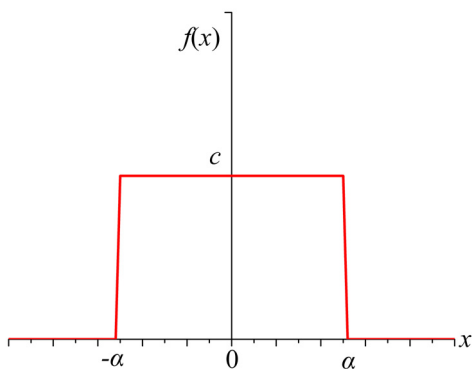
4.6. Ασκήσεις

1. Στη γραμμή παραγωγής ελατηρίων μας ενδιαφέρει να γνωρίζουμε τη σταθερά k που είναι ένα μέτρο της σκληρότητας τους. Επειδή ωστόσο είναι δαπανηρό αλλά και χρονοβόρο να εκτελούμε ικανοποιητικό αριθμό μετρήσεων για κάθε ένα από τα ελατήρια ξεχωριστά, επιλέγουμε ένα ελατήριο για το οποίο λαμβάνουμε 10 μετρήσεις της σταθεράς του k , ενώ όλα τα υπόλοιπα μετρώνται μόνον μία φορά. Οι μετρήσεις που λαμβάνουμε για το πρώτο ελατήριο δίνονται στον Πίνακα 4.5. Ποια είναι η αβεβαιότητα της σταθεράς k του ελατηρίου αυτού; Τι μπορούμε να αποφανθούμε για την αβεβαιότητα στη σταθερά k όλων των υπόλοιπων ελατηρίων; Θεωρούμε ότι όλα τα ελατήρια είναι κατασκευαστικά πανομοιότυπα και η μέτρηση της σταθεράς τους k γίνεται με την ίδια μέθοδο.

a/a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k (N/m)	54	55	58	52	54	56	53	55	54	57

Πίνακας 4.5 Πίνακας μετρήσεων της σταθεράς k ενός ελατηρίου.

2. Η πιο απλή κατανομή μετρήσεων που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για ένα μέγεθος είναι η ορθογώνια κατανομή (Σχήμα 4.9), όπου όλα τα αποτελέσματα έχουν την ίδια πιθανότητα εμφάνισης, μέσα στο διάστημα $[-a, a]$ που το μέγεθος μπορεί να λάβει τιμές. Η συνάρτηση έχει σταθερή τιμή μέσα στο εύρος τιμών των αποτελεσμάτων $[-a, a]$ και μηδενική εκτός αυτού. Υπολογίστε την τιμή c της συνάρτησης για $x=0$, χρησιμοποιώντας τη συνθήκη κανονικοποίησης. Βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των μετρήσεων που ακολουθούν την ορθογώνια κατανομή. Υπολογίστε την πιθανότητα μία μέτρηση να βρεθεί μέσα στο διάστημα $[a/2, a]$. (Για όλα τα παραπάνω, δεν είναι απαραίτητο να χρησιμοποιηθούν ολοκληρώματα αφού ο υπολογισμός εμβαδών αφορά απλά γεωμετρικά σχήματα).



Σχήμα 4.9 Η ορθογώνια κατανομή μετρήσεων.

3. Ένας αριθμός 40 επαναλαμβανόμενων μετρήσεων της διαμέτρου d ενός κυλίνδρου έδωσε μέση τιμή 7.25 cm και τυπική απόκλιση για την κάθε μέτρηση 0.15 cm. Υπολογίστε την τυπική απόκλιση της μέσης τιμής της διαμέτρου. Θεωρώντας ότι οι μετρήσεις ακολουθούν την κανονική κατανομή, υπολογίστε την πιθανότητα μία μέτρηση της διαμέτρου να βρίσκεται στο διάστημα από 7.05 cm έως 7.45 cm.

Βιβλιογραφία/Αναφορές

- Μαθιουλάκης, Μ. (2004). *Μέτρηση, Ποιότητα Μέτρησης και Αβεβαιότητα*. Αθήνα: Ελληνική Ένωση Εργαστηρίων.
- Τρικαλινός, Χ. (2014). *Εισαγωγή στη θεωρία Σφαλμάτων (σημειώσεις)*. Αθήνα: Εθνικό Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών.
- Formasini, P. (2008). *The Uncertainty in Physical Measurements – An Introduction to Data Analysis in the Physics Laboratory*. New York: Springer.
- Taylor, J. R. (1997). *An Introduction to Error Analysis – The Study of Uncertainties in Physical Measurements (2nd Ed)*. California: University Science Books.

Κεφάλαιο 5 – Κριτήρια απόρριψης απόμακρων τιμών

Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται δύο κριτήρια απόρριψης απομακρυσμένων από τη μέση τιμή πειραματικών μετρήσεων ενός φυσικού μεγέθους και συγκεκριμένα τα κριτήρια Chauvenet και Peirce. Λόγω παραδοχών που γίνονται καθώς και των αβεβαιοτήτων των δύο μεθόδων, τα κριτήρια αυτά θα πρέπει να χρησιμοποιούνται με επιφύλαξη και μόνον εφόσον αποκλείσουμε την ύπαρξη συστηματικών σφαλμάτων στις μετρήσεις μας ή αδυνατούμε να τις επαναλάβουμε.

Προαπαιτούμενη γνώση

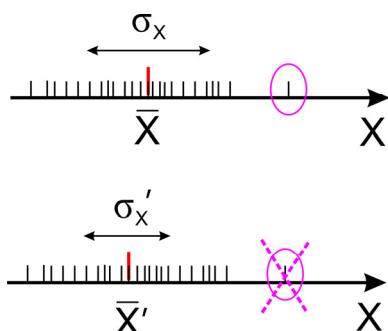
Μέση τιμή και τυπική απόκλιση μέσης τιμής (κεφ. 3.1), κανονική κατανομή (κεφ. 4.3)

5.1. Γενικά περί κριτηρίων απόρριψης “ύποπτων” πειραματικών δεδομένων

Αρκετές φορές, μία μέτρηση σε ένα σύνολο N μετρήσεων μοιάζει να αποκλίνει αισθητά από τις υπόλοιπες, δημιουργώντας την εντύπωση ότι μπορεί να είναι λανθασμένη. Θα πρέπει λοιπόν να αποφασίσουμε αν θα κρατήσουμε ή όχι αυτή την “ύποπτη” τιμή για τους περαιτέρω υπολογισμούς μας (μέση τιμή και αβεβαιότητα), γιατί προφανώς τα αποτελέσματα σε κάθε περίπτωση θα είναι διαφορετικά (Σχήμα 5.1).

Στο σημείο αυτό, οι απόψεις διίστανται και μερικοί επιστήμονες υποστηρίζουν ότι δε θα πρέπει να απορρίπτονται μετρήσεις που μοιάζουν ασυνήθιστες σε σχέση με το αποτέλεσμα που πιθανώς περιμέναμε, τουλάχιστον χωρίς επαρκή αιτιολόγηση. Μάλιστα, η ασυνήθιστη αυτή μέτρηση μπορεί να εμπεριέχει κάποια ιδιάζουσα συμπεριφορά ή κάποιο σημαντικό φαινόμενο για το μέγεθος που μετράμε. Πριν λοιπόν αποφασίσουμε για το αν θα πρέπει να προβούμε σε περαιτέρω έλεγχο για πιθανή απόρριψη κάποιας μέτρησης ή όχι, θα πρέπει να αποκλείσουμε μια σειρά από άλλους παράγοντες που πιθανώς επέδρασαν στιγμιαία και “αλλοίωσαν” τις μετρήσεις μας. Η καλύτερη λύση στην περίπτωση αυτή (εφόσον βέβαια αυτό είναι εφικτό) είναι να επαναλάβουμε τις μετρήσεις, ώστε να διαπιστώσουμε αν η απομακρυσμένη τιμή εξακολουθεί να εμφανίζεται. Σε ένα σύνολο βέβαια πολλών μετρήσεων, μία και μόνον απόμακρη τιμή δεν αναμένεται να αλλοιώσει ουσιαστικά τη μέση τιμή και την αβεβαιότητα των μετρήσεων. Ωστόσο, δεν είναι πάντα δυνατόν εκ των υστέρων να διαπιστώσουμε πιθανά πειραματικά λάθη που αλλοίωσαν κάποιες μετρήσεις, ενώ είναι πιθανό να μην μπορούμε (ή να μην έχουμε χρόνο) να επαναλάβουμε το πείραμα. Μόνον τότε, θα πρέπει να καταφύγουμε σε κάποιο αντικειμενικό κριτήριο απόρριψης απόμακρων τιμών.

Στη συνέχεια παρατίθενται δύο κριτήρια βασισμένα στη θεωρία των πιθανοτήτων, το κριτήριο Chauvenet και το κριτήριο Peirce. Αν και μεταγενέστερο, το κριτήριο Chauvenet έχει επικρατήσει και χρησιμοποιείται ευρύτατα από ερευνητικά κέντρα, πανεπιστήμια, εργαστήρια και τη βιομηχανία (Taylor, 1997). Χρησιμοποιεί ωστόσο όπως θα δούμε, μία αυθαίρετη υπόθεση για την απόρριψη δεδομένων, σε αντίθεση με το κριτήριο Peirce που δεν κάνει τέτοιου είδους παραδοχή. Αξίζει να σημειωθεί, ότι τα δύο αυτά κριτήρια, μπορεί να δώσουν διαφορετικά αποτελέσματα για το ίδιο σύνολο πειραματικών δεδομένων.



Σχήμα 5.1 Η απομακρυσμένη πειραματική τιμή (σημειώνεται σε κύκλο) αν δε ληφθεί υπόψη, θα δώσει μικρότερη μέση τιμή και αβεβαιότητα για το μετρούμενο μέγεθος X .

5.2. Κριτήριο Chauvenet

Η διαδικασία με την οποία μπορούμε να απορρίψουμε μία ύποπτη πειραματική τιμή κάνοντας χρήση του κριτηρίου Chauvenet, δίνεται μέσω του παραδείγματος που ακολουθεί. Επισημαίνουμε ότι ο έλεγχος της απόρριψης αφορά στη μέτρηση ενός σταθερού φυσικού μεγέθους για το οποίο λαμβάνουμε αρκετές σε πλήθος πειραματικές μετρήσεις, ακολουθώντας κάθε φορά την ίδια πειραματική διαδικασία.

Εστω ότι μετράμε 10 φορές την περίοδο ταλάντωσης ενός εκκρεμούς, όπου κρατώντας σταθερό το μήκος του νήματος, παίρνουμε τα αποτελέσματα που δίνονται στον Πίνακα 5.1.

a/a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Περίοδος, T (s)	2.10	2.08	2.17	1.98	2.04	1.58	1.94	2.03	1.89	1.93

Πίνακας 5.1 Περίοδος ταλάντωσης εκκρεμούς.

Ο υπολογισμός της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης (standard deviation) δίνει τα ακόλουθα αποτελέσματα:

$$\bar{T} = 1.97 \text{ s και } \sigma_T = 0.16 \text{ s}$$

Από τις μετρήσεις του Πίνακα 5.1 βλέπουμε ότι η 6^η μέτρηση ($T_6=1.58$) διαφέρει αισθητά από τις υπόλοιπες και θα πρέπει να αποφασίσουμε αν θα την κρατήσουμε ή όχι. Γι αυτόν το λόγο, υπολογίζουμε τη διαφορά της απόμακρης αυτής τιμής από τη μέση τιμή και εκφράζουμε το αποτέλεσμα αυτό ως συνάρτηση της τυπικής απόκλισης:

$$|1.58 - \bar{T}| = |1.58 - 1.97| = 0.39 = \frac{0.39}{0.16} \sigma_T = 2.44\sigma_T$$

Εφόσον έχουμε αποκλείσει ή διορθώσει κάθε είδους συστηματικό σφάλμα στις μετρήσεις μας, τα διαφορετικά αποτελέσματα οφείλονται μόνον σε τυχαία σφάλματα, οπότε θεωρούμε ότι οι μετρήσεις μας ακολουθούν κανονική κατανομή με μέση τιμή και τυπική απόκλιση, $\bar{T} = 1.97 \text{ s}$ και $\sigma_T = 0.16 \text{ s}$, αντίστοιχα. Η πιθανότητα P επομένως να μετρήσουμε μία τιμή η οποία είναι απομακρυσμένη κατά $2.44\sigma_T$ από τη μέση τιμή, σύμφωνα με τα όσα αναφέρθηκαν για την κανονική κατανομή, θα είναι:

$$\begin{aligned} P[T \in (\text{εκτός του } \pm 2.44\sigma_T)] &= P[T \in (-\infty, \bar{T} - 2.44\sigma_T) \cup (\bar{T} + 2.44\sigma_T, +\infty)] = \\ &= 1 - P[T \in (\bar{T} - 2.44\sigma_T, \bar{T} + 2.44\sigma_T)] = 1 - 0.985 = 0.015 \end{aligned}$$

όπου η πιθανότητα το T να βρίσκεται σε διάστημα εύρους $2.44\sigma_T$ εκατέρωθεν της μέσης τιμής \bar{T} προήλθε από τον Πίνακα 11.4.

Πρακτικά, το παραπάνω αποτέλεσμα σημαίνει ότι σε ένα σύνολο $N=100$ μετρήσεων που ακολουθούν την κατανομή Gauss με μέση τιμή $\bar{T} = 1.97 \text{ s}$ και τυπική απόκλιση $\sigma_T = 0.16 \text{ s}$, περίπου 1.5 – 2 μετρήσεις θα απέκλιναν από τη μέση τιμή $\bar{T} = 1.97 \text{ s}$ κατά όσο αποκλίνει στην περίπτωση μας η “ύποπτη” τιμή $T_6=1.58 \text{ s}$. Όμως, για $N=10$ μετρήσεις, ο αναμενόμενος αριθμός των μετρήσεων που αποκλίνουν κατά $2.44\sigma_T$ από τη μέση τιμή θα είναι:

$$(\text{αναμενόμενος αριθμός αποκλίνουσων μετρήσεων}) =$$

$$N \cdot P[T \in (\text{εκτός του } 2.44\sigma_T)] = 10 \cdot 0.015 = 0.15$$

Με άλλα λόγια, περιμένουμε για την περίπτωση μας όπου έχουμε $N=10$ μετρήσεις, ένα ποσοστό 15% από αυτές να αποκλίνουν όσο αποκλίνει και η “ύποπτη” μας τιμή (το 1.58), πράγμα δηλαδή απίθανο.

Το κριτήριο Chauvenet θέτει (αυθαίρετα) το όριο για τον αναμενόμενο αριθμό των μετρήσεων που αποκλίνουν τουλάχιστον όσο και η ύποπτη μέτρηση, στο 1/2. Δηλαδή,

αν $N \cdot P < \frac{1}{2}$, η ύποπτη τιμή απορρίπτεται,

ενώ

αν $N \cdot P \geq \frac{1}{2}$, η ύποπτη τιμή είναι αποδεκτή

Στην περίπτωση που απορρίψουμε βάσει του κριτηρίου κάποια ύποπτη τιμή, θα πρέπει να υπολογίσουμε εκ νέου τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των υπόλοιπων $N-1$ μετρήσεων μας. Έτσι, στο παράδειγμα μας, θα έχουμε τελικά ότι η νέα μέση τιμή \bar{T}' και η τυπική απόκλιση $\sigma_{T'}$ των 9 μετρήσεων, θα είναι:

$$\bar{T}' = 2.02 s \text{ και } \sigma_{T'} = 0.09 s$$

Υπάρχει περίπτωση και για τις υπόλοιπες $N-1$ μετρήσεις, κάποια μέτρηση να μοιάζει πάλι απόμακρη. Ωστόσο, το παραπάνω κριτήριο απόρριψης τιμών θα πρέπει να εφαρμόζεται μόνον μία φορά. Εφόσον δηλαδή, εφαρμόσαμε το κριτήριο απόρριψης Chauvenet για τον έλεγχο κάποιας ύποπτης τιμής την οποία τελικά και απορρίψαμε, δε δικαιούμαστε να το εφαρμόσουμε εκ νέου στις υπόλοιπες $N-1$ μετρήσεις.

Σε περίπτωση βέβαια που έχουμε παραπάνω από μία απόμακρη μέτρηση, ο έλεγχος μπορεί να εφαρμοστεί και για τις δύο ή για κάθε μία από αυτές τις δύο μετρήσεις. Αν έχουμε για παράδειγμα σε ένα σύνολο N μετρήσεων ενός μεγέθους x , δύο ύποπτες τιμές x_1 και x_2 και έστω ότι η x_2 είναι πιο απόμακρη από την x_1 , θα εφαρμόσουμε το κριτήριο απόρριψης για τη λιγότερο απόμακρη τιμή, τροποποιημένο ωστόσο, ώστε να συνυπολογίζει και τη $2^{\text{η}}$ απόμακρη τιμή. Δηλαδή, αν $N \cdot P < 1 (= \frac{1}{2} \cdot 2)$, τότε θα απορρίψουμε κατευθείαν και τις δύο υποψήφιες τιμές. Αν όμως $N \cdot P \geq 1$, οι τιμές δεν απορρίπτονται ταυτόχρονα και θα πρέπει να ελέγξουμε την πιο απόμακρη τιμή (δηλαδή τη x_2) κατά πόσον πληροί το κριτήριο ($N \cdot P < 1/2$), ώστε να απορρίψουμε (ή όχι) μόνον αυτή.

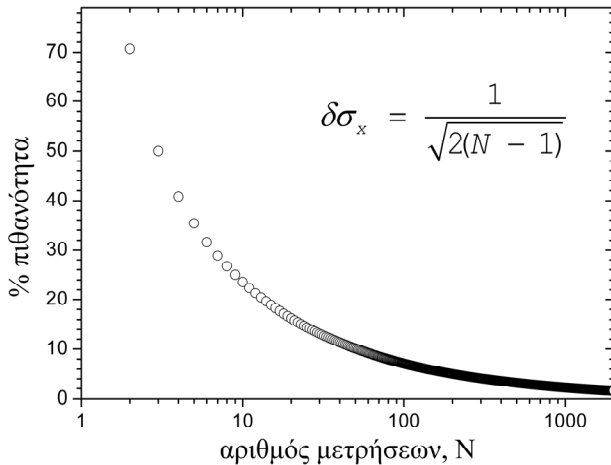
Θα πρέπει να επισημάνουμε ότι το κριτήριο Chauvenet κάνει μία αυθαίρετη παραδοχή ($N \cdot P < 1/2$), βάσει της οποίας αποδεχόμαστε ή απορρίπτουμε μία πειραματική τιμή. Επιπλέον, και ίσως και σημαντικότερο, είναι το γεγονός ότι για μικρό αριθμό μετρήσεων, η αβεβαιότητα στον προσδιορισμό της τυπικής απόκλισης είναι μεγάλη. Η αβεβαιότητα της τυπικής απόκλισης μίας μέτρησης ενός μεγέθους σε συνάρτηση του N , εκφράζεται για την κανονική κατανομή μέσω της ακόλουθης σχέσης:

$$\delta\sigma_x = \frac{1}{\sqrt{2(N-1)}}$$

Η παραπάνω μεταβολή του $\delta\sigma_x$ ως προς το N (σε λογαριθμική κλίμακα) απεικονίζεται στο Σχήμα 5.2. Για την προηγούμενη περίπτωση των $N=10$ μετρήσεων, η αβεβαιότητα αυτή είναι 24%, ενώ για μικρότερο αριθμό μετρήσεων αυξάνεται ακόμα περισσότερο. Πρακτικά, όταν $N>50$, η πιθανότητα γίνεται μικρότερη του 10%. Αυτό οδηγεί σε μεγάλη αβεβαιότητα στον υπολογισμό της αντίστοιχης πιθανότητας

$$P[x \in (\text{εκτός του } t \cdot \sigma_T)], \text{ όπου } t = \frac{|x_v - \bar{x}|}{\sigma_x}, \text{ με } x_v \text{ την ύποπτη τιμή,}$$

και κατά συνέπεια σε αμφιβολία για την εφαρμογή ολόκληρης της διαδικασίας.



Σχήμα 5.2 Μεταβολή της αβεβαιότητας της τυπικής απόκλισης $\Delta\sigma_x$, ως συνάρτηση του αριθμού των μετρήσεων, N . Προσέξτε ότι ο αριθμός των μετρήσεων στον οριζόντιο άξονα παριστάνεται σε λογαριθμική κλίμακα.

5.3. Κριτήριο Peirce

Σε αντίθεση με το κριτήριο Chauvenet, το κριτήριο Peirce δεν κάνει την αυθαίρετη υπόθεση για την απόρριψη δεδομένων και μπορεί να εφαρμοστεί εύκολα για περισσότερες από μία απόμακρες πειραματικές τιμές (Ross, 2003). Η αρχική ωστόσο μέθοδος υπολογισμού από τον Peirce αποδεικνύεται στη χρήση της μαθηματικά περίπλοκη και στην πράξη χρησιμοποιείται με τη βοήθεια κατάλληλων πινάκων βασισμένων στο κριτήριο Peirce, οι οποίοι δημοσιεύτηκαν σε μεταγενέστερο χρόνο από τον Gould. Η διαδικασία που ακολουθούμε αφορά στα ακόλουθα βήματα:

1. Υπολογίζουμε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλισή της για το σύνολο των μετρήσεών μας.
2. Από τον πίνακα τιμών της παραμέτρου R (βλ. Πίνακα 11.6), βρίσκουμε την θεωρητική τιμή R_0 που αντιστοιχεί στο πλήθος των μετρήσεων μας για την περίπτωση μίας ύποπτης μέτρησης (ακόμα και αν υπάρχουν περισσότερες). Η παράμετρος R δίνεται από τη σχέση:

$$R = \frac{|x_i - \bar{x}|_{max}}{\sigma_x}$$

3. Υπολογίζουμε τη μέγιστη επιτρεπόμενη απόκλιση, $|x_i - \bar{x}|_{max}$
4. Για κάθε ύποπτη τιμή, υπολογίζουμε την ποσότητα $|x_i - \bar{x}|$
5. Απορρίπτουμε τις ύποπτες τιμές εφόσον:

$$|x_i - \bar{x}| > |x_i - \bar{x}|_{max}$$

6. Αν βάσει του προηγούμενου κριτηρίου απορρίφθηκε μία τιμή, υποθέτουμε την περίπτωση δύο απόμακρων τιμών, κρατώντας την αρχική μέση τιμή και τυπική απόκλιση και συνεχίζουμε στο βήμα 8.
7. Αν παραπάνω από μία τιμή απορρίφθηκε στον προηγούμενο έλεγχο, υποθέτουμε την επόμενη μεγαλύτερη τιμή των ύποπτων μετρήσεων στον αντίστοιχο πίνακα. Αν δηλαδή, απορρίφθηκαν 2 τιμές βάσει του κριτηρίου στο βήμα 5, υποθέτουμε την ύπαρξη 3 ύποπτων τιμών, κρατώντας ωστόσο τον αρχικό αριθμό μετρήσεων, μέσης τιμής και τυπικής απόκλισης.
8. Επαναλαμβάνουμε τα βήματα 2 – 5, αυξάνοντας σταδιακά τον αριθμό των πιθανά ύποπτων τιμών, μέχρι να μην απορρίπτονται πλέον άλλα δεδομένα.
9. Υπολογίζουμε εκ νέου τη μέση τιμή και τυπική απόκλιση, εξαιρώντας τις μετρήσεις που απορρίψαμε.

Με τη χρήση κατάλληλου λογισμικού (π.χ. EXCEL, ORIGIN, κ.ά.) μπορούμε να επιταχύνουμε την παραπάνω διαδικασία, ώστε να υπολογίσουμε τις αποκλίσεις όλων των τιμών μας από τη μέση τιμή και σε συνδυασμό με τις τιμές του Πίνακα Peirce, να αποφανθούμε για την πιθανή απόρριψη απόμακρων τιμών.

Στο παράδειγμα που ακολουθεί, εφαρμόζεται το παραπάνω κριτήριο σε ένα σύνολο 10 μετρήσεων της πίεσης P σε ένα δοχείο (Σχήμα 5.3).

Οι υποψήφιες προς απόρριψη τιμές είναι οι $P_2=90.0$ kPa και $P_7=89.0$ kPa.

Η θεωρητική τιμή του R για $N=10$ και μία “ύποπτη” τιμή είναι σύμφωνα με τον πίνακα, $R_\theta = 1.878$.

Στη 2^η στήλη έχουν υπολογιστεί οι τιμές R_i για κάθε μία από τις μετρήσεις μας, ενώ δίνονται και οι στατιστικές παράμετροι των μετρήσεων ($\bar{P} = 98.6$ kPa και $\sigma_P = 5.02$ kPa).

Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι, για την τιμή $P_7=89.0$ kPa ισχύει $1.912 > R_\theta$, ενώ για την τιμή $P_2=90.0$ kPa ισχύει $1.713 < R_\theta$.

Επομένως, σε πρώτη φάση απορρίπτεται η τιμή 89.0, ενώ η τιμή 90.0 είναι αποδεκτή.

Θεωρώντας από τον Πίνακα $N=10$ και δύο ύποπτες τιμές, θα έχουμε $R_\theta = 1.570$, για την οποία η τιμή που αντιστοιχεί στη μέτρηση 90.0 είναι μεγαλύτερη. Κατά συνέπεια, απορρίπτεται και αυτή η τιμή.

Long N	Pi	Ri
Units	(kPa)	
Comm		
1	101.2	0.51793
2	90.0	1.71315
3	99.0	0.07968
4	102.0	0.67729
5	103.0	0.87649
6	100.2	0.31873
7	89.0	1.91235
8	98.1	0.0996
9	101.5	0.57769
10	102.0	0.67729

Descriptive Statistics

	N total	Mean	Standard Deviation	Sum	Minimum	Median	Maximum
Pi	10	98.6	5.0193	986	89	100.7	103

Σχήμα 5.3 Πίνακας πειραματικών μετρήσεων της πίεσης P και υπολογισμών σταθεράς R για την εφαρμογή του κριτηρίου Peirce.

Θεωρώντας στη συνέχεια τρεις ύποπτες τιμές, θα έχουμε από τον Πίνακα, $R_\theta = 1.380$. Για καμία από τις υπόλοιπες μετρήσεις η αντίστοιχη τιμή του R δεν είναι μεγαλύτερη από αυτή την τιμή. Επομένως, καμία άλλη τιμή δεν απορρίπτεται και η διαδικασία τελειώνει στο σημείο αυτό. Μετά την απόρριψη των δύο τιμών, υπολογίζουμε εκ νέου τη νέα μέση τιμή και την αντίστοιχη τυπική απόκλιση, ($\bar{P} = 100.9$ kPa και $\sigma_P = 1.66$ kPa). Αξίζει να σημειωθεί, ότι εφαρμόζοντας το κριτήριο Chauvenet, καμία από τις δύο προηγούμενες τιμές (89.0 και 90.0) δεν απορρίπτονται.

5.4. Ασκήσεις

1. Ένας φοιτητής μέτρησε 20 φορές την τάση V σε ένα κύκλωμα και υπολόγισε ότι η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση είναι $\bar{V} = 50$ mV και $\sigma_V = 3$ mV, αντίστοιχα. Παρατήρησε ωστόσο ότι μία από τις μετρούμενες τιμές ήταν $V_0 = 56$ mV. Ποια η πιθανότητα να μετρήσει μία τέτοια τιμή; Αν αποφασίζει να χρησιμοποιήσει το κριτήριο Chauvenet, θα απέρριπτε την ύποπτη αυτή τιμή;
2. Από τις μετρήσεις του ύψους L ενός ορθού κυλίνδρου προέκυψαν τα αποτελέσματα του Πίνακα 5.2. Εξετάστε, κάνοντας χρήση του κριτηρίου Chauvenet, κατά πόσο η τιμή 55.5 mm μπορεί να θεωρηθεί απομακρυσμένη και υπολογίστε στη συνέχεια τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση.

a/a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ύψος, L (mm)	46.0	47.5	55.5	44.5	43.5	44.0	46.5	45.0	48.0	47.0

Πίνακας 5.2 Μετρήσεις ύψους ορθού κυλίνδρου.

3. Για τις τιμές του Πίνακα 5.2, εφαρμόστε το κριτήριο Peirce για να διαπιστώσετε αν απορρίπτεται ή όχι η ύποπτη τιμή 55.5 mm.

Βιβλιογραφία/Αναφορές

- Ross, S. M. (2003). Peirce's criterion for the elimination of suspect experimental data. *Journal of Engineering Technology*, Fall 2003, 1-12.
- Taylor, J. R. (1997). *An Introduction to Error Analysis – The Study of Uncertainties in Physical Measurements (2nd Ed)*. California: University Science Books.

Κεφάλαιο 6 – Διάδοση αβεβαιοτήτων

Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφεται ο τρόπος με τον οποίο μπορούμε να υπολογίσουμε την αβεβαιότητα σε μία σύνθετη μέτρηση. Αρχικά δίνονται προσεγγιστικοί τρόποι υπολογισμού της αβεβαιότητας σε απλές περιπτώσεις όπου εμφανίζονται αθροίσματα, διαφορές, γινόμενα ή πηλίκα φυσικών μεγεθών. Περιγράφεται ο τρόπος υπολογισμού της αβεβαιότητας ενός φυσικού μεγέθους, το οποίο είναι συνάρτηση μίας μεταβλητής ποσότητας, και ακολουθεί η γενίκευση για την περίπτωση της συνάρτησης πολλών μεγεθών που είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα.

Προαπαιτούμενη γνώση

Κεφάλαιο 1, στοιχεία διαφορικού λογισμού.

6.1. Η αβεβαιότητα στις απλές και σύνθετες μετρήσεις

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η μέτρηση πολλών παράγωγων φυσικών μεγεθών είναι σύνθετη διαδικασία, που σημαίνει ότι το αποτέλεσμα δεν προκύπτει κατευθείαν μέσω της σύγκρισης με την πρότυπη μονάδα, αλλά θα πρέπει να μετρήσουμε ένα ή περισσότερα άλλα θεμελιώδη φυσικά μεγέθη από τα οποία θα υπολογίσουμε στη συνέχεια το ζητούμενο, χρησιμοποιώντας μία γνωστή μαθηματική σχέση. Για παράδειγμα, η μέτρηση της μέσης ταχύτητας v ενός κινητού μπορεί να πραγματοποιηθεί μετρώντας την απόσταση Δx μεταξύ δύο συγκεκριμένων σημείων από τα οποία διέρχεται το κινητό και το αντίστοιχο χρονικό διάστημα Δt που χρειάζεται για να διέλθει από αυτά. Στη συνέχεια, υπολογίζουμε τη μέση ταχύτητα από τη γνωστή σχέση, $v = \Delta x / \Delta t$. Ένα άλλο παράδειγμα είναι ο υπολογισμός του εμβαδού μιας ορθογώνιας επιφάνειας για τον οποίο θα πρέπει να μετρήσουμε ξεχωριστά τις δύο διαστάσεις της a, b και στη συνέχεια να υπολογίσουμε το ζητούμενο εμβαδόν από τη σχέση $E = ab$.

Στα προηγούμενα παραδείγματα, όπως και σε κάθε περίπτωση σύνθετης μέτρησης ενός φυσικού μεγέθους, οι μετρήσεις που πραγματοποιούνται εμπεριέχουν αβεβαιότητες τις οποίες πρέπει να υπολογίσουμε. Προφανώς, οι αβεβαιότητες αυτές υπεισέρχονται και στον τελικό υπολογισμό του ζητούμενου μεγέθους. Ο τρόπος με τον οποίο μπορούμε να υπολογίσουμε την αβεβαιότητα στο τελικό αποτέλεσμα μίας σύνθετης μέτρησης είναι ο σκοπός του κεφαλαίου αυτού και περιγράφεται στις επόμενες ενότητες.

Στο Κεφάλαιο 1.6 είδαμε ότι κατά τη μέτρηση ενός φυσικού μεγέθους X εκφράζουμε το αποτέλεσμα ως

$$X = X_0 \pm \delta X$$

όπου η αριθμητική τιμή X_0 αποτελεί την ένδειξη του αναλογικού ή ψηφιακού οργάνου μέτρησης και το δX εκφράζει την αβεβαιότητα, λόγω της περιορισμένης διακριτικής ικανότητας του οργάνου. Επομένως, ένας παράγοντας αβεβαιότητας σε μία απλή ή σύνθετη μέτρηση σχετίζεται με την ανάγνωση της αναλογικής ή ψηφιακής κλίμακας των οργάνων μέτρησης. Ωστόσο, είναι σημαντικό να μην επικεντρωνόμαστε μόνον σε αυτό το είδος αβεβαιότητας, γιατί μπορεί κάλλιστα να μας οδηγήσει σε σημαντική υποεκτίμηση της συνολικής αβεβαιότητας της μέτρησης. Για παράδειγμα, κατά τη μέτρηση της περιόδου ταλάντωσης ενός εκκρεμούς με ένα ψηφιακό χρονόμετρο ακρίβειας 0.01 s προκύπτει ως αποτέλεσμα η τιμή 2.36 s. Άρα, το αποτέλεσμα της μέτρησης αυτής μπορεί να γραφεί ως

$$T = (2.36 \pm 0.01) \text{ s}$$

όπου παρατηρούμε ότι η αβεβαιότητα της μέτρησης είναι πολύ μικρή. Αν ωστόσο επαναλάβουμε τη μέτρηση με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, ενδέχεται να βρούμε μία διαφορετική τιμή, π.χ.

$$T = (2.58 \pm 0.01) \text{ s}$$

Η εξήγηση στη μεγάλη αυτή διαφορά μεταξύ των δύο αποτελεσμάτων, η οποία παραπέμπει σε αβεβαιότητα μεγαλύτερη από την ακρίβεια του χρησιμοποιούμενου χρονομέτρου, βρίσκεται στο γεγονός ότι το αποτέλεσμα της μέτρησης επηρεάζεται καθοριστικά από το χρόνο αντίδρασης του πειραματιστή κατά την έναρξη και λήξη λειτουργίας του χρονομέτρου. Στην καλύτερη περίπτωση, ο χρόνος αυτός θα μπορούσε να είναι 1-2 δέκατα του δευτερολέπτου. Άρα, στην προκειμένη περίπτωση, η αβεβαιότητας στη μέτρηση του χρόνου είναι 10 με 20 φορές μεγαλύτερη από αυτή που υποδηλώνει η ακρίβεια του οργάνου μέτρησης που χρησιμοποιούμε. Περιπτώσεις όπου η αβεβαιότητα της μέτρησης είναι μεγαλύτερη από την ακρίβεια που μας παρέχει το όργανο μέτρησης, είναι αρκετά συνηθισμένες στο φοιτητικό εργαστήριο.

Από τα παραπάνω γίνεται κατανοητό ότι δε θα πρέπει να υποεκτιμούμε τους διάφορους παράγοντες που συνεισφέρουν με διαφορετικό βαθμό στην αβεβαιότητα των μετρήσεων ενός μεγέθους. Ο παράγοντας με τη μεγαλύτερη αβεβαιότητα είναι αυτός που τελικά καθορίζει την αβεβαιότητα στο τελικό αποτέλεσμα. Έτσι λοιπόν, λόγω των αβεβαιοτήτων που υπεισέρχονται στη μέτρηση ενός μεγέθους από διάφορους παράγοντες, κρίνεται σκόπιμη η μέτρηση του μεγέθους αρκετές φορές. Στην περίπτωση αυτή είδαμε ότι η εκτίμηση της καλύτερης τιμής ενός μεγέθους X εκφράζεται από τη μέση τιμή του μεγέθους αυτού, ενώ η αβεβαιότητα των N μετρήσεων δίνεται από την τυπική απόκλιση της μέσης τιμής, σύμφωνα με τη σχέση 3.2.

Σε κάθε περίπτωση, στις επόμενες ενότητες, είτε μετράμε μία μόνον φορά ένα μέγεθος είτε πραγματοποιούμε ένα μεγάλο αριθμό μετρήσεων, θα χρησιμοποιήσουμε για την αβεβαιότητα στη μέτρηση του μεγέθους X το συμβολισμό δX , ενώ η εκτίμηση της καλύτερης τιμής θα δίνεται από την τιμή X_b .

6.2. Απλοί κανόνες υπολογισμού αβεβαιότητας σύνθετων μετρήσεων

6.2.1. Η αβεβαιότητα σε αθροίσματα και διαφορές φυσικών μεγεθών

6.2.1.1. Υπολογισμός αβεβαιότητας αθροίσματος και διαφοράς

Έστω ότι μετράμε δύο φυσικά μεγέθη X και Y και θέλουμε να υπολογίσουμε το άθροισμα, $X+Y$ ή τη διαφορά τους, $X-Y$. Για τον υπολογισμό της αβεβαιότητας στις δύο αυτές περιπτώσεις, πρέπει να βρούμε τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη πιθανή τιμή που μπορεί να πάρει το άθροισμα ή η διαφορά των μεγεθών X και Y (Taylor, 1997). Αν X_b και Y_b είναι οι καλύτερες τιμές των δύο φυσικών μεγεθών, που προκύπτουν από τις μέσες τιμές τους στην περίπτωση που επαναλάβουμε τις μετρήσεις αρκετές φορές, και δX , δY οι αντίστοιχες αβεβαιότητές τους, τότε η μέγιστη πιθανή μετρούμενη τιμή των X και Y θα είναι $X_b+\delta X$ και $Y_b+\delta Y$, αντίστοιχα. Έτσι, η μεγαλύτερη πιθανή τιμή για το άθροισμα των δύο μεγεθών, $X+Y$ θα είναι

$$S_{max} = X_b + Y_b + (\delta X + \delta Y)$$

Αντίστοιχα, η μικρότερη πιθανή μετρούμενη τιμή των X και Y θα είναι $X_b-\delta X$ και $Y_b-\delta Y$ και επομένως, η μικρότερη πιθανή τιμή για το άθροισμα των δύο μεγεθών, $X+Y$ θα είναι

$$S_{min} = X_b - \delta X + Y_b - \delta Y = X_b + Y_b - (\delta X + \delta Y)$$

Επομένως, η καλύτερη εκτίμηση του αθροίσματος S των δύο μεγεθών $X+Y$ θα ισούται με

$$S_b = X_b + Y_b$$

ενώ η αντίστοιχη αβεβαιότητα θα είναι

$$\delta S = \delta X + \delta Y$$

Με τον ίδιο ακριβώς συλλογισμό, προκύπτει ότι η εκτίμηση της καλύτερης τιμής της διαφοράς των δύο μεγεθών $D=X-Y$, καθώς επίσης και η αντίστοιχη αβεβαιότητά της, θα δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις

$$D_b = X_b - Y_b$$

και

$$\delta D = \delta X + \delta Y$$

Επομένως, είτε πρόκειται για το άθροισμα, είτε για τη διαφορά δύο φυσικών μεγεθών, η αβεβαιότητα ισούται με το άθροισμα των επιμέρους αβεβαιοτήτων των δύο μεγεθών.

Οι παραπάνω σχέσεις μπορούν να γενικευτούν για το άθροισμα και τη διαφορά πολλών φυσικών μεγεθών. Αν δηλαδή έχουμε τα φυσικά μεγέθη X_1, X_2, \dots, X_N , και Y_1, Y_2, \dots, Y_N , καθένα από τα οποία έχει αβεβαιότητα $\delta X_1, \delta X_2, \dots, \delta X_N$ και $\delta Y_1, \delta Y_2, \dots, \delta Y_N$, αντίστοιχα, για το μέγεθος Z που θέλουμε να υπολογίσουμε βάσει της σχέσης

$$Z = X_1 + X_2 + \dots + X_N - (Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N) \quad (6.1)$$

η αβεβαιότητα του θα είναι

$$\delta Z = \delta X_1 + \delta X_2 + \dots + \delta X_N + \delta Y_1 + \delta Y_2 + \dots + \delta Y_N \quad (6.2)$$

Οι αβεβαιότητες δηλαδή των μεγεθών που προσθέτουμε ή αφαιρούμε μεταξύ τους, πάντα αθροίζονται, ώστε το άθροισμα τους να αποτελεί την αβεβαιότητα του παράγωγου μεγέθους.

Θα πρέπει να αναφέρουμε ότι οι κανόνες αυτοί προέκυψαν κάνοντας απλούς συλλογισμούς, οι οποίοι όπως θα δούμε στη συνέχεια είναι προσεγγιστικοί. Μας παρέχουν ωστόσο με εύκολο τρόπο τη μέγιστη τιμή της αβεβαιότητας που παρουσιάζεται σε αθροίσματα ή/και διαφορές μεταξύ φυσικών μεγεθών. Εντούτοις, η πραγματική τιμή της αβεβαιότητας, όπως προκύπτει από το νόμο διάδοσης αβεβαιοτήτων, είναι στην πραγματικότητα μικρότερη, χωρίς ωστόσο να διαφέρει πολύ από την τιμή που προαναφέραμε.

6.2.1.2. Παράδειγμα υπολογισμού αβεβαιότητας

Έστω ότι για την πραγματοποίηση ενός πειράματος, θέλουμε να αναμείξουμε τα ρευστά που περιέχονται σε δύο ογκομετρικά δοχεία, τοποθετώντας το περιεχόμενο τους σε ένα μεγαλύτερο δοχείο. Αρχικά, ζυγίζουμε τα δύο άδεια δοχεία και στη συνέχεια τα ζυγίζουμε, αφού πρώτα τοποθετήσουμε σε καθένα από αυτά την επιθυμητή ποσότητα του ρευστού. Για τη ζύγιση των άδειων δοχείων χρησιμοποιούμε έναν ηλεκτρονικό ζυγό ακρίβειας 0.01 g και εύρους 215 g. Λαμβάνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα για τις μάζες των δύο άδειων δοχείων

$$m_1 = (82.34 \pm 0.01) \text{ g}$$

και

$$m_2 = (89.21 \pm 0.01) \text{ g}$$

Στη συνέχεια, αφού τοποθετήσουμε την επιθυμητή ποσότητα υγρού σε καθένα από αυτά τα δύο δοχεία, χρησιμοποιούμε ένα μηχανικό ζυγό ακρίβειας 0.1 g ο οποίος δίνει ένα μεγαλύτερο εύρος τιμών απ' ό τι πρώτος. Ζυγίζουμε τα δύο γεμάτα δοχεία και παίρνουμε τα εξής αποτελέσματα

$$M_1 = (450.6 \pm 0.1) \text{ g}$$

και

$$M_2 = (221.2 \pm 0.1) \text{ g}$$

Η συνολική μάζα των δύο ρευστών θα προκύψει αν από τη συνολική μάζα των δύο δοχείων μαζί με το περιεχόμενο τους, αφαιρέσουμε τις μάζες των άδειων δοχείων, δηλαδή

$$M = M_1 - m_1 + M_2 - m_2 = (450.6 - 82.34 + 221.2 - 89.21) \text{ g} = 500.25 \text{ g} \approx 500.2 \text{ g}$$

Η αντίστοιχη αβεβαιότητα θα ισούται με

$$\delta M = \delta M_1 + \delta m_1 + \delta M_2 + \delta m_2 = (0.1 + 0.01 + 0.1 + 0.01) \text{ g} = 0.22 \text{ g} \approx 0.2 \text{ g}$$

όπου έχουμε κρατήσει ένα σημαντικό ψηφίο, στρογγυλοποιώντας το αποτέλεσμα. Το τελικό αποτέλεσμα επομένως μπορεί να γραφεί ως εξής

$$M = (500.2 \pm 0.2) \text{ g}$$

Παρατηρούμε ότι η συνεισφορά των μικρότερων αβεβαιοτήτων δm_1 και δm_2 από τη ζύγιση των δοχείων δε συνεισφέρει καθόλου στην ολική αβεβαιότητα του τελικού αποτελέσματος, κατόπιν της στρογγυλοποίησης που κάναμε, βάσει των κανόνων που έχουμε αναφέρει στο Κεφ. 3.2. Πρακτικά, αυτό σημαίνει ότι η αβεβαιότητα στο αποτέλεσμα καθορίζεται από τις αβεβαιότητες που έχουν τα λιγότερο ακριβή όργανα μετρήσεων.

6.2.2. Η αβεβαιότητα σε γινόμενα και πηλίκα φυσικών μεγεθών

6.2.2.1. Υπολογισμός αβεβαιότητας του γινομένου δύο φυσικών μεγεθών

Έστω ότι μετράμε δύο φυσικά μεγέθη X και Y και θέλουμε να υπολογίσουμε ένα άλλο φυσικό μέγεθος που προκύπτει από το γινόμενό τους (Taylor, 1997). Για παράδειγμα, η ορμή p ενός σώματος μάζας m που κινείται με ταχύτητα v ορίζεται ως το γινόμενο της μάζας του σώματος επί την ταχύτητα του, $p=mv$. Γνωρίζοντας την καλύτερη εκτίμηση για τα δύο μετρούμενα μεγέθη και τις αντίστοιχες αβεβαιότητες τους, κάθε μέγεθος μπορεί να γραφεί ως εξής

$$X = X_b \pm \delta X = X_b \left(1 \pm \frac{\delta X}{|X_b|} \right) \quad (6.3)$$

και

$$Y = Y_b \pm \delta Y = Y_b \left(1 \pm \frac{\delta Y}{|Y_b|} \right) \quad (6.4)$$

Στις παραπάνω σχέσεις 6.3 και 6.4 έχουμε χρησιμοποιήσει τις σχετικές (ή κλασματικές) αβεβαιότητες $\delta X/|X_b|$ και $\delta Y/|Y_b|$, αντίστοιχα. Η απόλυτη τιμή στον παρανομαστή εξασφαλίζει ότι η σχετική αβεβαιότητα όπως και η αβεβαιότητα δX (ή δY) λαμβάνουν μόνον θετικές τιμές. Η σχετική αβεβαιότητα μας παρέχει μία καλύτερη εικόνα για το μέγεθος της αβεβαιότητας ή αλλιώς την ακρίβεια της μέτρησης, ειδικά αν αυτή εκφραστεί ως επί τοις εκατό ποσοστό. Ένα ποσοστό 2% στην αβεβαιότητα των μετρήσεων θεωρείται μικρό και είναι γενικά αποδεκτό, ενώ ένα ποσοστό της τάξης του 20% είναι μεγάλο και θα πρέπει να αιτιολογήσουμε την προέλευσή του επαρκώς.

Η εκτίμηση της καλύτερης τιμής του γινομένου P των δύο μεγεθών X και Y δίνεται προφανώς από τη σχέση

$$P_b = X_b \cdot Y_b \quad (6.5)$$

Οι μεγαλύτερες πιθανές τιμές για τα μεγέθη X και Y δίνονται από τις σχέσεις 6.3 και 6.4 για το θετικό πρόσημο στις παρενθέσεις και επομένως, η μεγαλύτερη πιθανή τιμή για το γινόμενο είναι

$$P_{max} = (X_b + \delta X)(Y_b + \delta Y) = X_b \left(1 + \frac{\delta X}{|X_b|} \right) Y_b \left(1 + \frac{\delta Y}{|Y_b|} \right) = X_b Y_b \left(1 + \frac{\delta X}{|X_b|} + \frac{\delta Y}{|Y_b|} + \frac{\delta X}{|X_b|} \frac{\delta Y}{|Y_b|} \right) \quad (6.6)$$

Υπό την προϋπόθεση ότι οι σχετικές αβεβαιότητες $\delta X/|X_b|$ και $\delta Y/|Y_b|$ των μετρήσεων είναι μικρές (μερικές ποσοστιαίες μονάδες), το γινόμενο τους θα είναι ακόμα πιο μικρός αριθμός και επομένως μπορούμε χωρίς σημαντικό σφάλμα να το παραλείψουμε στη σχέση 6.6. Έτσι τελικά, προκύπτει

$$P_{max} = X_b Y_b \left(1 + \left(\frac{\delta X}{|X_b|} + \frac{\delta Y}{|Y_b|} \right) \right) \quad (6.7)$$

Κατ' αναλογία, η μικρότερη πιθανή τιμή του γινομένου θα προκύψει για τις τιμές των X και Y που δίνονται από τις σχέσεις 6.3 και 6.4 για το αρνητικό πρόσημο στην παρένθεση, οπότε έχουμε τελικά

$$P_{min} = X_b Y_b \left(1 - \left(\frac{\delta X}{|X_b|} + \frac{\delta Y}{|Y_b|} \right) \right) \quad (6.8)$$

Η τιμή δηλαδή του μεγέθους P , βάσει των σχέσεων 6.7 και 6.8 δίνεται από τη σχέση

$$P = X_b Y_b \left(1 \pm \left(\frac{\delta X}{|X_b|} + \frac{\delta Y}{|Y_b|} \right) \right) \quad (6.9)$$

Συγκρίνοντας τη σχέση 6.9 με τη γενική μορφή που μπορούμε να εκφράσουμε το αποτέλεσμα

$$P = P_b \left(1 \pm \frac{\delta P}{|P_b|} \right)$$

προκύπτει ότι

$$\frac{\delta P}{|P_b|} = \frac{\delta X}{|X_b|} + \frac{\delta Y}{|Y_b|} \quad (6.10)$$

Η σχέση 6.10 μας λέει ότι η σχετική αβεβαιότητα του γινομένου δύο μεγεθών ισούται με το άθροισμα των σχετικών αβεβαιοτήτων των μεγεθών αυτών.

6.2.2.2. Υπολογισμός αβεβαιότητας του πηλίκου δύο φυσικών μεγεθών

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το πηλίκο Q των μεγεθών X και Y που εκφράζονται από τις σχέσεις 6.3 και 6.4. Το μέγεθος Q θα εκφράζεται τότε από την ακόλουθη σχέση

$$Q = \frac{X_b \left(1 \pm \frac{\delta X}{|X_b|} \right)}{Y_b \left(1 \pm \frac{\delta Y}{|Y_b|} \right)} \quad (6.11)$$

Η μεγαλύτερη και η μικρότερη πιθανή τιμή του Q στην παραπάνω σχέση, μπορεί να προκύψει επιλέγοντας κατάλληλα τα πρόσημα στον αριθμητή και τον παρονομαστή του κλάσματος της σχέσης 6.11. Έτσι, αν η παρένθεση στον αριθμητή λάβει τη μεγαλύτερη τιμή $1 + \delta X/|X_b|$, ενώ η παρένθεση στον παρονομαστή τη μικρότερη, $1 - \delta Y/|Y_b|$, το μέγεθος Q θα έχει τη μεγαλύτερη πιθανή τιμή, δηλαδή

$$Q_{max} = \frac{X_b}{Y_b} \cdot \frac{\left(1 + \frac{\delta X}{|X_b|} \right)}{\left(1 - \frac{\delta Y}{|Y_b|} \right)} \quad (6.12)$$

Το δεύτερο κλάσμα στη σχέση 6.12 έχει τη μορφή $(1+\alpha)/(1-\beta)$ όπου $\alpha=\delta X/|X_b|$ και $\beta=\delta Y/|Y_b|$, οι οποίοι είναι αριθμοί αρκετά μικρότεροι της μονάδας ($\alpha, \beta \ll 1$). Σύμφωνα με το διωνυμικό θεώρημα που μας δίνει το ανάπτυγμα της ποσότητας $(1+x)^n$ με $|x| < 1$,

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm nx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots$$

για την τιμή $n=-1$, μπορούμε να προσεγγίσουμε τον παράγοντα $1/(1-\beta)$ ως εξής

$$\frac{1}{1-\beta} = 1 + \beta + \beta^2 + \beta^3 + \dots \approx 1 + \beta$$

όπου οι όροι οι οποίοι είναι μεγαλύτεροι του β έχουν παραληφθεί, αφού είναι αρκετά μικροί. Άρα θα ισχύει

$$\frac{1+\alpha}{1-\beta} \approx (1+\alpha)(1+\beta) = 1 + \alpha + \beta + \alpha\beta \approx 1 + \alpha + \beta$$

και τελικά η σχέση 6.12 θα δώσει

$$Q_{max} = \frac{X_b}{Y_b} \left(1 + \frac{\delta X}{|X_b|} + \frac{\delta Y}{|Y_b|} \right) \quad (6.13)$$

Με ανάλογο τρόπο, προκύπτει ότι η μικρότερη πιθανή τιμή για το Q θα δίνεται από τη σχέση 6.13 αλλά με “-” στο πρώτο πρόσημο της παρένθεσης, οπότε τελικά μπορούμε να γράψουμε

$$Q = \frac{X_b}{Y_b} \left(1 \pm \left(\frac{\delta X}{|X_b|} + \frac{\delta Y}{|Y_b|} \right) \right) \quad (6.14)$$

Συγκρίνοντας τη σχέση 6.14 με τη γενική μορφή που μπορούμε να εκφράσουμε το αποτέλεσμα

$$Q = Q_b \left(1 \pm \frac{\delta Q}{|Q_b|} \right)$$

προκύπτει τελικά ότι

$$\frac{\delta Q}{|Q_b|} = \frac{\delta X}{|X_b|} + \frac{\delta Y}{|Y_b|} \quad (6.15)$$

Επομένως, η σχετική αβεβαιότητα στην περίπτωση του πηλίκου δύο φυσικών μεγεθών είναι ίδια με τη σχετική αβεβαιότητα του γινομένου τους και ίση με το άθροισμα των σχετικών αβεβαιοτήτων των δύο φυσικών μεγεθών.

6.2.2.3. Γενίκευση και ειδικές περιπτώσεις

Οι σχέσεις υπολογισμού της αβεβαιότητας του γινομένου ή του πηλίκου δύο φυσικών μεγεθών μπορούν να γενικευτούν για το γινόμενο και το πηλίκιο περισσοτέρων φυσικών μεγεθών (Taylor, 1997). Αν δηλαδή έχουμε τα φυσικά μεγέθη X_1, X_2, \dots, X_N , και Y_1, Y_2, \dots, Y_N , καθένα από τα οποία έχει σχετική αβεβαιότητα $\delta X_1/|X_{1b}|, \delta X_2/|X_{2b}|, \dots, \delta X_N/|X_{Nb}|$ και $\delta Y_1/|Y_{1b}|, \delta Y_2/|Y_{2b}|, \dots, \delta Y_N/|Y_{Nb}|$, αντίστοιχα, για το μέγεθος Z που θέλουμε να υπολογίσουμε βάσει της ακόλουθης σχέσης

$$Z = \frac{X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot \dots \cdot X_N}{Y_1 \cdot Y_2 \cdot Y_3 \cdot \dots \cdot Y_N} \quad (6.16)$$

η σχετική αβεβαιότητα του θα είναι

$$\frac{\delta Z}{|Z_b|} = \frac{\delta X_1}{|X_{1b}|} + \frac{\delta X_2}{|X_{2b}|} + \dots + \frac{\delta X_N}{|X_{Nb}|} + \frac{\delta Y_1}{|Y_{1b}|} + \frac{\delta Y_2}{|Y_{2b}|} + \dots + \frac{\delta Y_N}{|Y_{Nb}|} \quad (6.17)$$

Δηλαδή, οι σχετικές αβεβαιότητες μεγεθών που πολλαπλασιάζουμε ή διαιρούμε μεταξύ τους, πάντα αθροίζονται.

Στην ειδική περίπτωση που το μέγεθος Z υπολογίζεται ως το γινόμενο ενός μεγέθους X με έναν σταθερό παράγοντα B που δεν έχει αβεβαιότητα, δηλαδή $Z=BX$, τότε η σχετική αβεβαιότητα στον υπολογισμό του Z , βάσει της σχέσης 6.10, θα είναι

$$\frac{\delta Z}{|Z_b|} = \frac{\delta B}{|B|} + \frac{\delta X}{|X_b|} = \frac{\delta X}{|X_b|} \quad (6.18)$$

δηλαδή ίδια με τη σχετική αβεβαιότητα του μεγέθους X , αφού η αβεβαιότητα του σταθερού παράγοντα B είναι μηδέν. Θέτοντας στη σχέση 6.18 $|Z_b|=B|X_b|$, προκύπτει ότι

$$\delta Z = |B|\delta X \quad (6.19)$$

Αν και η σχέση 6.19 προέκυψε στηριζόμενοι στον προσεγγιστικό κανόνα της σχέσης 6.10 για την άθροιση των σχετικών αβεβαιοτήτων, αποδεικνύεται ότι έχει γενικότερη ισχύ και έτσι δε θα τροποποιηθεί όπως οι άλλοι κανόνες που αναφέραμε.

Αν η μέτρηση ενός φυσικού μεγέθους X χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του μεγέθους Z που εκφράζεται από τη σχέση $Z=X^n$, τότε βάσει της γενικευμένης σχέσης 6.17 και υπό την προϋπόθεση ότι το n είναι θετικός ακέραιος αριθμός, η σχετική αβεβαιότητα του Z είναι

$$\frac{\delta Z}{|Z_b|} = \frac{\delta X}{|X_b|} + \frac{\delta X}{|X_b|} + \dots + \frac{\delta X}{|X_b|} = n \frac{\delta X}{|X_b|} \quad (6.20)$$

αφού το παραπάνω άθροισμα περιλαμβάνει n το πλήθος ίδιους προσθετέους. Η παραπάνω σχέση αποδεικνύεται ότι ισχύει για κάθε τιμή του εκθέτη n .

6.2.2.4. Παραδείγματα υπολογισμού αβεβαιότητας

(α) Ένας φοιτητής μετράει τις δύο πλευρές μίας ορθογώνιας πλάκας χρησιμοποιώντας ένα χάρακα ακρίβειας 1 mm και βρίσκει τα αποτελέσματα $a=19.6$ cm και $b=4.7$ cm. Υπολογίστε το εμβαδό της πλάκας και το επί τοις εκατό ποσοστό της σχετικής αβεβαιότητάς της.

Σύμφωνα με όσα έχουμε αναφέρει στην ενότητα 1.5, η αβεβαιότητα των μετρήσεων είναι 0.5 mm. Έτσι, τα δύο αποτελέσματα μπορούν να εκφραστούν ως εξής

$$a = (19.60 \pm 0.05) \text{ cm} = 19.6 \text{ cm} \pm 0.3\%$$

και

$$b = (4.70 \pm 0.05) \text{ cm} = 4.7 \text{ cm} \pm 1.1\%$$

Το εμβαδό της πλάκας θα ισούται με

$$E = a \cdot b = 19.60 \text{ cm} \times 4.70 \text{ cm} = 92.1 \text{ cm}^2$$

και η επί τοις εκατό σχετική αβεβαιότητα του εμβαδού προκύπτει αθροίζοντας τις ποσοστιαίες σχετικές αβεβαιότητες των a και b , δηλαδή θα είναι 1.4%.

Άρα, μπορούμε τελικά να γράψουμε για το ζητούμενο εμβαδόν

$$E = (92.1 \pm 1.3) \text{ cm}^2$$

(β) Έστω ότι θέλουμε να μετρήσουμε το πάχος ενός φύλλου από ένα βιβλίο. Όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, αυτό μπορεί να επιτευχθεί με τη χρήση ενός οργάνου μέτρησης αντικειμένων μικρών διαστάσεων που ονομάζεται μικρόμετρο και το οποίο παρέχει μεγάλη ακρίβεια στις μετρήσεις (0.01 mm). Αν ωστόσο δεν έχουμε στη διάθεσή μας ένα τέτοιο όργανο, παρά μόνον ένα συνηθισμένο χάρακα του οποίου η ακρίβεια είναι συνήθως 1 mm, προφανώς δε μπορούμε να μετρήσουμε κατευθείαν το πάχος της μίας σελίδας. Ωστόσο, αφού οι σελίδες του βιβλίου είναι πανομοιότυπες σε ότι αφορά το πάχος τους, μπορούμε να μετρήσουμε το πάχος ενός μεγάλου αριθμού σελίδων, ώστε η μέτρηση αυτή να είναι εφικτή με το χάρακα. Έτσι λοιπόν μετράμε το πάχος 200 φύλλων και το αποτέλεσμα που παίρνουμε είναι

$$L_{200} = (1.10 \pm 0.05) \text{ cm}$$

Το πάχος επομένως του ενός φύλλου θα είναι

$$L_1 = \frac{1}{200} \times 1.10 \text{ cm} = 0.0055 \text{ cm} = 0.055 \text{ mm} = 55 \text{ }\mu\text{m}$$

και η αβεβαιότητα σύμφωνα με τη σχέση 6.19 θα είναι κι αυτή αντίστοιχα

$$\delta L_1 = \frac{1}{200} \times 0.05 \text{ cm} = 0.00025 \text{ cm} = 0.0025 \text{ mm} = 2.5 \text{ }\mu\text{m}$$

Τελικά μπορούμε να γράψουμε για το πάχος του ενός φύλλου

$$L_1 = (55 \pm 2.5) \text{ }\mu\text{m}$$

(γ) Για τον υπολογισμό της επιτάχυνσης της βαρύτητας g , ένας φοιτητής εκτελεί πειράματα ελεύθερης πτώσης μίας σφαίρας, μετρώντας το ύψος h από το οποίο αφήνει να πέσει στο πάτωμα η σφαίρα, καθώς και το αντίστοιχο χρονικό διάστημα Δt . Μετά από αρκετές επαναλαμβανόμενες μετρήσεις κατέληξε στα ακόλουθα αποτελέσματα

$$\Delta t = (0.65 \pm 0.06) \text{ s}$$

και

$$h = (2.02 \pm 0.05) \text{ m}$$

Η σφαίρα με μηδενική αρχική ταχύτητα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση που περιγράφεται από την ακόλουθη σχέση

$$h = \frac{1}{2} g (\Delta t)^2$$

και λύνοντας ως προς g θα έχουμε

$$g = \frac{2h}{(\Delta t)^2} = \frac{2 \times 2.02 \text{ m}}{(0.65 \text{ s})^2} = 9.6 \text{ m/s}^2$$

Η σχετική αβεβαιότητα στο αποτέλεσμα αυτό μπορεί να υπολογιστεί σύμφωνα με τους κανόνες που έχουμε αναφέρει (Σχέση 6.17), όπου ο παράγοντας 2 δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα που θα είναι

$$\frac{\delta g}{g} = \frac{\delta h}{h} + 2 \frac{\delta(\Delta t)}{\Delta t} = \frac{0.05}{2.02} + 2 \frac{0.06}{0.65} = 2.48\% + 18.46\% = 20.94\% \approx 21\%$$

Παρατηρούμε ότι η μεγαλύτερη συνεισφορά στην αβεβαιότητα προέρχεται από τη μέτρηση του χρόνου οπότε αν θέλουμε να βελτιώσουμε την ακρίβεια της μεθόδου μας, πρέπει να επικεντρωθούμε σε αυτόν τον παράγοντα. Έτσι, το τελικό αποτέλεσμα μπορεί να γραφεί βάσει των κανόνων στρογγυλοποίησης ως

$$g = (10 \pm 2) \text{ m/s}^2$$

6.2.3. Υπολογισμός αβεβαιοτήτων ανεξάρτητων μεγεθών

Στις περιπτώσεις που αναφέραμε για την άθροιση, τη διαφορά, το γινόμενο ή το πηλίκο φυσικών μεγεθών, οι αβεβαιότητες που προκύπτουν μπορεί να είναι μικρότερες στην περίπτωση που τα μετρούμενα μεγέθη είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους και οι αβεβαιότητες τους υπόκεινται μόνον σε τυχαία σφάλματα, ακολουθούν δηλαδή την κανονική κατανομή. Όταν λέμε (στατιστικά) ανεξάρτητα μεγέθη εννοούμε τα μεγέθη για τα οποία η μέτρηση του ενός δεν επηρεάζει με κανένα τρόπο το αποτέλεσμα της μέτρησης του άλλου μεγέθους.

Θεωρήσαμε στην περίπτωση του αθροίσματος δύο μεγεθών X και Y ότι η μεγαλύτερη και η μικρότερη πιθανή τιμή τους είναι

$$S_{max} = X_b + Y_b + (\delta X + \delta Y)$$

$$S_{min} = X_b + Y_b - (\delta X + \delta Y)$$

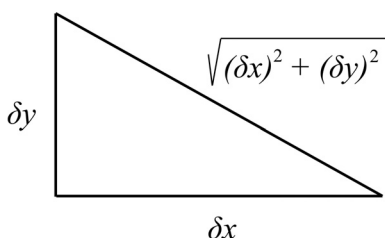
και επομένως η αβεβαιότητα στο άθροισμά τους θα ισούται με $\delta X + \delta Y$. Το αποτέλεσμα αυτό όμως είναι υπερεκτιμημένο, αφού για τη μέγιστη πιθανή τιμή έχουμε θεωρήσει ότι τα μεγέθη X και Y μπορούν να λάβουν ταυτόχρονα τις μέγιστες πιθανές τιμές τους. Αν όμως τα μεγέθη X και Y είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους και ακολουθούν την κανονική κατανομή, υπάρχει 50% πιθανότητα η υπερεκτίμηση του ενός μεγέθους να συνοδεύεται από υποεκτίμηση του άλλου μετρούμενου μεγέθους, και αντίστροφα. Έτσι, η πιθανότητα να υπερεκτιμήσουμε ταυτόχρονα και τα δύο μετρούμενα μεγέθη είναι αρκετά μικρή και άρα η αβεβαιότητα του αθροίσματος θα είναι σαφώς μικρότερη από τη μέγιστη τιμή $\delta X + \delta Y$ που μπορεί αυτή να πάρει. Αποδεικνύεται ότι για τις μετρήσεις δύο μεγεθών που είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα και ακολουθούν την κανονική κατανομή (βλ. Κεφ.4), η αβεβαιότητα στο άθροισμα τους $Z=X+Y$ δίνεται από τη σχέση

$$\delta Z = \sqrt{(\delta X)^2 + (\delta Y)^2} \quad (6.21)$$

Η αβεβαιότητα στην άθροιση των δύο μεγεθών είναι πάντα μικρότερη από το άθροισμα των αβεβαιοτήτων τους, δηλαδή

$$\sqrt{(\delta X)^2 + (\delta Y)^2} < \delta X + \delta Y \quad (6.22)$$

Η απόδειξη της σχέσης 6.22 είναι προφανής αφού αν τα δX και δY αποτελούν τις κάθετες πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου, η υποτείνουσα που δίνεται από το Πυθαγόρειο θεώρημα θα είναι πάντα μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων πλευρών (Σχήμα 6.1).



Σχήμα 6.1 Στο ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές δx και δy , η υποτείνουσα είναι πάντα μικρότερη του αθροίσματος των δύο καθέτων πλευρών.

Υπάρχει ωστόσο περίπτωση τα δύο μετρούμενα μεγέθη να μην είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, οπότε η αβεβαιότητα στο άθροισμά τους δε θα δίνεται από τη σχέση 6.21, αλλά θα ισούται με το άθροισμα των επιμέρους αβεβαιοτήτων των δύο μεγεθών. Για παράδειγμα, έστω ότι χρησιμοποιούμε για τη μέτρηση των διαστάσεων διαφόρων αντικειμένων ένα μεταλλικό χάρακα ο οποίος ωστόσο έχει βαθμονομηθεί για χρήση σε θερμοκρασία διαφορετική από αυτή που εμείς τον χρησιμοποιούμε στο εργαστήριο. Αυτό θα έχει ως αποτέλεσμα, λόγω της θερμικής διαστολής του χάρακα, να λαμβάνουμε πάντα μετρήσεις μικρότερες από τις πραγματικές, αν η θερμοκρασία στο εργαστήριο είναι μεγαλύτερη από αυτή της βαθμονόμησης του, γιατί ο χάρακας θα έχει μεγαλύτερο μήκος. Ωστόσο, το συστηματικό σφάλμα που προκύπτει στην περίπτωση αυτή μπορεί να είναι μικρότερο από την ακρίβεια του χάρακα, οπότε θα μπορούσαμε να το αγνοήσουμε. Αν βέβαια κάνουμε χρήση ενός χάρακα που για οποιοδήποτε λόγο έχει μεγαλύτερο μήκος από το ορθό και χωρίς να έχουμε τη δυνατότητα σύγκρισης (βαθμονόμησης) με άλλο χάρακα, αν θέλουμε να υπολογίσουμε το άθροισμα δύο μηκών, αυτό θα είναι πάντα υποεκτιμημένο και δε θα μπορούμε να εφαρμόσουμε τη σχέση 6.21. Έτσι, η αβεβαιότητα θα πρέπει να υπολογιστεί από το άθροισμα των δύο επιμέρους αβεβαιοτήτων, όπως αναφέρθηκε στην αρχή της ενότητας.

Γενικεύοντας, για τον υπολογισμό του μεγέθους Z που ισούται με το άθροισμα και τη διαφορά πολλών μεγεθών (βλ. σχέση 6.1), η αντίστοιχη αβεβαιότητα θα δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$\delta Z = \sqrt{(\delta X_1)^2 + (\delta X_2)^2 + \dots + (\delta X_N)^2 + (\delta Y_1)^2 + (\delta Y_2)^2 + \dots + (\delta Y_N)^2} \quad (6.23)$$

Σε κάθε περίπτωση, είτε δηλαδή πρόκειται για ανεξάρτητα φυσικά μεγέθη είτε όχι, η αβεβαιότητα αυτή δε μπορεί ποτέ να υπερβεί το άθροισμα των αβεβαιοτήτων όλων των φυσικών μεγεθών

$$\delta Z \leq \delta X_1 + \delta X_2 + \dots + \delta X_N + \delta Y_1 + \delta Y_2 + \dots + \delta Y_N \quad (6.24)$$

Αντίστοιχα, η αβεβαιότητα στον υπολογισμό του μεγέθους Z που περιέχει γινόμενα και πηλίκα φυσικών μεγεθών (βλ. σχέση 6.16), θα δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$\frac{\delta Z}{Z_b} = \sqrt{\left(\frac{\delta X_1}{X_{1b}}\right)^2 + \left(\frac{\delta X_2}{X_{2b}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\delta X_N}{X_{Nb}}\right)^2 + \left(\frac{\delta Y_1}{Y_{1b}}\right)^2 + \left(\frac{\delta Y_2}{Y_{2b}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\delta Y_N}{Y_{Nb}}\right)^2} \quad (6.25)$$

ενώ δε θα είναι ποτέ μεγαλύτερη από το άθροισμα των σχετικών αβεβαιοτήτων όλων των φυσικών μεγεθών

$$\frac{\delta Z}{Z_b} \leq \frac{\delta X_1}{X_{1b}} + \frac{\delta X_2}{X_{2b}} + \dots + \frac{\delta X_N}{X_{Nb}} + \frac{\delta Y_1}{Y_{1b}} + \frac{\delta Y_2}{Y_{2b}} + \dots + \frac{\delta Y_N}{Y_{Nb}} \quad (6.26)$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, για τον υπολογισμό της αβεβαιότητας του εμβαδού E στο παράδειγμα (α) της ενότητας 6.2.2.4, η σχέση 6.25 παίρνει τη μορφή

$$\frac{\delta E}{E} = \sqrt{\left(\frac{\delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\delta b}{b}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{0.05}{19.6}\right)^2 + \left(\frac{0.05}{4.7}\right)^2} = \sqrt{6.5 \times 10^{-6} + 113.2 \times 10^{-6}} \approx 11 \times 10^{-3}$$

ή 1.1%, αν εκφραστεί ως ποσοστό. Η τιμή αυτή είναι μικρότερη από το 1.4% που προέκυψε από το άθροισμα των σχετικών αβεβαιοτήτων στις μετρήσεις του μήκους. Άρα, το τελικό αποτέλεσμα μπορεί να γραφεί ως

$$E = (92.1 \pm 1.0) \text{ cm}^2$$

Ανάλογα, για τον υπολογισμό της επιτάχυνσης g του παραδείγματος (γ), η σχετική αβεβαιότητα σύμφωνα με τη σχέση 6.25 είναι

$$\frac{\delta g}{g} = \sqrt{\left(\frac{\delta h}{h}\right)^2 + 2\left(\frac{\delta(\Delta t)}{\Delta t}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{0.05}{2.02}\right)^2 + 2\left(\frac{0.06}{0.65}\right)^2} = \sqrt{6.1 \times 10^{-4} + 2 \times 85.2 \times 10^{-4}} \approx 13.3 \times 10^{-2}$$

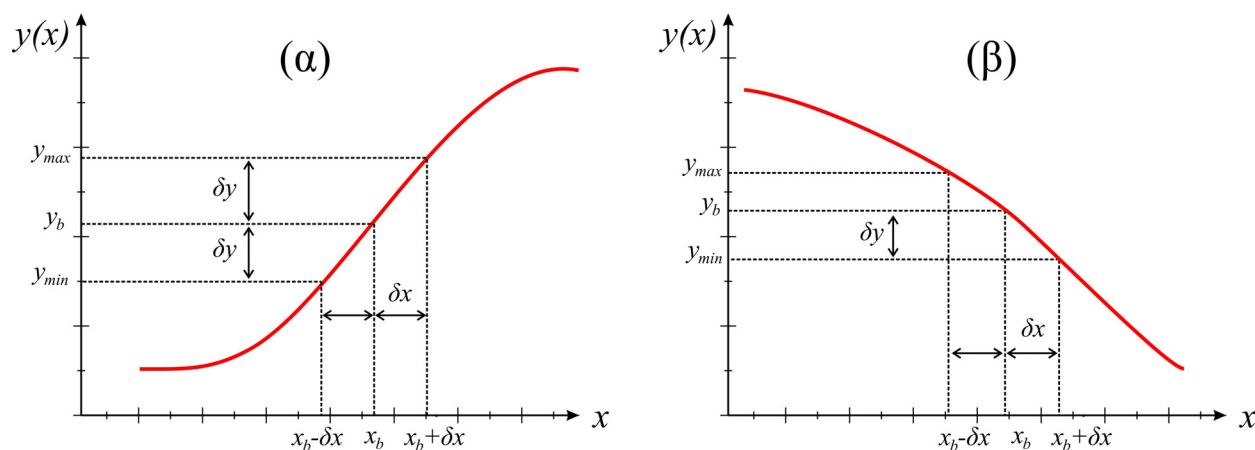
ή 13.3%, τιμή που είναι προφανώς μικρότερη από το 21% που είχαμε υπολογίσει για την σχετική αβεβαιότητα, εφαρμόζοντας τη σχέση 6.17.

Παρατηρούμε ότι και στα δύο παραδείγματα, οι αβεβαιότητες είναι μικρότερες από αυτές που προκύπτουν από τον απλοποιημένο κανόνα της άθροισης των σχετικών αβεβαιοτήτων. Ο τρόπος αυτός ωστόσο, πέρα από την απλότητά του, όπως αναφέραμε ήδη, μας παρέχει ένα άνω όριο της αβεβαιότητας των μετρήσεων σε διάφορες περιπτώσεις μίας έμμεσης μέτρησης.

6.3. Αβεβαιότητα φυσικών μεγεθών μίας μεταβλητής

6.3.1. Υπολογισμός αβεβαιότητας

Έστω ότι έχουμε μετρήσει ένα μέγεθος x για το οποίο έχουμε εκτιμήσει την καλύτερη τιμή και την αβεβαιότητά του, $x = x_b \pm \delta x$, και θέλουμε να υπολογίσουμε ένα άλλο μέγεθος που εκφράζεται μέσω της συνάρτησης $y(x)$. Η συνάρτηση αυτή μπορεί να περιέχει τριγωνομετρικές ποσότητες, δυνάμεις ή εκθετικές μεταβολές του μεγέθους x και να είναι αύξουσα ή φθίνουσα, όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 6.2.α,β.



Σχήμα 6.2 Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y(x)$ ως προς το μέγεθος x μπορούμε να βρούμε τις ακραίες πιθανές τιμές της, που αντιστοιχούν στις μετρούμενες τιμές του x . Το (α) αναφέρεται σε αύξουσα και το (β) σε φθίνουσα συνάρτηση.

Η καλύτερη εκτίμηση της πραγματικής τιμής του y δίνεται προφανώς από την τιμή της συνάρτησης στο x_b , $y_b = y(x_b)$. Αντίστοιχα, στις ακραίες πιθανές τιμές του x , $x_b - \delta x$ και $x_b + \delta x$, οι τιμές της συνάρτησης θα είναι

$$y_{max} = y(x_b + \delta x) \text{ και } y_{min} = y(x_b - \delta x)$$

Αν η αβεβαιότητα δx είναι μικρή, όπως πολύ συχνά ισχύει για τα μετρούμενα μεγέθη στο εργαστήριο, το κομμάτι της καμπύλης της συνάρτησης που βρίσκεται στο διάστημα $[x_b - \delta x, x_b + \delta x]$ είναι προσεγγιστικά ευθύγραμμο και οι ακραίες πιθανές τιμές y_{max} και y_{min} θα ισαπέχουν από την καλύτερη εκτίμηση της τιμής του y που είναι η y_b . Έτσι, μπορούμε να γράψουμε για την καλύτερη τιμή και την αβεβαιότητά του μεγέθους που περιγράφεται από τη συνάρτηση y

$$y = y_b \pm \delta y$$

Ωστόσο, επειδή η συνάρτηση $y(x)$ είναι συνήθως γνωστή, η αβεβαιότητά της μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά και δίνεται από τη σχέση (βλ. Σχήμα 6.2)

$$\delta y = y(x_b + \delta x) - y(x_b) \quad (6.27)$$

Αφού υποθέσαμε ότι η αβεβαιότητα δx είναι μικρή, μπορεί να αντικατασταθεί με το dx και λαμβάνοντας υπόψη τον ορισμό της παραγώγου της συνάρτησης $y(x)$, από τη σχέση 6.27 θα προκύψει

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{y(x_b + \delta x) - y(x_b)}{\delta x} \approx \frac{y(x + dx) - y(x)}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

και επομένως

$$\delta y = \frac{dy}{dx} \delta x \quad (6.28)$$

Προκειμένου λοιπόν να υπολογίσουμε την αβεβαιότητα δy , αρκεί να βρούμε την παράγωγο της συνάρτησης $y(x)$ και να την πολλαπλασιάσουμε με την αβεβαιότητα δx . Η σχέση 6.28 ισχύει στην περίπτωση που η παράγωγος (κλίση) της συνάρτησης στο σημείο x_b είναι θετική, όπως στο Σχήμα 6.2α. Αν η κλίση είναι αρνητική, όπως στην περίπτωση της συνάρτησης του Σχήματος 6.2β, θα προκύψει ένα αρνητικό πρόσημο στη σχέση 6.28. Μπορούμε επομένως να γράψουμε στη γενική περίπτωση για την αβεβαιότητα ότι

$$\delta y = \left| \frac{dy}{dx} \right| \delta x \quad (6.29)$$

ώστε η απόλυτη τιμή να μας διασφαλίσει ότι το αποτέλεσμα θα είναι πάντα θετικό.

6.3.2. Παραδείγματα

(α) Για τον υπολογισμό του μήκους κύματος λ μίας ακτινοβολίας με τη χρήση ενός οπτικού φασματοσκοπίου χρησιμοποιούμε τη σχέση $\lambda = D \sin \theta$, όπου θ είναι η μετρούμενη γωνία στο φασματοσκόπιο και D μία σταθερά του οργάνου που ισούται με $2.5 \mu\text{m}$ (βλ. Κεφ. 9.6). Αν μία μέτρηση της γωνίας δίνει αποτέλεσμα

$$\theta = (8.5 \pm 0.1)^\circ$$

η καλύτερη τιμή για το μήκος κύματος θα είναι

$$\lambda = D \sin \theta = 2.5 \sin(8.5^\circ) = 3.695 \times 10^{-1} \mu\text{m} = 370 \times 10^{-3} \mu\text{m} = 370 \text{ nm}$$

Η αβεβαιότητα στον υπολογισμό του μήκους κύματος λ προκύπτει από τη σχέση 6.29 και είναι

$$\delta \lambda = \left| \frac{d\lambda}{d\theta} \right| \delta \theta = D \cdot \cos \theta \cdot \delta \theta \quad (6.30)$$

όπου η γωνία θ μετριέται σε ακτίνια (rad). Εφόσον οι 360° αντιστοιχούν σε $2\pi \text{ rad} = 6.283 \text{ rad}$, προκύπτει ότι το $\delta \theta$ θα αντιστοιχεί σε $1.745 \times 10^{-3} \text{ rad}$. Άρα, από τη σχέση 6.30 η αβεβαιότητα στο μήκος κύματος θα είναι τελικά

$$\delta \lambda = D \cdot \cos \theta \cdot \delta \theta = 2.5 \cos(8.5) 1.745 \times 10^{-3} \mu\text{m} = 4.3 \times 10^{-3} \mu\text{m} = 4.3 \text{ nm}$$

που αντιστοιχεί σε μία σχετική αβεβαιότητα 1.1%. Το τελικό αποτέλεσμα μπορεί επομένως να γραφεί ως εξής

$$\lambda = (370 \pm 4) \text{ nm}$$

(β) Για τον υπολογισμό του ύψους μίας πολυκατοικίας, ένας φοιτητής εκτελεί πειράματα ελεύθερης πτώσης με σφαίρες και μετράει το χρόνο που κάνουν αυτές να χτυπήσουν στο έδαφος. Τις σφαίρες τις αφήνει χωρίς αρχική ταχύτητα από την ταράτσα της πολυκατοικίας. Για τις μετρήσεις του χρησιμοποιεί ένα ρολόι χειρός που έχει ακρίβεια ενός δευτερολέπτου. Μετά από αρκετές μετρήσεις υπολόγισε τη μέση τιμή και την αβεβαιότητά της που είναι

$$\Delta t = (2.4 \pm 0.3)s$$

Η καλύτερη τιμή για το ζητούμενο ύψος h θα δίνεται από την ακόλουθη σχέση, που εκφράζει την απόσταση την οποία διανύει ένα σώμα που εκτελεί ευθύγραμμο ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση $g=9.81\text{m/s}^2$.

$$h = \frac{1}{2}g(\Delta t)^2 = \frac{1}{2}9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (2.4)^2 \text{s}^2 = 28.253 \text{ m}$$

Η αβεβαιότητα στον υπολογισμό του h , βάσει της σχέσης 6.29 θα είναι

$$\delta h = \left| \frac{dh}{d(\Delta t)} \right| \delta(\Delta t) = \frac{1}{2}g2(\Delta t)\delta(\Delta t) = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 2.4\text{s} \times 0.3\text{s} = 7.06 \text{ m}$$

που αντιστοιχεί σε σχετική αβεβαιότητα 25%.

Το τελικό αποτέλεσμα μετά τις απαραίτητες στρογγυλοποιήσεις, μπορεί να γραφεί ως εξής

$$h = (28 \pm 7) \text{ m}$$

6.4. Γενικευμένος νόμος διάδοσης αβεβαιότητας

6.4.1. Γενίκευση

Η σχέση 6.29 που αναφέραμε προηγουμένως αφορά την περίπτωση που το μέγεθος y που θέλουμε να υπολογίσουμε είναι συνάρτηση μόνον μίας μεταβλητής, x . Σε πολλές περιπτώσεις βέβαια, ένα ζητούμενο μέγεθος μπορεί να είναι συνάρτηση πολλών μετρούμενων φυσικών μεγεθών από τα οποία θα πρέπει να υπολογίσουμε την καλύτερη τιμή και την αβεβαιότητά του (Formasini, 2008). Η περίπτωση της μίας μεταβλητής (βλ. σχέση 6.29) γενικεύεται με τον τρόπο που υπολογίζεται η αβεβαιότητα για ανεξάρτητα μεταξύ τους μετρούμενα φυσικά μεγέθη που υπόκεινται μόνον σε τυχαία σφάλματα (βλ. σχέσεις 6.25 και 6.26). Αν δηλαδή ένα μέγεθος y που θέλουμε να υπολογίσουμε είναι συνάρτηση των μεγεθών x_1, x_2, \dots, x_N , τα οποία είναι στατιστικά ανεξάρτητα μεταξύ τους και υπόκεινται όλα σε τυχαία μόνον σφάλματα, η καλύτερη εκτίμηση της πραγματικής τιμής του y θα δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$y_b = y(x_{1b}, x_{2b}, \dots, x_{Nb}) \quad (6.31)$$

όπου $x_{1b}, x_{2b}, \dots, x_{Nb}$, είναι οι μέσες τιμές των μετρούμενων μεγεθών x_i , στην περίπτωση που έχουμε πραγματοποιήσει πολλές το πλήθος μετρήσεις για κάθε ένα από αυτά. Αν δx_i είναι οι αντίστοιχες αβεβαιότητες των μεγεθών x_i , η αβεβαιότητα δy του ζητούμενου μεγέθους δίνεται από τη σχέση

$$\delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \delta x_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_n} \delta x_n\right)^2} \quad (6.32)$$

Στην παραπάνω σχέση, η ποσότητα $\partial y / \partial x_i$ ονομάζεται μερική παράγωγος του y ως προς τη μεταβλητή x_i και ισούται με την παράγωγο της συνάρτησης $y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ ως προς τη μεταβλητή x_i , αν θεωρήσουμε ότι οι υπόλοιπες μεταβλητές παραμένουν σταθερές. Η απόδειξη της σχέσης 6.32 ξεφεύγει από τους σκοπούς του παρόντος συγγράμματος γι αυτό και παραλείπεται. Σε αντιστοιχία με τη σχέση 6.26, η αβεβαιότητα δy δεν είναι ποτέ μεγαλύτερη από την ποσότητα

$$\delta y \leq \frac{\partial y}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} \delta x_2 + \dots + \frac{\partial y}{\partial x_n} \delta x_n \quad (6.33)$$

Στην περίπτωση που $i=1$, δηλαδή έχουμε μόνον ένα μετρούμενο μέγεθος x , η σχέση 6.32 ανάγεται στην απλουστευμένη σχέση 6.29.

Η σχέση 6.32 για τον υπολογισμό της αβεβαιότητας είναι αρκετά περίπλοκη, ειδικά όταν έχουμε αρκετά μετρούμενα φυσικά μεγέθη και η συνάρτηση $y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ έχει πολύπλοκη μορφή. Η διαδικασία ωστόσο του υπολογισμού θα μπορούσε να γίνει σταδιακά, ώστε να αποφευχθούν τυχόν λάθη. Μπορούμε δηλαδή να υπολογίσουμε την αβεβαιότητα του κάθε παράγοντα ξεχωριστά και μετά να κάνουμε αντικατάσταση στη τελική σχέση 6.32. Με τον τρόπο αυτό, υπολογίζουμε τη συνεισφορά της αβεβαιότητας του κάθε μετρούμενου φυσικού μεγέθους στο τελικό αποτέλεσμα. Σε πολλές περιπτώσεις, μικρές αβεβαιότητες από κάποια μετρούμενα μεγέθη θα μπορούσαν να παραλειφθούν χωρίς ουσιαστική επίδραση στην ολική αβεβαιότητα.

6.4.2. Παραδείγματα

(α) Για τον υπολογισμό του όγκου ενός ορθού κυλίνδρου, μετρήθηκαν η ακτίνα r και το ύψος h του κυλίνδρου 10 φορές. Οι μέσες τιμές των r και h και οι αντίστοιχες αβεβαιότητες τους υπολογίστηκαν ότι είναι

$$r = r_b \pm \delta r = (5.21 \pm 0.02) \text{ cm}$$

και

$$h = h_b \pm \delta h = (15.05 \pm 0.04) \text{ cm}$$

Η μέση τιμή του όγκου του κυλίνδρου θα δίνεται από τη σχέση

$$V_b = (\pi r_b^2) h_b = 1283.4 \text{ cm}^3$$

ενώ η αβεβαιότητα θα υπολογιστεί από τη σχέση 6.32 ως εξής

$$\delta V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial r} \delta r\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial h} \delta h\right)^2} = \sqrt{(2\pi r_b h_b)^2 (\delta r)^2 + (\pi r_b^2)^2 (\delta h)^2} = \dots = 10.43 \text{ cm}^3$$

Στη γραφή του τελικού αποτελέσματος θα κρατήσουμε ένα σημαντικό ψηφίο για την αβεβαιότητα στον όγκο, ενώ η μέση τιμή του όγκου θα έχει την ακρίβεια του σφάλματος. Δηλαδή

$$V = V_b \pm \delta V = (1280 \pm 10) \text{ cm}^3$$

(β) Η ποσότητα w είναι συνάρτηση των μετρούμενων μεγεθών x , y και z , σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση

$$w = 2x^2y + 3yz^2 + x + z^2$$

Για τις μετρούμενες τιμές των μεγεθών x , y και z έχουμε τα εξής αποτελέσματα

$$x = x_b \pm \delta x = 3.2 \pm 0.1$$

$$y = y_b \pm \delta y = 2.8 \pm 0.2$$

και

$$z = z_b \pm \delta z = 4.4 \pm 0.7$$

Η καλύτερη τιμή για το μέγεθος z θα είναι

$$w_b = 2x_b^2y_b + 3y_bz_b^2 + x_b + z_b^2 = 2 \times (3.2)^2 \times 2.8 + 3 \times 2.8 \times (4.4)^2 + 3.2 + (4.4)^2 = 242.528$$

Στη συνέχεια μπορούμε να υπολογίσουμε ξεχωριστά τη συνεισφορά του κάθε μετρούμενου μεγέθους στην αβεβαιότητα της ποσότητας w . Αν δw_x είναι η αβεβαιότητα της ποσότητας w που οφείλεται μόνον στην αβεβαιότητα του μεγέθους x , θα έχουμε

$$\delta w_x = \frac{\partial w}{\partial x} \delta x = (4xy + 1)\delta x = (4 \times 3.2 \times 2.8 + 1) \times 0.1 = 3.684$$

Αντίστοιχα θα έχουμε για της αβεβαιότητες δw_y και δw_z

$$\delta w_y = \frac{\partial w}{\partial y} \delta y = (2x^2 + 3z^2)\delta y = (2 \times 3.2^2 + 3 \times 4.4^2) \times 0.2 = 15.712$$

και

$$\delta w_z = \frac{\partial w}{\partial z} \delta z = (6yz + 2z)\delta z = (6 \times 2.8 \times 4.4 + 2 \times 4.4) \times 0.7 = 82.72$$

Η συνολική αβεβαιότητα βάσει της σχέσης 6.32 θα είναι

$$\delta w = \sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial x} \delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \delta z\right)^2} = \sqrt{(3.648)^2 + (15.712)^2 + (82.72)^2} \approx 84.28$$

Παρατηρούμε ότι το μέγεθος z είναι αυτό που συνεισφέρει καθοριστικά στην ολική αβεβαιότητα του ζητούμενου μεγέθους, ενώ οι αβεβαιότητες των μεγεθών x και y είναι αρκετά μικρότερες. Το τελικό αποτέλεσμα μετά τις απαραίτητες στρογγυλοποιήσεις, μπορεί να γραφεί ως εξής

$$w = w_b \pm \delta w = 240 \pm 80$$

Στο ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα θα καταλήξουμε αν αγνοήσουμε τελείως τις συνεισφορές των αβεβαιοτήτων των δύο μεγεθών x και y .

6.5. Ασκήσεις

1. Η ακρίβεια στη μέτρηση μήκους με τη χρήση ενός μεταλλικού χάρακα είναι 1 mm, ενώ με τη χρήση ενός διαστημόμετρου (βλ. Κεφ. 7) είναι 0.05 mm. Αν θέλουμε να μετρήσουμε το μήκος ενός αντικειμένου που είναι 4 cm με ακρίβεια 1%, ποιο όργανο θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε; Αιτιολογείστε την απάντησή σας χρησιμοποιώντας σε κάθε περίπτωση τη σχετική αβεβαιότητα του οργάνου.
2. Ένας φοιτητής μετράει δύο ποσότητες α , β για τις οποίες τα αποτελέσματα είναι

$$\alpha = \alpha_b \pm \delta\alpha = 9.8 \pm 0.2$$

$$\beta = \beta_b \pm \delta\beta = 13.1 \pm 0.2$$

Υπολογίστε για το γινόμενο και το πηλίκο των μεγεθών αυτών, τις καλύτερες τιμές και τις σχετικές τους αβεβαιότητες, θεωρώντας ότι τα μεγέθη είναι στατιστικά ανεξάρτητα μεταξύ τους.

3. Αναμειγνύουμε το περιεχόμενο δύο δοχείων με διαλύματα προκειμένου να πραγματοποιήσουμε μία χημική αντίδραση. Οι όγκοι των διαλυμάτων μετρήθηκαν αρχικά και βρέθηκαν

$$V_1 = V_{b2} \pm \delta V_1 = (123 \pm 4) \text{cm}^3$$

$$V_2 = V_{b2} \pm \delta V_2 = (98 \pm 5)\text{cm}^3$$

Υπολογίστε τον ολικό όγκο του τελικού διαλύματος και την αντίστοιχη αβεβαιότητα θεωρώντας ότι οι μετρήσεις είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

4. Αν η μέτρηση μίας γωνίας θ δίνει το αποτέλεσμα

$$\theta = \theta_b \pm \delta\theta = 36^\circ \pm 0.2^\circ$$

υπολογίστε την τιμή των τριγωνομετρικών αριθμών $\sin\theta$ και $\cos\theta$, καθώς επίσης και τις αντίστοιχες αβεβαιότητές τους.

5. Η μέτρηση της διαμέτρου μιας σφαίρας με ένα όργανο που έχει ακρίβεια 0.01 mm (βλ. Κεφ. 7) έδωσε αποτέλεσμα 22.58 mm. Τι θα δηλώσετε για τον όγκο της σφαίρας και την αντίστοιχη αβεβαιότητα;

Βιβλιογραφία/Αναφορές

- Formasini, P. (2008). *The Uncertainty in Physical Measurements – An Introduction to Data Analysis in the Physics Laboratory*. New York: Springer.
- Taylor, J. R. (1997). *An Introduction to Error Analysis – The Study of Uncertainties in Physical Measurements (2nd Ed)*. California: University Science Books.

Κεφάλαιο 7 – Μέτρηση θεμελιωδών φυσικών μεγεθών

Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται όργανα μέτρησης θεμελιωδών φυσικών μεγεθών, όπως το μήκος, η μάζα, ο χρόνος και η θερμοκρασία. Αναφέρονται συνοπτικά τα χαρακτηριστικά και ο τρόπος λειτουργίας τους, ώστε να μπορεί ο φοιτητής να τα χρησιμοποιήσει άμεσα και με ορθό τρόπο σε μετρήσεις. Με τη χρήση ενός διαστημόμετρου, ενός μικρόμετρου και του μηχανικού ζυγού μετρούνται οι διαστάσεις και η μάζα μεταλλικών σωμάτων (σφαίρες και κύλινδρος), προκειμένου να υπολογιστεί η πυκνότητα των υλικών τους. Τα πειράματα αυτά αποτελούν χαρακτηριστικά παραδείγματα απλών και σύνθετων μετρήσεων, όπου εφαρμόζονται στην πράξη οι κανόνες προσδιορισμού των αντίστοιχων αβεβαιοτήτων. Μελετάται επίσης η δυναμική απόκριση ενός υδραργυρικού θερμομέτρου και ενός θερμομέτρου αντιστάσεως (*thermistor*) που αποτελούν όργανα μέτρησης πρώτης τάξης.

Προαπαιτούμενη γνώση

Κεφάλαια 2, 3 και 6.

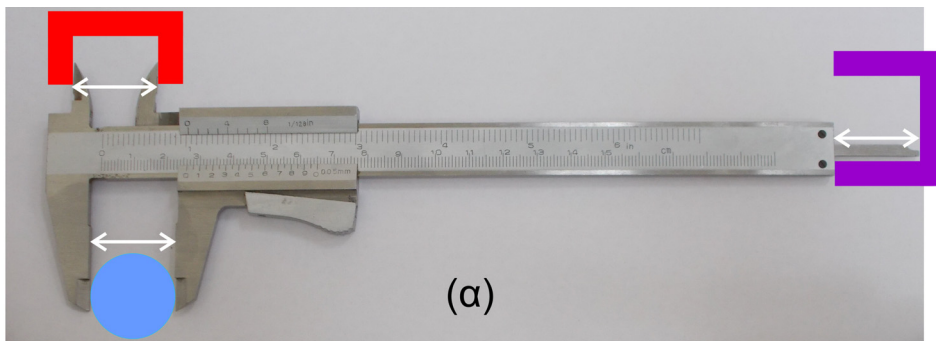
7.1. Μέτρηση μήκους με όργανα ακριβείας

7.1.1. Διαστημόμετρο

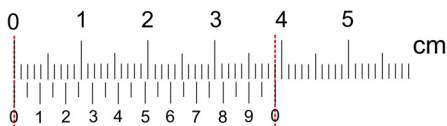
Ο καθένας μας είναι εξοικειωμένος με τη μέτρηση των διαστάσεων ενός σώματος (ύψος, πλάτος ή μήκος), καθώς και τη μέτρηση αποστάσεων με τη χρήση της μετροταινίας. Όταν ωστόσο απαιτείται μεγαλύτερη ακρίβεια στη μέτρηση ή χρειάζεται να μετρήσουμε μικρές διαστάσεις, χρησιμοποιούμε όργανα μέτρησης όπως το διαστημόμετρο ή το μικρόμετρο (Καμαράτος, 2002).

Το διαστημόμετρο χρησιμοποιείται για τη μέτρηση διαστάσεων διαφόρων αντικειμένων, όπου απαιτείται ακρίβεια καλύτερη του 1 mm. Το μέγεθος βέβαια των υπό μέτρηση αντικειμένων περιορίζεται περίπου στα 15-20 cm. Το διαστημόμετρο αποτελείται από ένα μεταλλικό κανόνα πάνω στον οποίο υπάρχει χαραγμένη κλίμακα που φέρει υποδιαιρέσεις σε mm ή/και σε inches (Σχήμα 7.1α). Στο αριστερό του άκρο και εκατέρωθεν της κλίμακας, υπάρχουν δύο ζεύγη σιαγόνων. Η δεξιά σιαγόνα μπορεί να κινείται πάνω στο κύριο σώμα του διαστημόμετρου, ώστε να μπορούμε να προσαρμόσουμε κατάλληλα το υπό μέτρηση αντικείμενο. Για τη μέτρηση των εξωτερικών διαστάσεων αντικειμένων (π.χ. διάμετρος σωλήνα), τοποθετούμε το αντικείμενο μεταξύ των δύο κάτω σιαγόνων και διαβάζουμε το αποτέλεσμα στην κλίμακα του οργάνου. Με τις πάνω σιαγόνες του οργάνου μπορούμε να μετρήσουμε την εσωτερική διάμετρο ενός σωλήνα, ενώ με την προεξέχουσα στο άκρο του οργάνου γλωσσίδα, μπορούμε να μετρήσουμε το βάθος εντομών. Σε κάθε περίπτωση, η απόσταση μεταξύ των εσωτερικών πλευρών των κάτω σιαγόνων είναι ίδια με την απόσταση των εξωτερικών πλευρών των άνω σιαγόνων και το μήκος της γλωσσίδας στο δεξί άκρο του οργάνου (Σχήμα 7.1α).

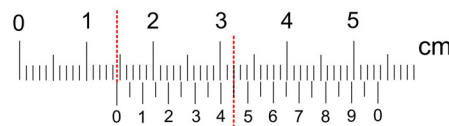
Συνήθως κατά τις μετρήσεις, το δεξί άκρο του μετρούμενου αντικειμένου δε συμπίπτει με μια χαραγή της κύριας κλίμακας και για ακριβέστερη μέτρηση πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την κλίμακα του βερνιέρου. Αυτός είναι ένας μικρός κανόνας, που μπορεί να ολισθαίνει ελεύθερα πάνω στο κύριο σώμα του διαστημόμετρου και του οποίου 10 υποδιαιρέσεις αντιστοιχούν σε 9 ακριβώς υποδιαιρέσεις της κυρίας κλίμακας. Έτσι, κάθε υποδιαίρεση του βερνιέρου είναι ίση με τα 9/10 κάθε υποδιαίρεσης της κυρίας κλίμακας, μικρότερη δηλαδή κατά το 1/10 αυτής. Στην περίπτωση αυτή, η ακρίβεια του οργάνου αυξάνεται κατά 10 φορές σε σχέση με ένα συνηθισμένο χάρακα, δηλαδή γίνεται 0.1 mm. Οι υποδιαιρέσεις του βερνιέρου μπορεί να είναι πολλαπλάσιες του 10, όπως στην περίπτωση των διαστημόμετρων του φοιτητικού εργαστηρίου οι οποίες είναι 20 και αντιστοιχούν σε 39 υποδιαιρέσεις της κύριας κλίμακας (Σχήμα 7.1α,γ). Κάθε υποδιαίρεση δηλαδή του βερνιέρου ισούται με τα 39/20 της υποδιαίρεσης της κύριας κλίμακας. Με τον τρόπο αυτό επιτυγχάνεται επιπλέον αύξηση της ακρίβειας του οργάνου σε 0.05 mm.



(α)



(β)



(γ)

Σχήμα 7.1 (α) Φωτογραφία διαστημόμετρου: οι αποστάσεις που σημειώνονται με τα βέλη είναι ίσες. (β) Κλίμακα βερνιέρου που τα 20 διαστήματα μεταξύ των χαραγών αντιστοιχούν σε 39 mm της κύριας κλίμακας του οργάνου. (γ) Η ανάγνωση της μετρούμενης τιμής επιτυγχάνεται αντιστοιχίζοντας μια χαραγή της κλίμακας του βερνιέρου με μια χαραγή της κύριας κλίμακας του οργάνου, ώστε να συμπίπτουν ακριβώς. Εδώ, το «μηδέν» της κλίμακας του βερνιέρου δείχνει μήκος αντικειμένου μεταξύ 14 και 15 mm. Η ενδιάμεση χαραγή των ενδείξεων 4 και 5 της κλίμακας του βερνιέρου είναι στην ίδια ευθεία με μία ένδειξη της κύριας κλίμακας. Επομένως, το μήκος του υπό μέτρηση αντικειμένου είναι 14.45 mm.

Για τη μέτρηση του μήκους με τη χρησιμοποίηση της κλίμακας του βερνιέρου, ακολουθούμε την ακόλουθη διαδικασία. Αρχικά, θα πρέπει να μηδενίσουμε το όργανο φέρνοντας σε επαφή τις δύο σιαγόνες. Εφόσον δεν υπάρχει σφάλμα μετάθεσης του μηδενός, θα πρέπει το μηδέν της κλίμακας του βερνιέρου να ταυτίζεται με το μηδέν της κύριας κλίμακας, όπως στο Σχήμα 7.1β. Διαφορετικά, θα πρέπει να διορθώσουμε το αποτέλεσμα της μέτρησής μας. Στη συνέχεια, τοποθετούμε το υπό μέτρηση αντικείμενο μεταξύ των δύο σιαγόνων του οργάνου, έτσι ώστε αυτές να εφάπτονται ακριβώς με το αντικείμενο. Έστω ότι το μηδέν της κλίμακας του βερνιέρου δε συμπίπτει ακριβώς με κάποια υποδιαίρεση της κύριας κλίμακας, αλλά βρίσκεται μεταξύ της 14^{ης} και 15^{ης} χαραγής αυτής, όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.1γ. Συνεπώς, το μήκος του αντικειμένου θα είναι μεταξύ 14 και 15 mm. Στο Σχήμα 7.1γ παρατηρούμε ότι η 9^η υποδιαίρεση της κλίμακας του βερνιέρου (ή διαφορετικά η ένδειξη 4.5) συμπίπτει με μία χαραγή της κύριας κλίμακας και συγκεκριμένα αυτή που αντιστοιχεί στην ένδειξη 3.2 cm. Επειδή όμως κάθε υποδιαίρεση του βερνιέρου ισούται με 39/20 mm, είναι δηλαδή κατά 1/20 mm μικρότερη των 2mm, το μηδέν της κλίμακας του βερνιέρου θα απέχει κατά $9 \times 1/20 \text{ mm} = 4.5/10 \text{ mm} = 0.45 \text{ mm}$ από την ένδειξη 1.4 cm της κύριας κλίμακας. Το μήκος επομένως του αντικειμένου θα ισούται με 1.4 cm + 0.45 mm, δηλ. 14.45 mm.

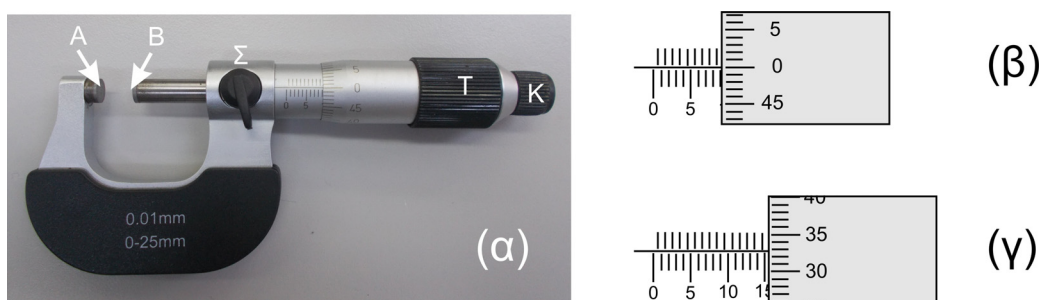
Επειδή, ανάλογα με τον τύπο του διαστημόμετρου, ο βερνιέρος μπορεί να έχει διαφορετικό αριθμό χαραγών, είναι ευκολότερο να χρησιμοποιούμε για τον υπολογισμό του μήκους τη σταθερά του βερνιέρου s , που ορίζεται ως η ελάχιστη τιμή που μπορούμε να διαβάσουμε κατευθείαν από την κλίμακα ενός βερνιέρου που φέρει N διαστήματα μεταξύ των υποδιαίρεσεών του. Έτσι, αν $L = 1 \text{ mm}$ είναι το μήκος μιας υποδιαίρεσης της κύριας κλίμακας και $N = 20$ ο αριθμός των υποδιαίρεσεων του βερνιέρου, η σταθερά του βερνιέρου θα ισούται με $s = 1/20 \text{ mm} = 0.05 \text{ mm}$. Επομένως, το μήκος L ενός αντικειμένου θα ισούται με

$$L = l_0 + l \cdot s$$

όπου l_0 η ένδειξη της κύριας κλίμακας και l η υποδιαίρεση του βερνιέρου που συμπίπτει με κάποια χαραγή της κύριας κλίμακας. Στο παράδειγμα του Σχήματος 7.1γ, θα έχουμε $s = 1/20 \text{ mm} = 0.05 \text{ mm}$ και $L = 1.4 \text{ cm} + 9 \times 0.05 \text{ mm} = 14 \text{ mm} + 0.45 \text{ mm} = 14.45 \text{ mm}$ ή 1.445 cm. Με άλλα λόγια, οι ενδείξεις σε ένα τέτοιο διαστημόμετρο μπορούν να έχουν βήμα 0.05 mm.

7.1.2. Μικρόμετρο

Το μικρόμετρο χρησιμοποιείται για μετρήσεις διαστάσεων αντικειμένων όπου απαιτείται ακόμη μεγαλύτερη ακρίβεια (μέχρι $1/100$ mm). Ωστόσο, οι διαστάσεις των υπό μέτρηση αντικειμένων περιορίζονται περίπου στα 25 mm για μικρόμετρα σαν και αυτά που απεικονίζονται στο Σχήμα 7.2α. Μία πλήρη περιστροφή του τύμπανου T αντιστοιχεί σε μετατόπιση 0.5 mm. Για τη λήψη μετρήσεων, το υπό μέτρηση αντικείμενο τοποθετείται μεταξύ των σιαγόνων A και B έτσι ώστε μόλις να εφάπτεται σε αυτές. Η ασφάλεια Σ “κλειδώνει” τις σιαγόνες ώστε αυτές να μη μπορούν να μετακινηθούν κατά την ανάγνωση της ένδειξης. Η μετατόπιση της B σιαγόνας πρέπει να γίνεται μόνον με την περιστροφή της κεφαλής K και όχι με την περιστροφή του τύμπανου T , έτσι ώστε να επιτυγχάνεται σε κάθε μέτρηση η ίδια συμπίεση στις δύο επιφάνειες επαφής A και B και να αποφεύγεται παράλληλα η παραμόρφωση του αντικειμένου αλλά και η καταστροφή του οργάνου.



Σχήμα 7.2 (α) Μικρόμετρο και (β, γ) κλίμακα κυκλικού βερνιέρου. Το περιστρεφόμενο τύμπανο είναι χωρισμένο σε 50 υποδιαίρεσεις, έτσι ώστε δύο πλήρεις περιστροφές του να αντιστοιχούν σε μετατόπιση της σιαγόνας κατά 1.00 mm που ισούται με τη μικρότερη υποδιαίρεση της κύριας κλίμακας.

Η σταθερά του βερνιέρου ορίζεται για το μικρόμετρο όπως και στην περίπτωση του διαστημόμετρου και ισούται με 0.01 mm για βερνιέρου που φέρει 50 υποδιαίρεσεις. Για την ανάγνωση της ένδειξης, το άκρο του κυκλικού βερνιέρου πάνω στην κύρια κλίμακα του μικρόμετρου μας υποδεικνύει την απόσταση μεταξύ των σιαγόνων, άρα και το μήκος του αντικειμένου σε mm. Στο παράδειγμα του Σχήματος 7.2β, η ένδειξη του μικρόμετρου είναι ακριβώς 9.00 mm. Θα πρέπει να προσέχουμε πάντα αν ο κυκλικός βερνιέρος έχει περιστραφεί πλήρως μία φορά και η ένδειξή του αφορά τη δεύτερη στροφή ή όχι. Αν για παράδειγμα βρίσκεται στη δεύτερη στροφή, τότε στο πάνω μέρος της κύριας κλίμακας θα είναι εμφανής η ενδιάμεση χαραγή μεταξύ δύο διαδοχικών χαραγών της κάτω κύριας κλίμακας η οποία υποδηλώνει τα χιλιοστά του μήκους. Στην περίπτωση του Σχήματος 7.2γ, το άκρο του βερνιέρου έχει περάσει τη χαραγή που αντιστοιχεί στα 15 mm, η ενδιάμεση χαραγή της πάνω κλίμακας δεν είναι εμφανής, ενώ η 33^η χαραγή του βερνιέρου είναι στην ίδια ευθεία με τον άξονα της κύριας κλίμακας. Επομένως, η ένδειξη του οργάνου θα είναι 15.33 mm.

Αρκετά συχνά, είτε λόγω κατασκευαστικής ατέλειας του οργάνου, είτε λόγω κακής χρήσης αυτού, η χαραγή 0 (μηδέν) του βερνιέρου δε συμπίπτει με τη χαραγή 0 (μηδέν) της κύριας κλίμακας, όταν οι σιαγόνες του μικρόμετρου έρθουν σε επαφή. Έτσι, αντί της μηδενικής ένδειξης, επειδή η πρώτη χαραγή του βερνιέρου είναι μετατοπισμένη από το μηδέν της κύριας κλίμακας (μετάθεση μηδενός), η μετρούμενη τιμή είναι λανθασμένη και πρέπει να διορθωθεί. Η μετάθεση του μηδενός υπολογίζεται από την ένδειξη του βερνιέρου όταν οι δύο σιαγόνες είναι σε επαφή. Όταν η πρώτη χαραγή του βερνιέρου (ένδειξη 0) έχει μετατοπιστεί πάνω από τον άξονα της κύριας κλίμακας, η διόρθωση προστίθεται στην τελική ένδειξη, ενώ αφαιρείται όταν η μετατόπιση είναι από την άλλη πλευρά της κλίμακας.

7.2. Μέτρηση μάζας

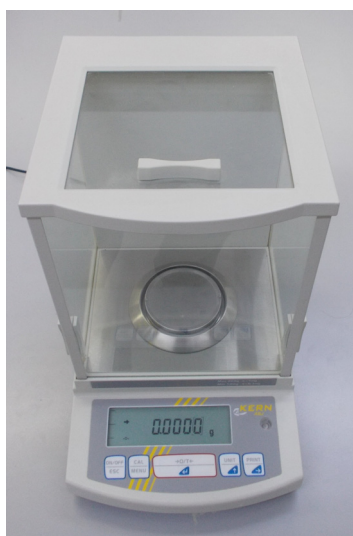
Για τη μέτρηση της μάζας διαφόρων σωμάτων στο εργαστήριο, χρησιμοποιείται μηχανικός ζυγός σαν και αυτόν που απεικονίζεται στο Σχήμα 7.3. Η διακριτική ικανότητα του ζυγού είναι 0.1 g, ενώ μπορεί να ζυγώσει μάζες έως και 610 g. Η ζύγιση γίνεται τοποθετώντας το προς μέτρηση σώμα στο δίσκο και

μετακινώντας τους κινητούς δρομείς πάνω στις ευθύγραμμες κλίμακες, προσπαθούμε να σταθεροποιήσουμε τη βελόνα στο δεξιό μέρος του ζυγού, στη θέση μηδέν. Η ένδειξη που διαβάζουμε αθροιστικά πάνω στις τρεις ευθύγραμμες κλίμακες του ζυγού αντιστοιχεί στη μάζα του σώματος σε γραμμάρια. Πριν ωστόσο τοποθετήσουμε την προς μέτρηση μάζα πάνω στο ζυγό, βεβαιωνόμαστε ότι η βελόνα δείχνει μηδέν, αλλιώς θα πρέπει να διορθώσουμε τη μέτρησή μας, λαμβάνοντας υπόψη τη μετάθεση του μηδενός. Εναλλακτικά, μπορούμε να μηδενίσουμε τη βελόνα ρυθμίζοντας τη θέση βίδας στο αριστερό μέρος του ζυγού. Είναι σημαντικό κατά τη ζύγιση να προσέχουμε οι μετακινούμενες μάζες στις κλίμακες των 100 και 500 g να “κλειδώνουν” μέσα σε μία από τις εγχοπές που υπάρχουν. Η μάζα στην κλίμακα των 10 g μπορεί να ολισθαίνει ελεύθερα προκειμένου να ισορροπήσει η βελόνα στη θέση μηδέν.

Για τη μέτρηση της μάζας ενός σώματος με μεγαλύτερη ακρίβεια ή για τη ζύγιση μικρών μαζών όπως απαιτείται για παράδειγμα σε ένα εργαστήριο χημείας, χρησιμοποιούνται ηλεκτρονικοί ζυγοί που μπορούν να μετρήσουν με ακρίβεια χιλιοστού του γραμμαρίου (0.001 g) ή και ακόμα μεγαλύτερη (Σχήμα 7.4). Στην περίπτωση βέβαια των μετρήσεων πολύ μικρών μαζών, οι παράγοντες που μπορεί να επηρεάσουν το αποτέλεσμα είναι πολλοί και θα πρέπει να επιδείξουμε ιδιαίτερη προσοχή αλλά και ικανότητα για να επιτύχουμε ορθές μετρήσεις. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι οποιοδήποτε ρεύμα αέρα από τη λειτουργία του κλιματισμού ή το ξαφνικό άνοιγμα της πόρτας, μπορεί να επηρεάσει το αποτέλεσμα της μέτρησης. Για το λόγο αυτό, η τοποθέτηση του σώματος γίνεται μέσα σε ειδική θήκη που το προστατεύει από τις εξωτερικές επιδράσεις του αέρα. Συνήθως, οι ζυγοί αυτοί τοποθετούνται πάνω σε ειδικές βάσεις, ενώ φέρουν δικό τους μηχανισμό οριζοντίωσης, ώστε να εξασφαλιστεί η ορθή λειτουργία του ευαίσθητου μηχανισμού τους.



Σχήμα 7.3 Εργαστηριακός μηχανικός ζυγός.

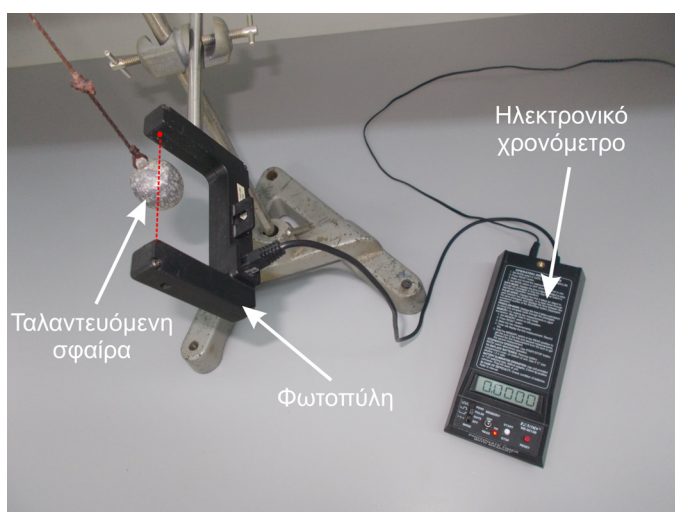


Σχήμα 7.4 Ηλεκτρονικός ζυγός του εργαστηρίου φυσικής με ακρίβεια δεκάτου του χιλιοστού του γραμμαρίου (0.0001 g).

7.3. Μέτρηση χρόνου

Ο χρόνος είναι ένα θεμελιώδες φυσικό μέγεθος που χρησιμοποιούμε πολύ συχνά για να απεικονίσουμε την εξάρτηση ως προς αυτόν διαφόρων άλλων φυσικών μεγεθών (βλ. Σχήμα 1.1). Σε πολλές περιπτώσεις φαινομένων μικρής χρονικής διάρκειας, η ακρίβεια στη μέτρηση του χρόνου παίζει καθοριστικό ρόλο για την εξαγωγή ασφαλών συμπερασμάτων και την επαλήθευση διάφορων φυσικών νόμων. Σε άλλες πάλι περιπτώσεις που παρατηρούμε χρονικά μεταβαλλόμενα φαινόμενα ή λαμβάνουμε μετρήσεις μεγάλης διάρκειας, η ακρίβεια δεν παίζει τόσο καθοριστικό ρόλο.

Για τη μέτρηση του χρόνου σε εργαστηριακά πειράματα χρησιμοποιούμε συνήθως ηλεκτρονικά χρονόμετρα με ακρίβεια 0.01 s. Η ακρίβεια αυτή των χρονομέτρων είναι πολύ μεγάλη αλλά η ακρίβεια των μετρήσεων μας μπορεί να εξαρτάται και από άλλους παράγοντες που μπορεί να αλλάξουν σημαντικά την αβεβαιότητα των μετρήσεών μας. Χαρακτηριστικό παράδειγμα, που έχουμε ήδη αναφέρει στο Κεφ. 6.1, είναι η μέτρηση της περιόδου ταλάντωσης ενός εκκρεμούς, όπου παρόλη τη μεγάλη ακρίβεια του οργάνου (0.01 s), η αβεβαιότητα στις μετρήσεις της περιόδου μπορεί να είναι της τάξης του 10-20%, αφού στην περίπτωση αυτή παίζει καθοριστικό ρόλο ο χρόνος αντίδρασης του πειραματιστή κατά την έναρξη και παύση της λειτουργίας του χρονομέτρου. Η αβεβαιότητα αυτή μπορεί ωστόσο να βελτιωθεί σημαντικά με διάφορα τεχνάσματα που μπορούμε να εφαρμόσουμε στην πειραματική διαδικασία. Αν για παράδειγμα χρονομετρήσουμε με ένα ηλεκτρονικό χρονόμετρο χειρός τη διάρκεια δέκα πλήρων ταλαντώσεων αντί για μίας, τότε βάσει της σχέσης 6.19, η αβεβαιότητα στο αποτέλεσμα θα ελαττωθεί επίσης 10 φορές. Η αβεβαιότητα μπορεί επίσης να βελτιωθεί σημαντικά όταν στη διαδικασία της λήψης μετρήσεων υπάρχει η δυνατότητα να μην επεμβαίνει ο χειριστής. Για παράδειγμα, με τη χρήση του ηλεκτρονικού χρονομέτρου του Σχήματος 7.5, η έναρξη και η παύση της λειτουργίας του χρονομέτρου επιτυγχάνεται αυτόματα όταν η ταλαντευόμενη σφαίρα διακόψει μία δέσμη υπέρυθρης ακτινοβολίας που ανιχνεύεται από μία φωτοδίοδο του ανιχνευτή. Με τον τρόπο αυτό εξαλείφεται ένας σημαντικός παράγοντας αβεβαιότητας στη μέτρηση της περιόδου ταλάντωσης (βλ. Κεφ. 9.2).



Σχήμα 7.5 Ηλεκτρονικό χρονόμετρο όπου με τη χρήση φωτοπύλης (photogate) επιτυγχάνεται η αυτόματη καταγραφή της περιόδου ταλάντωσης μίας σφαίρας, χωρίς την εξωτερική παρέμβαση του χειριστή.

7.4. Υπολογισμός πυκνότητας μεταλλικών σωμάτων

7.4.1. Σκοπός του πειράματος

Σκοπός του πειράματος είναι ο υπολογισμός της μέσης πυκνότητας 10 μεταλλικών σφαιρών καθώς και της πυκνότητας ενός αλουμινένιου σωλήνα. Αυτό επιτυγχάνεται με τη μέτρηση των διαστάσεων των μεταλλικών σωμάτων, προκειμένου να υπολογιστεί ο όγκος τους καθώς και της ζύγισης τους με μηχανικό ζυγό για την

εύρεση της μάζας τους. Το ζητούμενο σε κάθε περίπτωση είναι αποτέλεσμα σύνθετης μέτρησης, όπου εφαρμόζουμε τους κανόνες που έχουν αναφερθεί για τον προσδιορισμό της καλύτερης τιμής της πυκνότητας ρ_b και της αντίστοιχης σχετικής αβεβαιότητας σ/ρ_b , μέσω των ακόλουθων σχέσεων

$$\rho_b = \frac{\bar{m}}{\bar{V}} \quad (7.1)$$

$$\frac{\sigma_{\rho_b}}{\rho_b} = \sqrt{\left(\frac{\sigma\bar{m}}{\bar{m}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma\bar{V}}{\bar{V}}\right)^2} \quad (7.2)$$

7.4.2. Πειραματικό μέρος

7.4.2.1. Χρησιμοποιούμενα όργανα

1. Διαστημόμετρο (βλ. Σχήμα 7.1).
2. Μικρόμετρο (βλ. Σχήμα 7.2).
3. Μηχανικός ζυγός (βλ. Σχήμα 7.3).
4. Κυλινδρικοί σωλήνες αλουμινίου διαφόρων διαστάσεων.
5. Μεταλλικές σφαίρες που είναι κατασκευαστικά πανομοιότυπες.

7.4.2.2. Μετρήσεις

1^ο Πείραμα

1. Εξοικειωθείτε με τα όργανα μέτρησης διαστάσεων, μετρώντας διάφορα αντικείμενα που βρίσκονται τριγύρω σας (μήκος μολυβιού, πάχος σελίδας βιβλίου, πάχος τρίχας). Υπολογίστε τη σταθερά του βερνιέρου για το μικρόμετρο (s_μ) και το διαστημόμετρο (s_δ).

$$s_\mu = \dots \dots \dots \text{ mm}$$

$$s_\delta = \dots \dots \dots \text{ mm}$$

Βρείτε τη μετάθεση του μηδενός για καθένα από αυτά (εφόσον υπάρχει), ώστε να διορθώσετε ανάλογα τις μετρήσεις σας.

2. Μετρήστε με το μικρόμετρο τη διάμετρο 10 σφαιρών και καταχωρίστε τις τιμές στον Πίνακα Μετρήσεων 7.1.

a/a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d_σ (mm)										

Πίνακας 7.1 Πίνακας μετρήσεων της διαμέτρου 10 μεταλλικών σφαιρών.

3. Υπολογίστε τη μέση τιμή της διαμέτρου των 10 σφαιρών από την ακόλουθη σχέση

$$\bar{d}_\sigma = \frac{\sum_{i=1}^{10} d_{\sigma,i}}{10} = \dots \dots \dots \text{ cm}$$

καθώς και την αντίστοιχη αβεβαιότητα (τυπική απόκλιση της μέσης τιμής) από τη σχέση

$$\sigma_{\bar{d}_\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (d_{\sigma,i} - \bar{d})^2}{10(10-1)}} = \dots \text{ cm}$$

Για τους παραπάνω υπολογισμούς, θα χρειαστεί να κατασκευάσετε χωριστά τον ακόλουθο πίνακα.

α/α	$d_{\sigma,i}$ (mm)	\bar{d}_σ (mm)	$d_{\sigma,i} - \bar{d}_\sigma$ (mm)	$(d_{\sigma,i} - \bar{d}_\sigma)^2$ (mm ²)
1				
2				
3				
...				
...				

Πίνακας 7.2 Πίνακας υπολογισμού μέσης τιμής και αβεβαιότητας των μετρήσεων της διαμέτρου των 10 σφαιρών.

4. Υπολογίστε τη μέση τιμή του όγκου των σφαιρών, καθώς και την αντίστοιχη αβεβαιότητα σύμφωνα με τις ακόλουθες σχέσεις

$$\bar{V}_\sigma = \frac{4}{3}\pi(\bar{r}_\sigma)^3 = \dots \text{ cm}^3$$

όπου $\bar{r}_\sigma = \bar{d}_\sigma/2$ η ακτίνα της σφαίρας

και

$$\sigma_{\bar{V}_\sigma} = \frac{dV_\sigma}{dr} \sigma_{\bar{r}_\sigma} = 4\pi(\bar{r}_\sigma)^2 \sigma_{\bar{r}_\sigma} = \dots \text{ cm}^3$$

όπου $\sigma_{\bar{r}_\sigma} = \sigma_{\bar{d}_\sigma}/2$ η αντίστοιχη αβεβαιότητα για την ακτίνα της σφαίρας.

Γράψτε το αποτέλεσμα με τη μορφή

$$V_\sigma = \bar{V}_\sigma \pm \sigma_{\bar{V}_\sigma} = \dots \pm \dots \text{ cm}^3$$

5. Χρησιμοποιήστε το μηχανικό ζυγό για να ζυγίσετε κάθε μία σφαίρα ξεχωριστά και καταχωρίστε τα αποτελέσματα στον Πίνακα Μετρήσεων 7.3.

α/α	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m_σ (g)										

Πίνακας 7.3 Πίνακας μετρήσεων της μάζας των 10 μεταλλικών σφαιρών.

6. Υπολογίστε τη μέση τιμή της μάζας των 10 σφαιρών από την ακόλουθη σχέση

$$\bar{m}_\sigma = \frac{\sum_{i=1}^{10} m_{\sigma,i}}{10} = \dots\dots\dots \text{g}$$

καθώς και την αντίστοιχη αβεβαιότητα (τυπική απόκλιση της μέσης τιμής) από τη σχέση

$$\sigma_{\bar{m}_\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (m_{\sigma,i} - \bar{m})^2}{10(10 - 1)}} = \dots\dots\dots \text{g}$$

Για τον παραπάνω υπολογισμό κατασκευάστε πίνακα αντίστοιχο του Πίνακα 7.2. Γράψτε το αποτέλεσμα με τη μορφή

$$m_\sigma = \bar{m}_\sigma \pm \sigma_{\bar{m}_\sigma} = \dots\dots\dots \pm \dots\dots\dots \text{g}$$

7. Από τις μέσες τιμές και τις αντίστοιχες αβεβαιότητες για τον όγκο και τη μάζα, υπολογίστε την καλύτερη τιμή της πυκνότητας των σφαιρών και την αντίστοιχη σχετική αβεβαιότητα βάσει των σχέσεων 7.1 και 7.2

$$\rho_b = \frac{\bar{m}_\sigma}{\bar{V}_\sigma} = \dots\dots\dots \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

$$\frac{\sigma_\rho}{\rho_b} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\bar{m}_\sigma}}{\bar{m}_\sigma}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\bar{V}_\sigma}}{\bar{V}_\sigma}\right)^2} = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

Εκφράστε το αποτέλεσμα ως

$$\rho = \rho_b \pm \sigma_\rho = \dots\dots\dots \pm \dots\dots\dots \text{g/cm}^3$$

8. Αναζητήστε στο διαδίκτυο τιμές της πυκνότητας διαφόρων μετάλλων. Από τι υλικό πιστεύετε ότι είναι κατασκευασμένες οι σφαίρες βασιζόμενοι στην πυκνότητα που υπολογίσατε προηγουμένως;

2^ο Πείραμα

9. Μετρήστε με το διαστημόμετρο 10 φορές την εξωτερική διάμετρο $d_{εξ}$ του κυλινδρικού σωλήνα και καταχωρίστε τις τιμές στον Πίνακα Μετρήσεων 7.4. Η μέτρηση της διαμέτρου να γίνει σε διαφορετικά σημεία του σωλήνα.

a/a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$d_{εξ}$ (cm)										

Πίνακας 7.4 Πίνακας μετρήσεων της εξωτερικής διαμέτρου του κυλινδρικού σωλήνα.

10. Μετρήστε 5 φορές την εσωτερική διάμετρο του σωλήνα $d_{εσ}$ και το μήκος του l (σε διαφορετικά σημεία όπως και πριν) και καταχωρίστε τα αποτελέσματα στον Πίνακα Μετρήσεων 7.5.
11. Από τις μέσες τιμές των τριών μετρούμενων μεγεθών υπολογίστε το εμβαδόν της περιφέρειας E και τον όγκο V του σωλήνα.

a/a	1	2	3	4	5	a/a	1	2	3	4	5
$d_{εσ}$ (cm)						l (cm)					

Πίνακας 7.5 Πίνακας μετρήσεων της εσωτερικής διαμέτρου και του ύψους του κυλινδρικού σωλήνα.

12. Αφού υπολογίσετε τις αντίστοιχες αβεβαιότητες για κάθε ένα από τα μετρούμενα μεγέθη (εσωτερική, εξωτερική διάμετρος και μήκος), γράψτε τα αποτελέσματα για το εμβαδό και τον όγκο με την παρακάτω μορφή

$$E = \bar{E} \pm \sigma \bar{E} = \dots \pm \dots \text{ cm}^2$$

$$V = \bar{V} \pm \sigma \bar{V} = \dots \pm \dots \text{ cm}^3$$

13. Ζυγίστε μία φορά το σωλήνα με το μηχανικό ζυγό και χρησιμοποιώντας το προηγούμενο αποτέλεσμα για τον όγκο, υπολογίστε την πυκνότητα του ρ_{σ} καθώς και την αβεβαιότητά του.

$$\rho_{\pi} = \frac{m}{\bar{V}} = \dots \text{ g/cm}^3$$

14. Συγκρίνετε την πειραματική τιμή που βρήκατε με τη θεωρητική τιμή της πυκνότητας του αλουμινίου ($\rho_{Al}=2.70 \text{ g/cm}^3$), υπολογίζοντας την επί τοις εκατό διαφορά των δύο τιμών.

$$\left| \frac{\rho_{\pi} - \rho_{Al}}{\rho_{Al}} \right| \cdot 100 = \dots \%$$

7.5. Μέτρηση θερμοκρασίας – Δυναμική απόκριση θερμομέτρου

7.5.1. Ορισμός θερμοκρασίας και θερμοκρασιακές κλίμακες

Η έννοια της θερμοκρασίας μπορεί να προκύψει από το μηδενικό θερμοδυναμικό αξίωμα, σύμφωνα με το οποίο, “αν δύο σώματα βρίσκονται σε θερμική ισορροπία με ένα τρίτο, τότε βρίσκονται σε θερμική ισορροπία και μεταξύ τους”. Τα τρία συστήματα δηλαδή θα πρέπει να έχουν την ίδια τιμή για μία από τις θερμοδυναμικές τους μεταβλητές την οποία και καλούμε θερμοκρασία. Το μηδενικό θερμοδυναμικό αξίωμα είναι επίσης γνωστό ως νόμος της θερμομετρίας: Αν το σώμα Β (θερμόμετρο) έχει βαθμονομηθεί με τη χρήση του σώματος Α σε δεδομένη θερμοκρασία, τότε, αν το σώμα Β είναι σε ισορροπία με το σώμα Γ, τα σώματα Α και Γ θα έχουν την ίδια θερμοκρασία. Σύμφωνα με την κινητική θεωρία των αερίων, η θερμοκρασία αποτελεί μέτρο της κινητικής ενέργειας των σωματιών που απαρτίζουν το θερμοδυναμικό σύστημα. Η “κινητικότητα” αυτή των δομικών μονάδων του συστήματος είναι αποτέλεσμα της θερμικής τους κίνησης. Όσο μεγαλύτερη είναι η θερμοκρασία ενός αερίου, τόσο περισσότερο ατάκτως κινούνται τα άτομα ή τα μόριά του.

Οι κλίμακες που χρησιμοποιούνται για τη μέτρηση της θερμοκρασίας, φαίνονται στον Πίνακα 7.6. Για τον ορισμό των κλιμάκων αυτών χρησιμοποιήθηκαν θερμοκρασίες αναφοράς, όπως το σημείο βρασμού του νερού και το σημείο πήξης του σε ατμοσφαιρική πίεση. Στην εκατονταβάθμια κλίμακα Celsius, το μηδέν της κλίμακας ορίστηκε ως το σημείο πήξης του νερού σε ατμοσφαιρική πίεση. Στην ίδια πίεση, το σημείο βρασμού του νερού ορίστηκε ως θερμοκρασία $100 \text{ }^{\circ}\text{C}$. Στην κλίμακα Fahrenheit, ορίστηκε ως μηδέν η ελάχιστη θερμοκρασία που μπορούσε να επιτευχθεί με τεχνητά μέσα ($-18 \text{ }^{\circ}\text{C}$), ενώ οι $100 \text{ }^{\circ}\text{F}$ ορίστηκαν ως η θερμοκρασία του ανθρώπινου σώματος ($37.8 \text{ }^{\circ}\text{C}$).

κλίμακα	$^{\circ}\text{Celsius}$	$^{\circ}\text{Réaumur}$	$^{\circ}\text{Fahrenheit}$	<i>Kelvin</i>	<i>Rankine</i>
Σημείο βρασμού του νερού σε P=1 atm	100 $^{\circ}\text{C}$	80 $^{\circ}\text{R}$	212 $^{\circ}\text{F}$	373.15 K	671.67 $^{\circ}\text{Ra}$
Σημείο πήξης του νερού σε P=1 atm	0 $^{\circ}\text{C}$	0 $^{\circ}\text{R}$	32 $^{\circ}\text{F}$	273.15 K	491.67 $^{\circ}\text{Ra}$

Πίνακας 7.6 Θερμοκρασιακές κλίμακες.

Μεταξύ του σημείου πήξης και του σημείου βρασμού του νερού, η κλίμακα Fahrenheit έχει 180 βαθμούς. Στην εκατονταβάθμια κλίμακα Kelvin, ως σημείο αναφοράς ορίστηκε το απόλυτο μηδέν (-273.15 $^{\circ}\text{C}$). Η κλίμακα Réaumur έχει σταματήσει πλέον να χρησιμοποιείται.

Για τη μετατροπή θερμοκρασιών από μία κλίμακα σε μια άλλη, χρησιμοποιούνται οι παρακάτω σχέσεις

$$a \text{ } ^{\circ}\text{C} = \frac{4}{5} a \text{ } ^{\circ}\text{R} = \left(32 + \frac{9}{5} a \right) \text{ } ^{\circ}\text{F} \quad (7.3)$$

$$b \text{ } ^{\circ}\text{R} = \frac{5}{4} b \text{ } ^{\circ}\text{C} = \left(32 + \frac{9}{4} b \right) \text{ } ^{\circ}\text{F} \quad (7.4)$$

$$c \text{ } ^{\circ}\text{F} = \frac{5}{9} (c - 32) \text{ } ^{\circ}\text{C} = \frac{4}{9} (c - 32) \text{ } ^{\circ}\text{R} \quad (7.5)$$

$$d \text{ } ^{\circ}\text{C} = d + 273.15 \text{ K} \quad (7.6)$$

$$e \text{ K} = (e - 273.15) \text{ } ^{\circ}\text{C} = \frac{9}{5} ((e - 273.15) + 32) \text{ } ^{\circ}\text{F} = \frac{9}{5} e \text{ } ^{\circ}\text{R} \quad (7.7)$$

Στις παραπάνω σχέσεις τα a , b , c , d και e εκφράζουν αριθμητικές τιμές θερμοκρασίας.

7.5.2. Μέτρηση θερμοκρασίας

Για τη μέτρηση της θερμοκρασίας, ανεξάρτητα από το χρησιμοποιούμενο όργανο, θα πρέπει να υπάρχουν φαινόμενα που λαμβάνουν χώρα υπό ορισμένες συνθήκες (P=1atm), στην ίδια σταθερή θερμοκρασία (σημεία σταθερής θερμοκρασίας). Τέτοιες σταθερές θερμοκρασίες είναι η θερμοκρασία συνύπαρξης νερού – πάγου (0 $^{\circ}\text{C}$) και η θερμοκρασία συνύπαρξης νερού – υδρατμού (100 $^{\circ}\text{C}$). Θα πρέπει επίσης να υπάρχει ιδιότητα του σώματος που χρησιμοποιείται για τη μέτρηση της θερμοκρασίας, που να είναι μονοσήμαντη συνάρτηση της θερμοκρασίας. Τέτοιες ιδιότητες είναι η θερμική διαστολή, η μεταβολή της ηλεκτρικής αντίστασης, το θερμοηλεκτρικό φαινόμενο και η εκπομπή ακτινοβολίας. Στη συνέχεια, αναφέρονται περιληπτικά κάθε μία από αυτές τις ιδιότητες.

(α) Θερμική διαστολή (θερμόμετρα υγρού, διμεταλλικό έλασμα)

Η αρχή λειτουργίας των θερμομέτρων υγρού ή των διμεταλλικών θερμομέτρων, βασίζεται στη διαστολή του όγκου του υγρού ή του στερεού, που παρατηρείται με την αύξηση της θερμοκρασίας (βλ. Κεφ. 8.3). Η μεταβολή του όγκου ΔV , για σχετικά μικρές μεταβολές της θερμοκρασίας ΔT , εκφράζεται από την ακόλουθη γραμμική σχέση (Σχέση 8.18)

$$\Delta V = \beta V_0 \Delta T$$

όπου β είναι ο συντελεστής διαστολής όγκου του υλικού (βλ. Πίνακα 8.5).

Στα θερμόμετρα υγρού, η διαστολή του υγρού (υδράργυρος ή αλκοόλη) είναι πολύ μεγαλύτερη από τη διαστολή του γυάλινου σωλήνα που περιέχει το υγρό. Κατάλληλα βαθμονομημένη κλίμακα κατά μήκος του σωλήνα, μας παρέχει την ένδειξη της θερμοκρασίας, εξαιτίας της ανόδου του υγρού μέσα στη στήλη.

Τα διμεταλλικά ελάσματα αποτελούνται από δύο μεταλλικά ελάσματα διαφορετικού υλικού, συγκολλημένα μεταξύ τους σε όλη την επιφάνειά τους. Εξαιτίας του διαφορετικού συντελεστή γραμμικής

διαστολής που παρουσιάζουν, κατά τη θέρμανσή τους, προκαλείται ανομοιόμορφη διαστολή και κατά συνέπεια παραμόρφωση (κύρτωση). Με τον τρόπο αυτό, μπορούν να λειτουργούν είτε ως διακόπτες που ανοίγουν ή κλείνουν σε κάποιο κύκλωμα ανάλογα με τη θερμοκρασία, είτε ως θερμομέτρα, εφόσον συνδέονται με κάποιον δείκτη που κινείται σε κατάλληλη βαθμονομημένη κλίμακα.

(β) Ηλεκτρική αντίσταση (θερμομέτρα αντιστάσεως)

Η ηλεκτρική αντίσταση των μετάλλων μεταβάλλεται με τη θερμοκρασία, σύμφωνα με μία γραμμική σχέση

$$R_T = R_0(1 + \alpha T) \quad (7.8)$$

όπου R_0 είναι η ηλεκτρική αντίσταση σε θερμοκρασία $T=0^\circ\text{C}$, R_T η αντίσταση σε θερμοκρασία T και α είναι ο θερμικός συντελεστής της αντίστασης που εξαρτάται από το υλικό κατασκευής της. Βαθμονομώντας επομένως την αντίσταση, μπορούμε να τη χρησιμοποιήσουμε για τη μέτρηση της θερμοκρασίας.

Εναλλακτικά, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την κατασκευή θερμομέτρων αντίστασης, ημιαγωγά υλικά (thermistors), στα οποία η μεταβολή της αντίστασης είναι πολύ μεγαλύτερη απ' ό,τι στα μέταλλα, με αποτέλεσμα να εμφανίζουν πολύ μεγαλύτερη ευαισθησία. Τα thermistor ωστόσο δεν εμφανίζουν γραμμική εξάρτηση ως προς τη θερμοκρασία (βλ. Σχήμα 2.5).

(γ) Θερμοηλεκτρικό φαινόμενο (θερμοζεύγη)

Σε κύκλωμα δύο διαφορετικών μεταλλικών συρμάτων που τα σημεία επαφής τους βρίσκονται σε διαφορετική θερμοκρασία, αναπτύσσεται ηλεκτρεγερτική δύναμη (της τάξης των mV), η τιμή της οποίας εξαρτάται από τη διαφορά θερμοκρασίας των δύο επαφών. Τη διαφορά δυναμικού μπορούμε να τη μετρήσουμε παρεμβάλλοντας ένα βολτόμετρο. Στην πράξη, η μία επαφή τοποθετείται σε ένα λουτρό σταθερής θερμοκρασίας (πχ. νερό και πάγος), ενώ η άλλη επαφή στο σώμα του οποίου θέλουμε να μετρήσουμε τη θερμοκρασία. Με τη μεταβολή της θερμοκρασίας, αλλάζει και η μετρούμενη διαφορά δυναμικού, οπότε με κατάλληλη βαθμονόμηση, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη διάταξη αυτή για μέτρηση της θερμοκρασίας.

(δ) Εκπομπή ακτινοβολίας (οπτικό πυρόμετρο)

Για τη μέτρηση υψηλών θερμοκρασιών, χρησιμοποιούνται τα οπτικά πυρόμετρα. Η αρχή λειτουργίας τους βασίζεται στο γεγονός ότι όλα ανεξαιρέτως τα σώματα εκπέμπουν ενέργεια υπό τη μορφή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, που εξαρτάται από τη θερμοκρασία T του σώματος (βλ. Κεφ. 10.1). Στην περίπτωση αυτή, ο ρυθμός εκπομπής ενέργειας ανά μονάδα επιφάνειας, R , δίνεται από το νόμο Stefan-Boltzman

$$R \propto \sigma \cdot T^4 \quad (7.9)$$

όπου T είναι η θερμοκρασία και σ η σταθερά των Stefan-Boltzmann ($\sigma = 5.6705 \times 10^{-8} \text{ Watt/m}^2\text{K}^4$). Στην πράξη, τα οπτικά πυρόμετρα χρησιμοποιούνται για την εξ αποστάσεως μέτρηση υψηλών θερμοκρασιών (π.χ. σε κλίβανους), όταν δεν είναι εφικτό να χρησιμοποιηθούν άλλου είδους αισθητήρια μέτρησης της θερμοκρασίας.

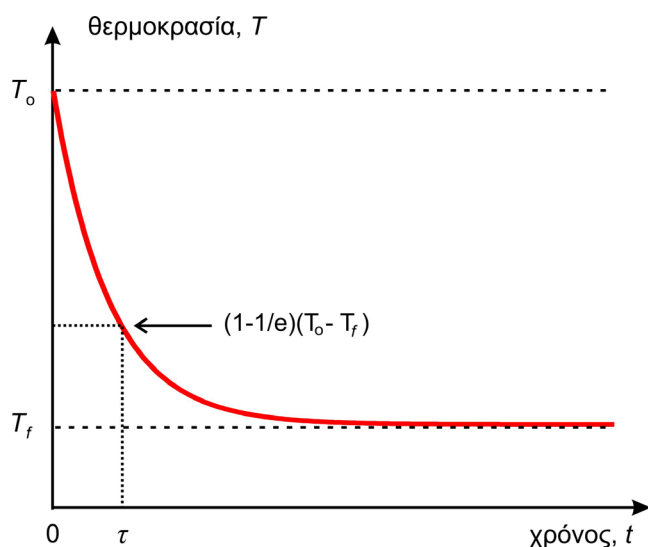
7.5.3. Δυναμική απόκριση θερμομέτρων

Όπως αναφέρθηκε ήδη στην ενότητα 2.4, το υδραργυρικό θερμομέτρο αποτελεί ένα όργανο μέτρησης πρώτης τάξης. Η μέτρηση της θερμοκρασίας με οποιοδήποτε θερμομέτρο απαιτεί ότι αυτό θα πρέπει να βρίσκεται σε θερμική ισορροπία με το περιβάλλον του. Η διαδικασία αυτή απαιτεί κάποιο εύλογο χρονικό διάστημα και επομένως, ο τρόπος με τον οποίο ανταποκρίνεται το κάθε θερμομέτρο στις εξωτερικές μεταβολές της θερμοκρασίας, ή διαφορετικά, η δυναμική απόκριση του θερμομέτρου, παίζει καθοριστικό ρόλο στην ορθότητα των μετρήσεων (Formasini, 2008).

Στην περίπτωση μίας απότομης μεταβολής της θερμοκρασίας (βηματική αλλαγή), είδαμε ότι η ένδειξη του θερμομέτρου μεταβάλλεται εκθετικά ως προς το χρόνο (βλ. Σχέση 2.5). Αν η αρχική θερμοκρασία του θερμομέτρου τη χρονική στιγμή $t=0$ s είναι T_0 και μεταφέρουμε ακαριαία το θερμομέτρο σε ένα περιβάλλον σταθερής θερμοκρασίας T_f , η ένδειξη T του θερμομέτρου θα μεταβληθεί ως προς το χρόνο βάσει της ακόλουθης σχέσης

$$T = T_f + (T_o - T_f)e^{-t/\tau} \quad (7.10)$$

όπου η ποσότητα τ ονομάζεται σταθερά χρόνου και έχει διαστάσεις χρόνου. Η σταθερά χρόνου, σε μεγέθη που ακολουθούν εκθετική μεταβολή, εκφράζει το χρονικό διάστημα που χρειάζεται για να μεταβληθεί το μέγεθος κατά 67% ($=1-1/e$) της ολικής μεταβολής που παρουσιάζει (Σχήμα 7.6).



Σχήμα 7.6 Μεταβολή ως προς το χρόνο της θερμοκρασίας ενός θερμομέτρου η οποία υφίσταται μία βηματική αλλαγή από θερμοκρασία T_o σε τελική θερμοκρασία T_f . Η σταθερά χρόνου τ εκφράζει το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να ελαττωθεί η θερμοκρασία κατά 67% από την αρχική τιμή της T_o στην τελική τιμή T_f .

Από τη σχέση 7.10 θα έχουμε

$$\frac{T - T_f}{T_o - T_f} = e^{-t/\tau} \Rightarrow \ln\left(\frac{T - T_f}{T_o - T_f}\right) = -\frac{t}{\tau} \quad (7.11)$$

Θέτοντας στη σχέση 7.11, $y = \ln[(T-T_f)/(T_o-T_f)]$ και $\kappa = 1/\tau$, η σχέση 7.11 έχει τη μορφή ευθείας για τις μεταβλητές y και t , δηλαδή

$$y = -\kappa \cdot t \quad (7.12)$$

Η αβεβαιότητα στις μετρούμενες θερμοκρασίες T , T_o και T_f προφανώς διαδίδεται στην ποσότητα y (Taylor, 1997) και ισούται με

$$\delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial T} \delta T\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial T_o} \delta T_o\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial T_f} \delta T_f\right)^2} \quad (7.13)$$

Επειδή γνωρίζουμε ότι για μία συνάρτηση y ισχύει $(\ln y)' = y'/y$, η σχέση 7.13 δίνει τελικά για την αβεβαιότητα

$$\delta y = \sqrt{\frac{(\delta T)^2}{(T - T_f)^2} + \frac{(\delta T_o)^2}{(T_o - T_f)^2} + \left[\frac{T - T_o}{(T_f - T)(T_f - T_o)}\right]^2 (\delta T_f)^2} \quad (7.14)$$

Η τιμή της σταθεράς κ και της αντίστοιχης αβεβαιότητας, μπορεί να προκύψει με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων, βάσει των σχέσεων 3.7 και 3.9. Από την τιμή της σταθεράς κ μπορεί να υπολογιστεί η σταθερά χρόνου τ του θερμομέτρου.

7.5.4. Σκοπός του πειράματος

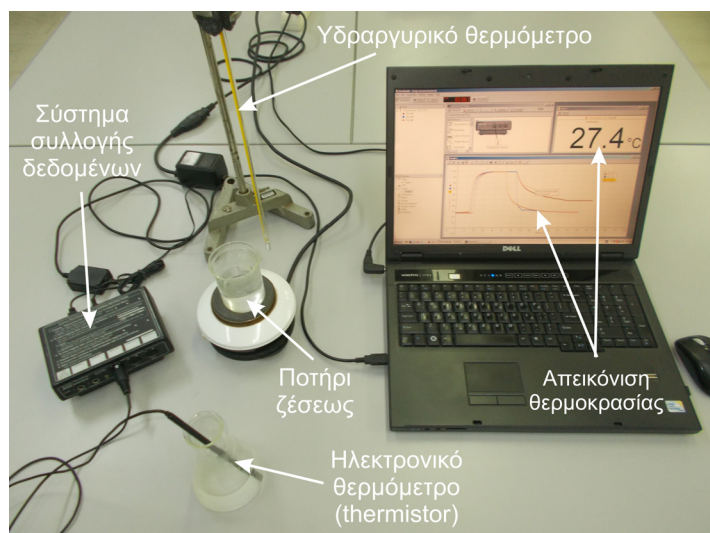
Σκοπός του πειράματος είναι ο προσδιορισμός της σταθεράς χρόνου σε ένα υδραργυρικό θερμοόμετρο και σε ένα θερμοόμετρο αντιστάσεως (thermistor). Η βηματική αλλαγή στη θερμοκρασία T μπορεί να πραγματοποιηθεί τοποθετώντας το θερμοόμετρο, από τον αέρα που βρίσκεται αρχικά σε θερμική ισορροπία ($T_o \approx 20^\circ\text{C}$), σε βραστό νερό ($T_f = 100^\circ\text{C}$). Η γραφική παράσταση της ποσότητας $\ln[(T-T_f)/(T_o-T_f)]$ ως προς το χρόνο t (Σχέση 7.11) πρέπει να είναι ευθεία με κλίση ίση με $1/\tau$.

7.5.5. Πειραματικό μέρος

7.5.5.1. Χρησιμοποιούμενα όργανα

1. Υδραργυρικό θερμοόμετρο (εύρος τιμών $-20^\circ\text{C} - 110^\circ\text{C}$, διακριτική ικανότητα 0.2°C).
2. Θερμοόμετρο αντιστάσεως (thermistor, εύρος τιμών $-5^\circ\text{C} - 105^\circ\text{C}$, ακρίβεια $\pm 0.5^\circ\text{C}$).
3. Χρονόμετρο ακρίβειας 0.01 s .
4. Ποτήρι ζέσεως και πλάκα θέρμανσης.
5. Ορθοστάτης για τη στήριξη των θερμομέτρων.
6. Η/Υ με σύστημα συλλογής δεδομένων και κατάλληλο λογισμικό για την καταγραφή και απεικόνιση της θερμοκρασίας του thermistor (Σύνδεσμοι 1 και 2, Βιβλιογραφία).

Η πειραματική διάταξη απεικονίζεται στο Σχήμα 7.7.



Σχήμα 7.7 Η πειραματική διάταξη για τη μελέτη της δυναμικής απόκρισης υδραργυρικού θερμομέτρου και θερμομέτρου αντιστάσεως.

7.5.5.2. Μετρήσεις

1. Θέστε σε λειτουργία την πλάκα θέρμανσης και τοποθετήστε το ποτήρι ζέσεως με το νερό πάνω σε αυτήν. Τοποθετήστε το υδραργυρικό θερμοόμετρο στον ορθοστάτη, με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι ορατή όλη η κλίμακά του, για να μπορείτε να διαβάζετε τις ενδείξεις.

2. Σημειώστε τη θερμοκρασία δωματίου T_{RT} που βρίσκεται αρχικά το θερμόμετρο.
3. Τοποθετήστε το θερμόμετρο μέσα στο δοχείο με το νερό βρύσης και αφού περιμένετε λίγη ώρα, σημειώστε την ένδειξη του θερμομέτρου T_o .
4. Στη συνέχεια, τοποθετήστε το θερμόμετρο μέσα στο ποτήρι ζέσεως χωρίς αυτό να ακουμπάει στον πυθμένα και περιμένετε μέχρι η θερμοκρασία να ανέβει στους $90\text{ }^\circ\text{C}$.
5. Μετακινήστε το θερμόμετρο μαζί με τη βάση του και τοποθετήστε το πάλι στο δοχείο με το νερό βρύσης, ενώ ταυτόχρονα θέστε σε λειτουργία το χρονομέτρο. Λάβετε μετρήσεις της θερμοκρασίας ως προς το χρόνο και καταχωρίστε τις στον Πίνακα Μετρήσεων 7.7.
6. Υπολογίστε την ποσότητα $\ln(T-T_f)/(T_o-T_f)$ και καταχωρείστε τη στην τελευταία στήλη του Πίνακα 7.7.
7. Χαράξτε σε χιλιοστομετρικό χαρτί τη γραφική παράσταση $\ln(T-T_f)/(T_o-T_f) = f(t)$ και από την κλίση της ευθείας, υπολογίστε τη σταθερά χρόνου τ του υδραργυρικού θερμομέτρου.
8. Μπορείτε να επαναλάβετε την παραπάνω διαδικασία (βήματα 4-5), αφήνοντας αυτή τη φορά το θερμόμετρο να κρυώσει στον αέρα και όχι μέσα στο δοχείο με το νερό βρύσης. Παρατηρείτε κάποια διαφοροποίηση ως προς τα αποτελέσματα;

$T_o = \dots\dots\dots\text{ }^\circ\text{C}$		$T_f = \dots\dots\dots\text{ }^\circ\text{C}$	
a/a	Χρόνος, t (s)	Θερμοκρασία, T ($^\circ\text{C}$)	$\ln(T-T_f)/(T_o-T_f)$
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
...			
...			
...			

Πίνακας 7.7 Πίνακας μετρήσεων της θερμοκρασίας με υδραργυρικό θερμόμετρο.

Η προηγούμενη διαδικασία για τη μελέτη της χρονικής απόκρισης του υδραργυρικού θερμομέτρου μπορεί να επαναληφθεί για το ηλεκτρονικό θερμόμετρο αντιστάσεως (thermistor). Στην περίπτωση αυτή, οι ενδείξεις της θερμοκρασίας καταγράφονται κάθε 0.5 s και αποθηκεύονται στον Η/Υ, ώστε να είναι δυνατή η περαιτέρω επεξεργασία τους. Τα βήματα που ακολουθούμε περιγράφονται στη συνέχεια.

9. Θέστε σε λειτουργία το σύστημα συλλογής δεδομένων (data logger), αφού βεβαιωθείτε ότι το ηλεκτρονικό θερμόμετρο (thermistor) είναι συνδεδεμένο στο κανάλι A.
10. Στην επιφάνεια εργασίας του Η/Υ διπλοπατήστε στο εικονίδιο Thermistor. Στην οθόνη που θα εμφανιστεί, απεικονίζεται σε γράφημα η μεταβολή της ένδειξης του θερμομέτρου ως προς το χρόνο,

καθώς και ξεχωριστή ψηφιακή ένδειξη της θερμοκρασίας. Η έναρξη της καταγραφής επιτυγχάνεται πατώντας το εικονίδιο με την ένδειξη START.

11. Τοποθετήστε το ποτήρι ζέσεως με το νερό πάνω στην πλάκα θέρμανσης και περιμένετε μέχρι το βρασμό του.
12. Τοποθετήστε αρχικά το ηλεκτρονικό θερμόμετρο μέσα στο δοχείο με το νερό βρύσης και αφού περιμένετε λίγη ώρα, πατήστε START για την καταγραφή της θερμοκρασίας.
13. Αφού το νερό στο ποτήρι ζέσεως αρχίσει να βράζει, μετακινήστε το θερμόμετρο μέσα σε αυτό προσέχοντας να μην ακουμπάει στον πυθμένα. Στο γράφημα που παρουσιάζεται στην οθόνη μπορείτε να παρατηρείτε τη μεταβολή της θερμοκρασίας. Όταν η θερμοκρασία σταθεροποιηθεί περίπου στους 100 °C, μεταφέρεται γρήγορα το θερμόμετρο στο αρχικό δοχείο με το νερό βρύσης. Με τον τρόπο αυτό, μπορείτε να καταγράψετε τη χρονική απόκριση του θερμομέτρου τόσο κατά την αύξηση, όσο και κατά την ελάττωση της θερμοκρασίας του.
14. Για κάθε ένα από τα δύο στάδια της μεταβολής της θερμοκρασίας, μπορείτε ακολουθώντας τα βήματα 6-7 να υπολογίσετε τη σταθερά χρόνου του θερμομέτρου.
15. Για τη μελέτη της δυναμικής απόκρισης του thermistor μπορείτε να χρησιμοποιήσετε δεδομένα μετρήσεων που μπορείτε να βρείτε πατώντας [εδώ](#).

7.6. Ερωτήσεις

1. Ποιο όργανο θα χρησιμοποιούσατε για να μετρήσετε το πάχος μιας τρίχας; Γιατί;
2. Με τα όργανα που χρησιμοποιήσατε στο πρώτο πείραμα πώς θα μπορούσατε να υπολογίσετε τον αριθμό των σελίδων ενός βιβλίου χωρίς να τις μετρήσετε;
3. Για ποιο λόγο μετρήσατε τις διαμέτρους του σωλήνα σε διαφορετικές θέσεις;
4. Που νομίζετε ότι οφείλεται η απόκλιση στον υπολογισμό της πυκνότητας του αλουμινίου από τη θεωρητική τιμή;
5. Η χρονική απόκριση του θερμομέτρου είναι διαφορετική όταν αυτό τοποθετείται από το ζεστό νερό στο νερό βρύσης ή στο περιβάλλον του εργαστηρίου, που έχει την ίδια περίπου θερμοκρασία. Για ποιο λόγο συμβαίνει αυτό;
6. Βάσει της σταθεράς χρόνου που υπολογίσατε για το υδραργυρικό θερμόμετρο, πόσες σταθερές χρόνου θα πρέπει να περιμένετε για να μετρήσετε ορθά τη θερμοκρασία ενός σώματος 90 °C όταν αρχικά το θερμόμετρο δείχνει 20 °C;

Βιβλιογραφία/Αναφορές

Καμαράτος, Μ. (2002). *Εισαγωγή στην ανάλυση πειραματικών μετρήσεων. Απλά πειράματα μηχανικής-θερμότητας*. Ιωάννινα: Πανεπιστημιακό Τυπογραφείο.

Formasini, P. (2008). *The Uncertainty in Physical Measurements – An Introduction to Data Analysis in the Physics Laboratory*. New York: Springer.

Taylor, J. R. (1997). *An Introduction to Error Analysis – The Study of Uncertainties in Physical Measurements (2nd Ed)*. California: University Science Books.

Σύνδεσμοι στο διαδίκτυο που αναφέρονται εντός του κειμένου

1. http://www.pasco.com/prodCatalog/CI/CI-6400_scienceworkshop-500-interface/
2. <http://www.pasco.com/datastudio/>

Κεφάλαιο 8 - Πειράματα Μηχανικής & Θερμότητας

Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται πειράματα κινηματικής με τη χρήση αεροτροχιάς, δυναμικής σε κεκλιμένο επίπεδο, καθώς και πειράματα υπολογισμού του συντελεστή θερμικής διαστολής διάφορων μεταλλικών υλικών. Τέλος, με τη χρήση κατάλληλης εκπαιδευτικής διάταξης επιτυγχάνεται ο προσδιορισμός του μέτρου ελαστικότητας Young σε διαφορετικά υλικά (πλαστικά ή μέταλλα).

Προαπαιτούμενη γνώση

Χάραξη γραφικών παραστάσεων (κεφ. 3), στοιχεία άλγεβρας και λογισμού.

8.1. Υπολογισμός της επιτάχυνσης της βαρύτητας με τη χρήση κεκλιμένης αεροτροχιάς - Θεώρημα έργου-ενέργειας

8.1.1. Σύντομη ανασκόπηση της θεωρίας

8.1.1.1. Επιταχυνόμενη κίνηση

Η περιγραφή της κίνησης ενός σώματος συναρτήσει του χρόνου αποτελεί εκείνο το μέρος της μηχανικής που ονομάζεται κινηματική. Όταν ωστόσο, συσχετίζουμε την κίνηση με τις δυνάμεις που ενεργούν σε ένα σώμα, ασχολούμαστε με τη δυναμική.

Θεμελιώδες πρόβλημα της δυναμικής ενός σώματος είναι να βρούμε πως θα κινηθεί το σώμα, όταν ξέρουμε τις δυνάμεις που επιδρούν επάνω του. Με άλλα λόγια, πρέπει να βρούμε πως μεταβάλλεται η θέση του υπό μελέτη σώματος συναρτήσει του χρόνου. Στην απλούστερη των περιπτώσεων όπου η δύναμη F που ασκείται πάνω σε ένα σώμα μάζας m είναι σταθερή, η επιτάχυνση a που θα αποκτήσει το σώμα θα είναι επίσης σταθερή και βάσει του 2^{ου} νόμου του Newton, θα ισούται με $a=F/m$, ενώ η θέση και η ταχύτητα του σώματος συναρτήσει του χρόνου, θα δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις

$$x(t) = v_o t + \frac{1}{2} a t^2 \quad (8.1)$$

και

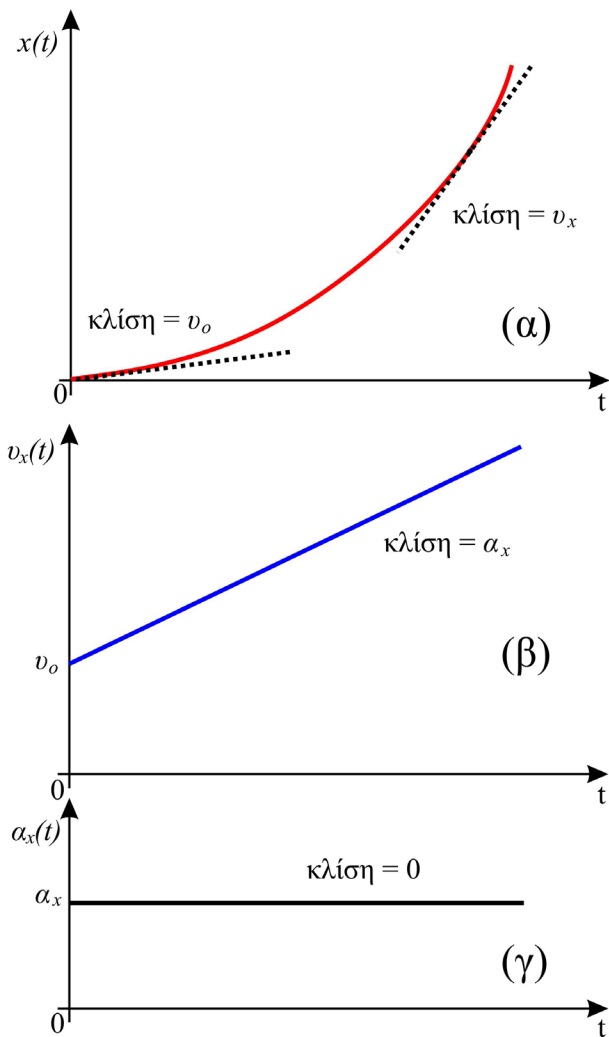
$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = v_o + a_x t \quad (8.2)$$

όπου v_o η αρχική ταχύτητα του σώματος.

Η γραφική παράσταση των παραπάνω σχέσεων απεικονίζεται στο σχήμα 8.1. Η εξίσωση 8.1 παριστάνεται μαθηματικά από μια παραβολή σε κάθε σημείο της οποίας, η κλίση μας δίνει την ταχύτητα την αντίστοιχη χρονική στιγμή (στιγμιαία ταχύτητα). Στην περίπτωση της παραβολής του σχήματος 8.1α, η κλίση μεταβάλλεται με γραμμικό τρόπο, σύμφωνα με την σχέση 8.2. Η κλίση της ευθείας του σχήματος 8.1β ισούται με την επιτάχυνση του σώματος, η οποία παραμένει σταθερή και ίση με

$$\frac{dv_x(t)}{dt} = a_x \quad (8.3)$$

Για τον πειραματικό υπολογισμό της επιτάχυνσης που αποκτά ένα σώμα και την περιγραφή της αντίστοιχης κίνησης, μπορεί να χρησιμοποιηθεί το κεκλιμένο επίπεδο ή η ακίνητη τροχαλία, με τα οποία επιτυγχάνουμε την εφαρμογή μιας σταθερής δύναμης, το μέτρο της οποίας μπορούμε εύκολα να ρυθμίσουμε.



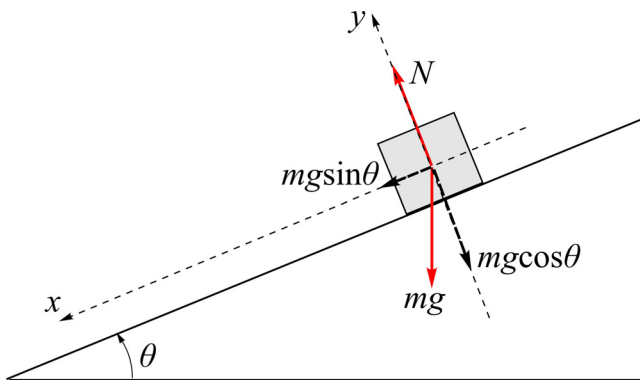
Σχήμα 8.1 Γραφική παράσταση της μετατόπισης, ταχύτητας και επιτάχυνσης ενός σώματος στην περίπτωση που ασκείται σταθερή δύναμη σε αυτό. (α) Η κλίση σε κάθε σημείο της καμπύλης (παραβολή) είναι διαφορετική και ίση με τη στιγμιαία ταχύτητα του σώματος. (β) Σε κάθε χρονική στιγμή, η κλίση έχει σταθερή τιμή και ίση με την επιτάχυνση του σώματος. (γ) Η επιτάχυνση του σώματος παραμένει σταθερή, ίση με a_x .

8.1.1.2. Κίνηση σε κεκλιμένο επίπεδο

Έστω ένα σώμα μάζας m βρίσκεται πάνω σε ένα κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης θ (Σχήμα 8.2). Όταν το σώμα αφήνεται ελεύθερο, θεωρώντας αμελητέα την επίδραση των τριβών, αυτό κινείται με την επίδραση μιας σταθερής δύναμης $mg\sin\theta$, που είναι η συνιστώσα του βάρους κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου. Το σώμα λοιπόν θα αποκτήσει επιτάχυνση

$$a = \frac{\sum F}{m} = \frac{mg\sin\theta}{m} \Rightarrow a = g\sin\theta \quad (8.4)$$

η οποία εξαρτάται μόνο από τη γωνία θ και μπορεί να αυξηθεί μόνο αν αυξήσουμε τη θ . Γνωρίζοντας τη γωνία θ του κεκλιμένου επιπέδου και θεωρώντας την επιτάχυνση της βαρύτητας g ίση με 9.80 m/s^2 , μπορούμε εύκολα από τη σχέση (8.4) να υπολογίσουμε την επιτάχυνση a του σώματος.



Σχήμα 8.2 Σώμα μάζας m βρίσκεται σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ και κινείται υπό την επίδραση σταθερής δύναμης $F = mgsin\theta$. Η δύναμη της τριβής θεωρείται αμελητέα.

8.1.1.3. Σταθερή τροχαλία

Κύβος μάζας M που βρίσκεται πάνω σε μία λεία οριζόντια επιφάνεια έλκεται από ένα νήμα δεμένο σε ένα βάρος μάζας m , μέσω μιας τροχαλίας, όπως δείχνει το Σχήμα 8.3. Η λεία επιφάνεια δεν παρουσιάζει τριβές κατά την κίνηση του σώματος πάνω της. Επίσης, θεωρούμε ότι η τροχαλία δεν έχει μάζα, ούτε προκαλεί τριβές και ότι απλώς αλλάζει τη διεύθυνση της τάσεως T του νήματος στο σημείο που είναι στερεωμένη. Οι δυνάμεις οι οποίες ασκούνται πάνω στον κύβο μάζας M φαίνονται επίσης στο Σχήμα 8.3. Ο κύβος υπό την επίδραση της δύναμης T θα επιταχυνθεί μόνο κατά την οριζόντια διεύθυνση. Θα ισχύει δηλαδή, βάσει του 2^{ου} νόμου του Newton ότι:

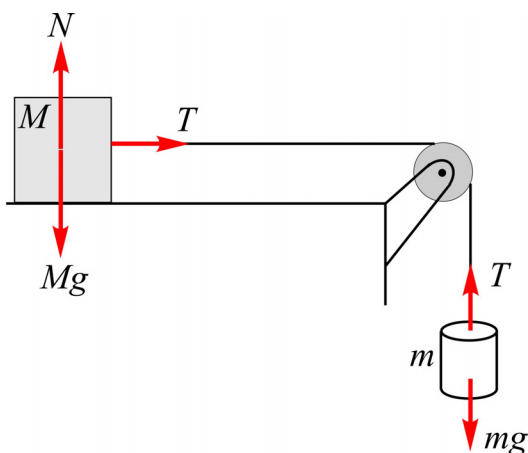
$$\sum F = Ma_x \Rightarrow T = Ma_x \quad (8.5)$$

Αφού το σώμα μάζας m επιταχύνεται, δε μπορούμε να πούμε ότι η δύναμη T ισούται με mg . Επομένως, η εξίσωση κίνησης του σώματος μάζας m θα είναι:

$$\sum F = ma_y \Rightarrow mg - T = ma_y \quad (8.6)$$

Η τροχαλία αλλάζει τη διεύθυνση της τάσης T του νήματος και αφού το σχοινί έχει σταθερό μήκος (δε συμπεριφέρεται ως ελατήριο), μπορούμε να γράψουμε

$$a_x = a_y = a \quad (8.7)$$



Σχήμα 8.3 Κύβος μάζας M επιταχύνεται προς τα δεξιά υπό την επίδραση της τάσης T του νήματος.

Τα σώματα δηλαδή έχουν κοινή επιτάχυνση a . Αντικαθιστώντας την 8.5 στην 8.6 και λύνοντας ως προς a , προκύπτει τελικά ότι η επιτάχυνση του κύβου θα ισούται με:

$$a = \frac{m}{m + M} g \quad (8.8)$$

και επομένως η τάση T από την σχέση 8.5 και λόγω των 8.7 και 8.8, γράφεται τελικά

$$T = \frac{m \cdot M}{m + M} g \quad (8.9)$$

Από τη σχέση 8.8 παρατηρούμε ότι η κοινή επιτάχυνση a των δύο σωμάτων M και m , είναι πάντα μικρότερη της επιτάχυνσης της βαρύτητας g και η δύναμη T είναι μικρότερη του βάρους του σώματος μάζας m (Σχέση 8.9).

8.1.1.4. Θεώρημα έργου-ενέργειας

Στην περίπτωση που η δύναμη η οποία ασκείται σε ένα σώμα δεν είναι σταθερή αλλά μεταβάλλεται, η θέση και η ταχύτητα του σώματος δεν μπορούν να προκύψουν από τις σχέσεις 8.1 και 8.2, γιατί η επιτάχυνση δεν παραμένει σταθερή. Για τον προσδιορισμό της κίνησης του σώματος στο οποίο ασκούνται μεταβλητές δυνάμεις (π.χ. η δύναμη της παγκόσμιας έλξης, η δύναμη του ελατηρίου, κ.ά.), αναγκαία είναι η χρησιμοποίηση των εννοιών του έργου και της κινητικής ενέργειας με τις οποίες μπορεί να διατυπωθεί το θεώρημα του έργου – ενέργειας.

Ορίζεται ως έργο που παράγει μια σταθερή δύναμη πάνω σε ένα σώμα, το γινόμενο της συνιστώσας της δύναμης κατά τη διεύθυνση της κίνησης, επί την απόσταση x που διάνυσε το σώμα στη διεύθυνση αυτή, δηλαδή

$$W = F_x \cdot x$$

όπου F_x η συνιστώσα της δύναμης στη διεύθυνση της μετατόπισης x . Στο Διεθνές Σύστημα Μονάδων (S.I.) μονάδα του έργου είναι το 1 Joule = 1 N m.

Στην περίπτωση που η δύναμη μεταβάλλεται με την απόσταση x , ο παραπάνω υπολογισμός του W μετατρέπεται στο αντίστοιχο ολοκλήρωμα της δύναμης, υπολογισμένο μεταξύ των θέσεων x_1 και x_2 που μετατοπίστηκε το σώμα, δηλαδή:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx \quad (8.10)$$

Από το 2^ο νόμο του Newton ($F=ma$), αντικαθιστώντας την επιτάχυνση από τη σχέση:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$$

η σχέση 8.10 μπορεί να γραφτεί ως ακολούθως:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} m a dx = \int_{x_1}^{x_2} m v \frac{dv}{dx} dx = m \int_{v_1}^{v_2} v dv = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \quad (8.11)$$

Το μισό του γινομένου της μάζας ενός σώματος επί το τετράγωνο της ταχύτητάς του, ονομάζεται κινητική ενέργεια του σώματος:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad (8.12)$$

Βάσει των εξισώσεων 8.11 και 8.12, το έργο που παράγει η συνισταμένη δύναμη πάνω σε ένα σώμα ισούται με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος. Δηλαδή

$$W = \Delta K \quad (8.13)$$

Η τελευταία σχέση 8.13 η οποία έχει προκύψει από το 2^ο νόμο του Newton, είναι γνωστή ως θεώρημα έργου-ενέργειας.

8.1.2. Σκοπός του πειράματος

Σκοπός του πειράματος είναι ο πειραματικός προσδιορισμός της επιτάχυνσης της βαρύτητας g , καθώς και η επαλήθευση του θεωρήματος έργου – ενέργειας.

Η επιτάχυνση της βαρύτητας μπορεί να υπολογιστεί εύκολα με τη βοήθεια της κεκλιμένης αεροτροχιάς, η οποία χρησιμοποιείται όπως το κεκλιμένο επίπεδο του σχήματος 8.2. Το λεπτό στρώμα αέρα που δημιουργείται μεταξύ δρομέα και αεροτροχιάς εκμηδενίζει τις δυνάμεις τριβής, με αποτέλεσμα ο δρομέας να κινείται υπό την επίδραση μόνο της συνιστώσας του βάρους του κατά τη διεύθυνση της αεροτροχιάς, εκτελώντας ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με σταθερή επιτάχυνση $a = g\sin\theta$. (Πρακτικά υπάρχει και η αντίσταση του αέρα αλλά αυτή θεωρείται αμελητέα).

Η χρησιμοποιούμενη πειραματική διάταξη επιτρέπει τον εύκολο προσδιορισμό της ακριβής θέσης και ταχύτητας του δρομέα καθ' όλη τη διάρκεια της κίνησής του. Αν ο δρομέας ξεκινά από τη θέση x_0 χωρίς αρχική ταχύτητα ($v_0 = 0$), η θέση του συναρτήσει του χρόνου θα δίνεται από τη σχέση

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{2}at^2$$

Η γραφική παράσταση επομένως της σχέσης $x = f(t^2)$ θα είναι ευθεία με κλίση κ , όπου

$$\kappa = \frac{1}{2}a$$

Από τη γεωμετρία της διάταξης μπορεί εύκολα να προσδιοριστεί το $\sin\theta$, οπότε η επιτάχυνση της βαρύτητας θα ισούται με

$$g = \frac{a}{\sin\theta} = \frac{2\kappa}{\sin\theta}$$

Έναν απλό τρόπο για την επαλήθευση του θεωρήματος έργου – ενέργειας παρέχει η χρήση της αεροτροχιάς και της σταθερής τροχαλίας. Ο δρομέας έλκεται από ένα νήμα δεμένο σε ένα βαρίδι μάζας m μέσω μιας τροχαλίας. Αφήνοντας το δρομέα να κινηθεί από την ηρεμία ($v_0 = 0$) υπό την επίδραση της τάσης T του νήματος, μπορούμε να δείξουμε ότι το έργο της δύναμης T που εφαρμόζεται στο δρομέα μετακινώντας τον κατά απόσταση h , ισούται με την κινητική ενέργεια που απέκτησε αυτός στο τέλος της μετατόπισης του. Θα πρέπει δηλαδή να ισχύει ότι:

$$\Delta K = W_T$$

ή

$$\frac{1}{2}Mv^2 = T \cdot h$$

και σύμφωνα με τη σχέση 8.9

$$\frac{1}{2}Mv^2 = \frac{m \cdot M}{m + M}g \cdot h$$

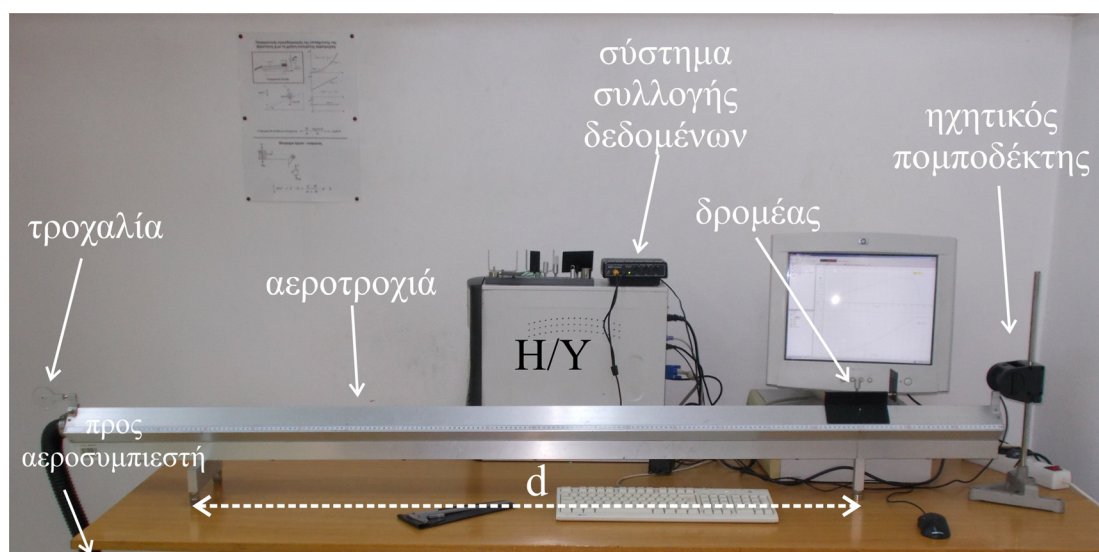
όπου m , M είναι οι μάζες του βαριδιού και του δρομέα αντίστοιχα, h είναι η απόσταση κατά την οποία ο δρομέας επιταχύνεται υπό την εφαρμογή της δύναμης T και $g = 9.80 \text{ m/s}^2$. Η ταχύτητα v καταγράφεται μέσω του ηχητικού πομποδέκτη καθ' όλη τη διάρκεια της κίνησης του δρομέα.

8.1.3. Πειραματικό μέρος

8.1.3.1. Χρησιμοποιούμενα όργανα

1. Αεροτροχιά – αεροσυμπιεστής – δρομέας.
2. Ηχητικός πομποδέκτης (sonar ranger) για τη μέτρηση της διανυομένης απόστασης του κινούμενου δρομέα (Σύνδεσμος 1, Βιβλιογραφία).
3. Ηλεκτρονικός υπολογιστής με κατάλληλο λογισμικό για την απεικόνιση, καταγραφή και επεξεργασία των μετρήσεων (Σύνδεσμοι 2-3, Βιβλιογραφία).
4. Νήμα, βαρίδι, κύλινδρος (για την ανύψωση της αεροτροχιάς)
5. Μηχανικός ζυγός ακρίβειας 0.1 g για τη μέτρηση της μάζας του δρομέα και του βαριδιού.
6. Διαστημόμετρο για τη μέτρηση του ύψους του βαριδιού (και κατά συνέπεια της γωνίας κλίσεως του κεκλιμένου επιπέδου).

Η πειραματική διάταξη απεικονίζεται στο Σχήμα 8.4.



Σχήμα 8.4 Η πειραματική διάταξη για τον υπολογισμό της επιτάχυνσης της βαρύτητας και την επαλήθευση του θεωρήματος έργου-ενέργειας.

8.1.3.2. Μετρήσεις

1^ο Πείραμα

1. Ανοίξτε τον αεροσυμπιεστή και αφού τοποθετήσετε το δρομέα πάνω στην αεροτροχιά, βεβαιωθείτε για την ελεύθερη κίνησή του και την οριζοντίωση της αεροτροχιάς (ο δρομέας δε θα πρέπει να κινείται μόνος του, χωρίς την επενέργεια δύναμης). Κάτω από το δεξί στήριγμα της αεροτροχιάς τοποθετήστε έναν κύλινδρο, έτσι ώστε να ανυψωθεί η αεροτροχιά (Σχήμα 8.4). Μετρήστε το ύψος του κυλίνδρου L ,

καθώς και την απόσταση d μεταξύ των δύο στηριγμάτων της αεροτροχιάς. Υπολογίστε το ημίτονο της γωνίας κλίσης της αεροτροχιάς από τη σχέση:

$$\sin\theta = \frac{L}{d} = \dots$$

2. Ανοίξτε τον υπολογιστή και στην επιφάνεια εργασίας διπλοπατήστε με το ποντίκι στο εικονίδιο `airtrack_experiment_1`.
3. Στην οθόνη που θα εμφανιστεί, απεικονίζεται ένα γράφημα της θέσης του δρομέα (position) σε συνάρτηση με το χρόνο (time) όπου θα αποτυπωθεί η γραφική παράσταση της απόστασης του δρομέα από τον ηχητικό πομποδέκτη $x = f(t)$ κατά τη διάρκεια του πειράματος.
4. Τοποθετήστε το δρομέα στο δεξιό μέρος της αεροτροχιάς, στη θέση $x = 170$ cm και κρατήστε τον με το χέρι σας ακίνητο.
5. Αφήστε το δρομέα ελεύθερο να κινηθεί και ταυτόχρονα πατήστε START. Στην οθόνη του υπολογιστή θα καταγράφεται η απόσταση του δρομέα από τον ηχητικό πομποδέκτη συναρτήσει του χρόνου. Όταν ολοκληρωθεί η κίνηση και ο δρομέας χτυπήσει στο αριστερό άκρο της αεροτροχιάς, πατήστε STOP για να σταματήσει η καταγραφή.
ΠΡΟΣΟΧΗ: για τη σωστή καταγραφή της απόστασης, δε θα πρέπει να παρεμβάλλεται τίποτε μεταξύ του ηχητικού πομποδέκτη και του ανακλαστήρα του δρομέα. Εφόσον η καμπύλη που καταγράφηκε στον Η/Υ είναι ομαλή, χωρίς απότομες μεταβολές ή σημεία εκτός αυτής, το πείραμα είναι επιτυχημένο. Σε διαφορετική περίπτωση, επαναλάβετε τη διαδικασία της μέτρησης. Στο τέλος, θέστε εκτός λειτουργίας τον αεροσυμπιεστή.
6. Δικαιολογήστε βάσει της θεωρίας τη μορφή της προκύπτουσας καμπύλης (μέχρι το σημείο που ο δρομέας χτυπάει στο αριστερό μέρος της αεροτροχιάς και σταματάει).
7. Στο παράθυρο του γραφήματος επιλέξτε το εργαλείο Smart Tool που εμφανίζει τις συντεταγμένες των σημείων που θέλουμε. Για τις χρονικές στιγμές t που αναγράφονται στον Πίνακα Μετρήσεων 8.1, σημειώστε τις αντίστοιχες θέσεις του δρομέα. Υπολογίστε στη συνέχεια στην τελευταία στήλη του Πίνακα 8.1, την ποσότητα t^2 .
8. Χαράξτε τη γραφική παράσταση $x = f(t^2)$ σε χιλιοστομετρικό χαρτί. Δικαιολογείτε η μορφή που έχει σύμφωνα με τη θεωρία;

a/a	t (s)	x (cm)	t^2 (s ²)
1	0.5		
2	1.0		
3	1.5		
4	2.0		
5	2.5		
6	3.0		
7	3.5		
8	4.0		
9	4.5		
10	5.0		
11	5.5		
12	6.0		

Πίνακας 8.1 Πίνακας μετρήσεων της μετατόπισης x συναρτήσει του χρόνου t και του t^2 .

9. Από την κλίση της ευθείας να υπολογίσετε την επιτάχυνση του δρομέα

$$a = \dots\dots\dots \text{m/s}^2$$

10. Από την τιμή της επιτάχυνσης a και την τιμή του $\sin\theta$ που υπολογίσατε στο βήμα 1, υπολογίστε την επιτάχυνση της βαρύτητας

$$g = \dots\dots\dots \text{m/s}^2$$

11. Συγκρίνετε την τιμή του g που βρήκατε με τη θεωρητική τιμή των 9.80 m/s^2 , υπολογίζοντας την επί τοις εκατό διαφορά των δύο τιμών.

12. Υπολογίστε την κλίση της ευθείας, αυτή τη φορά με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.

2^ο Πείραμα

13. Για την επαλήθευση του θεωρήματος έργου – ενέργειας, η πειραματική διάταξη τροποποιείται ως εξής: Αφαιρέστε τον κύλινδρο που είχατε τοποθετήσει για να ανυψώσετε την αεροτροχιά. Τοποθετήστε στο αριστερό μέρος της αεροτροχιάς και στην ειδική εσοχή, την τροχαλία. Μετρήστε με το μηχανικό ζυγό τη μάζα του βαριδιού (m) και τη μάζα του δρομέα (M).

$$m = \dots\dots\dots \text{g}, \quad M = \dots\dots\dots \text{g}$$

Στο ένα άκρο του νήματος είναι αναρτημένο το βαρίδι. Συνδέστε στο άλλο άκρο του νήματος το δρομέα και τοποθετείστε τον στη θέση $x = 170 \text{ cm}$, έχοντας εκτός λειτουργίας τον αεροσυμπιεστή. Για τη θέση αυτή του δρομέα, μετρήστε με το χάρακα την απόσταση του βαριδιού από το πάτωμα.

$$h = \dots\dots\dots \text{cm}$$

14. Στην επιφάνεια εργασίας διπλοπατήστε με το ποντίκι στο εικονίδιο `airtrack_experiment_2`. Αυτή τη φορά, εμφανίζεται στην οθόνη ένα γράφημα όπου απεικονίζονται τόσο η θέση όσο και η ταχύτητα του δρομέα ως προς το χρόνο.

15. Αφήνοντας το δρομέα ελεύθερο να κινηθεί από τη θέση $x = 170 \text{ cm}$ (αφού πρώτα θέσετε τον αεροσυμπιεστή σε λειτουργία), η τάση του νήματος T θα επενεργήσει πάνω του για μετατόπιση ίση με h . ΠΡΟΣΟΧΗ: Μας ενδιαφέρει ΜΟΝΟ το χρονικό διάστημα της κίνησης που έκανε ο δρομέας μέχρι να φτάσει στο αριστερό άκρο της αεροτροχιάς (λιγότερο από τα 4 πρώτα sec της κίνησης).

16. Για τις τιμές του χρόνου t που αναγράφονται στον Πίνακα μετρήσεων 8.2, καταγράψτε τις αντίστοιχες τιμές της ταχύτητας, χρησιμοποιώντας το εργαλείο Smart Tool, όπως και στο προηγούμενο πείραμα.

17. Χαράξτε τη γραφική παράσταση $v = v(t)$ σε χιλιοστομετρικό χαρτί και εξηγήστε αναλυτικά τη μορφή που έχει, ανάλογα με τα διαφορετικά στάδια κίνησης του δρομέα.

18. Ποια είναι η τελική ταχύτητα v_t του δρομέα; (για τον υπολογισμό θεωρείστε τη μέση τιμή των ταχυτήτων του δρομέα στο κατάλληλο χρονικό διάστημα της κίνησης).

19. Υπολογίστε την κινητική ενέργεια που απέκτησε ο δρομέας στο σημείο που έπαψε να επενεργεί πάνω του η δύναμη T .

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \dots\dots\dots J$$

α/α	t (s)	v (m/s)
1	0.3	
2	0.6	
3	0.9	
4	1.2	
5	1.5	
6	1.8	
7	2.1	
8	2.4	
9	2.7	
10	3.0	
11	3.3	
12	3.6	

Πίνακας 8.2 Πίνακας μετρήσεων της ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου για την επαλήθευση του θεωρήματος έργου-ενέργειας (διαθέσιμα αρχεία δεδομένων της θέσης και της ταχύτητας μπορείτε να βρείτε [εδώ](#)).

20. Υπολογίστε το έργο της δύναμης T που μετακινεί το δρομέα κατά απόσταση h πάνω στην αεροτροχιά:

$$W_T = T \cdot h = \frac{M}{m + M} m \cdot g \cdot h = \dots \dots \dots J$$

21. Επαληθεύεται το θεώρημα έργου-ενέργειας, $\Delta K = W_T$;

8.1.4. Ερωτήσεις - Ασκήσεις

1. Με πόση επιτάχυνση θα κινηθεί ο δρομέας στο 1^ο πείραμα αν η γωνία θ γίνει $\theta = 30^\circ$;
2. Για τη διάταξη του 1^{ου} πειράματος, πόσο θα έπρεπε να είναι το μήκος της αεροτροχιάς ώστε ο δρομέας να αποκτήσει στο τέλος της κίνησής του, ταχύτητα ίση με 50 km/h;
3. Έστω ότι χρησιμοποιείτε βαρίδι διπλάσιας μάζας από αυτή που καταγράψατε στο βήμα 13 του πειράματος. Υπολογίστε μέσω του θεωρήματος έργου-ενέργειας την ταχύτητα που θα αποκτήσει ο δρομέας μάζας M στο σημείο που παύει να ενεργεί πάνω του η τάση του νήματος T (η απόσταση h παραμένει η ίδια).
4. Που μπορεί να οφείλονται οι πιθανές διαφορετικές τιμές στην κινητική ενέργεια K και στο έργο της δύναμης T που υπολογίσατε στα βήματα 19 και 20;

8.2. Υπολογισμός συντελεστών στατικής και κινητικής τριβής

8.2.1. Σύντομη ανασκόπηση της θεωρίας

8.2.1.1. Γενικά περί τριβών

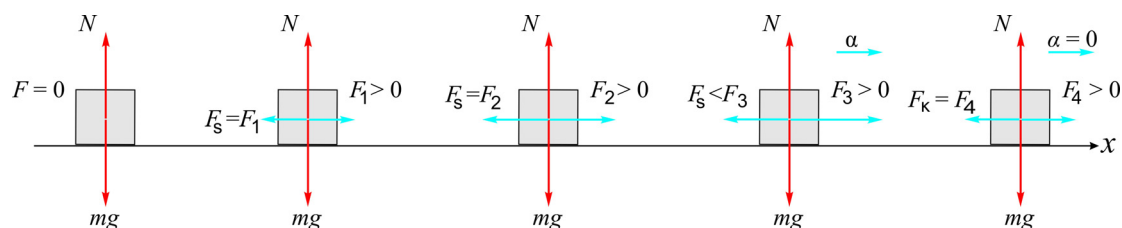
Γενικά, ως τριβές ορίζονται οι δυνάμεις που αναπτύσσονται μεταξύ δύο σωμάτων που βρίσκονται σε επαφή και σχετική κίνηση μεταξύ τους. Ωστόσο, δυνάμεις τριβής μπορεί να υπάρχουν και χωρίς την ύπαρξη σχετικής κίνησης. Η δύναμη τριβής μεταξύ των επιφανειών δύο σωμάτων έχει πάντα φορά αντίθετη από την κίνηση του ενός σώματος ως προς το άλλο. Όταν ένα σώμα ολισθαίνει (σύρεται) πάνω στην επιφάνεια ενός άλλου σώματος, μιλάμε για την τριβή ολίσθησης, ενώ όταν κυλάει πάνω σε αυτό έχουμε την τριβή κύλισης. Προφανώς, η τριβή ολίσθησης είναι μεγαλύτερη από την τριβή κύλισης μεταξύ δύο σωμάτων. Οι δυνάμεις τριβής που δρουν μεταξύ των επιφανειών δύο σωμάτων που είναι ακίνητα ονομάζονται δυνάμεις στατικής τριβής, ενώ οι δυνάμεις που δρουν στις επιφάνειες σωμάτων που βρίσκονται σε σχετική κίνηση, ονομάζονται δυνάμεις κινητικής τριβής.

Οι τριβές είναι μία κατηγορία δυνάμεων που παρουσιάζουν μεγάλο τεχνολογικό ενδιαφέρον, αφού μπορεί να προκαλέσουν απώλειες ενέργειας αυξάνοντας τη θερμοκρασία των σωμάτων πάνω στα οποία ασκούνται, αλλά και φθορά υλικού σε κινούμενα μέρη. Καταβάλλεται λοιπόν μεγάλη προσπάθεια προκειμένου να ελαχιστοποιηθούν οι δυνάμεις τριβών με τη χρήση λιπαντικών ουσιών μεταξύ των κινούμενων επιφανειών. Η ερμηνεία των δυνάμεων των τριβών που αναπτύσσονται μεταξύ δύο επιφανειών βρίσκεται σε μικροσκοπικό επίπεδο και γι αυτό το λόγο, οι νόμοι που τις περιγράφουν είναι ως επί το πλείστον εμπειρικοί και προσεγγιστικοί. Παράγοντες όπως το είδος των υλικών και η λείανση των επιφανειών που είναι σε επαφή, η θερμοκρασία, η σχετική ταχύτητα των δύο σωμάτων, η ύπαρξη επιφανειακών επιστρώσεων επηρεάζουν τις δυνάμεις τριβής. Η τριβολογία είναι ο κλάδος της επιστήμης της μηχανικής που ασχολείται με τους νόμους της τριβής και τους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να την περιορίσουμε, σε διάφορες τεχνολογικές εφαρμογές.

8.2.1.2. Υπολογισμός συντελεστών στατικής και κινητικής τριβής

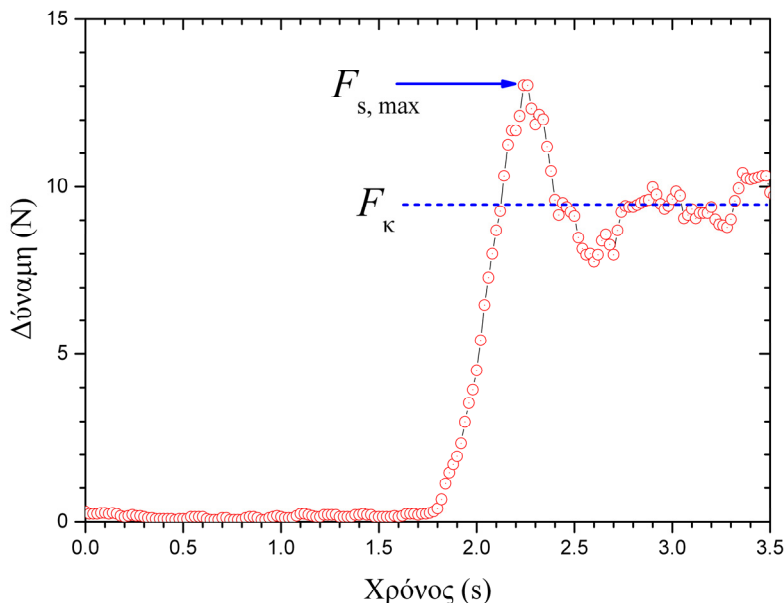
Θεωρούμε σώμα μάζας m που μπορεί να κινείται πάνω σε μία επίπεδη επιφάνεια (Σχήμα 8.5). Υπό την επίδραση μιας οριζόντιας δύναμης F_1 με φορά προς τα δεξιά, το σώμα εξακολουθεί να παραμένει ακίνητο, γιατί αναπτύσσεται μία αντίθετη δύναμη στατικής τριβής F_s που την εξουδετερώνει ($F_s = F_1$). Αυξάνοντας την F_1 σε F_2 ($F_2 > F_1$), η δύναμη στατικής τριβής εξακολουθεί να αντισταθμίζει τη δύναμη F_2 και το σώμα συνεχίζει να παραμένει ακίνητο. Επομένως, η δύναμη της στατικής τριβής δεν έχει σταθερή τιμή αλλά εξαρτάται από τη δύναμη που εφαρμόζεται στο σώμα προκειμένου να το κινήσουμε και αυξάνεται μέχρι κάποια μέγιστη τιμή $F_{s,max}$. Μόλις η εφαρμοζόμενη δύναμη ξεπεράσει τη μέγιστη τιμή της στατικής τριβής ($F_3 > F_{s,max}$), θα παρατηρήσουμε ότι το σώμα θα κινηθεί αποκτώντας επιτάχυνση a . Στην περίπτωση αυτή, η δύναμη της κινητικής τριβής F_k είναι μικρότερη από τη μέγιστη δύναμη στατικής τριβής ($F_k < F_{s,max}$), γι αυτό και το σώμα εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση. Θα πρέπει επομένως να ελαττώσουμε την εφαρμοζόμενη δύναμη προκειμένου το σώμα να κινείται με σταθερή ταχύτητα, δηλαδή πρέπει $F_k = F_4 < F_3$.

Για παράδειγμα, κατά την ξηρή ολίσθηση ενός σώματος (κυβόλιθου) πάνω σε οριζόντια επιφάνεια μαρμάρου, η μεταβολή της εφαρμοζόμενης δύναμης F πάνω στο σώμα ως προς το χρόνο, απεικονίζεται στο Σχήμα 8.6.



Σχήμα 8.5 Σώμα που βρίσκεται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο δέχεται την επίδραση δύναμης F , η τιμή της οποίας αυξάνει συνεχώς. Όταν η εφαρμοζόμενη δύναμη ξεπεράσει τη μέγιστη τιμή της στατικής τριβής $F > F_{s,max}$, το σώμα θα κινηθεί με επιτάχυνση a . Όταν η δύναμη που το κινεί ελαττωθεί και γίνει αντίθετη της τριβής κίνησης F_k , το σώμα κινείται ευθύγραμμα ομαλά ($a=0$).

Η εφαρμοζόμενη δύναμη αυξάνεται συνεχώς από τη χρονική στιγμή $t=1.8$ s αλλά το σώμα παραμένει ακίνητο, επειδή η δύναμη αυτή αντισταθμίζεται από την αντίθετης φοράς δύναμη της στατικής τριβής. Μόλις η F ξεπεράσει τη μέγιστη τιμή της στατικής τριβής ($F_{s,max} \approx 13$ N), το σώμα αρχίζει και ολισθαίνει ($t=2.2$ s) αλλά η δύναμη της κινητικής τριβής F_k έχει μικρότερη τιμή από την $F_{s,max}$ ($F_k \approx 9.5$ N) και χρειάζεται επομένως μικρότερη δύναμη για να κινηθεί το σώμα με σταθερή ταχύτητα.



Σχήμα 8.6 Η πειραματικώς μετρούμενη μεταβολή της εφαρμοζόμενης δύναμης ως προς το χρόνο, για έναν κυβόλιθο που ολισθαίνει επί ξηρής οριζόντιας επιφάνειας μαρμάρου (βλέπε Σχήμα 8.5). Τη χρονική στιγμή $t=1.8$ s αρχίζει να ενεργεί η δύναμη, ενώ τη χρονική στιγμή $t=2.2$ s ξεκινά η ολίσθηση.

Τόσο η δύναμη της κινητικής τριβής F_k όσο και η μέγιστη δύναμη της στατικής τριβής $F_{s,max}$ είναι ανάλογες της κάθετης δύναμης N πάνω στο σώμα (ίσης με το βάρος, στην περίπτωση που το σώμα ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο). Θα ισχύει δηλαδή:

$$F_k = \mu_k N \quad (8.14)$$

και

$$F_{s,max} = \mu_s N \quad (8.15)$$

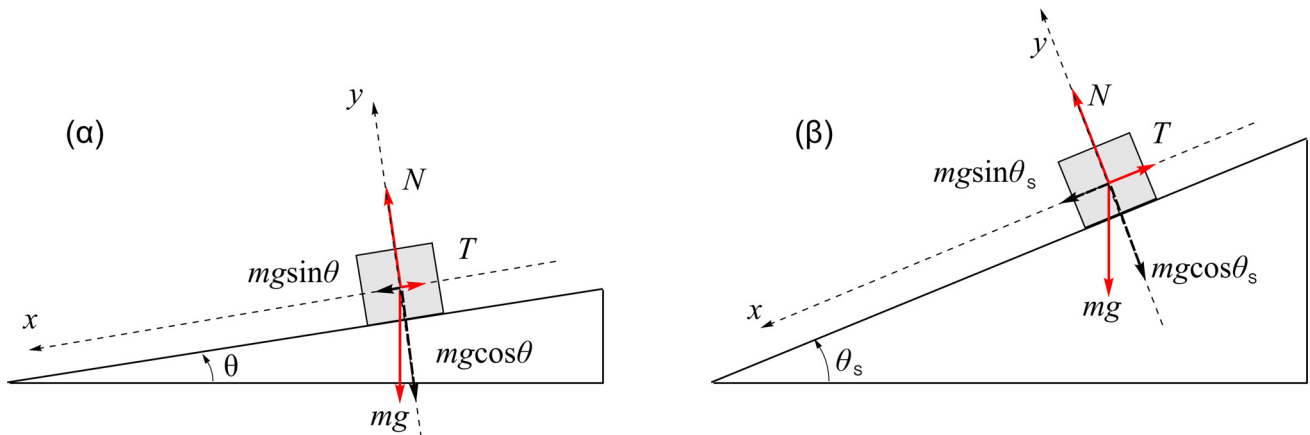
όπου μ_k και μ_s είναι οι συντελεστές κινητικής και στατικής τριβής, αντίστοιχα. Τιμές των συντελεστών αυτών για διάφορα υλικά δίνονται στον Πίνακα 8.3. Οι συντελεστές τριβής είναι καθαροί αριθμοί χωρίς μονάδες. Γενικά ισχύει ότι $\mu_s > \mu_k$, δηλαδή είναι πιο δύσκολο να θέσουμε ένα ακίνητο σώμα σε κίνηση (ολίσθηση) από το να διατηρήσουμε την κίνηση του με σταθερή ταχύτητα. Επίσης, οι δυνάμεις στατικής και κινητικής τριβής είναι ανεξάρτητες του εμβαδού επαφής των επιφανειών των δύο σωμάτων. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η πραγματική επιφάνεια επαφής δύο σωμάτων είναι κατά πολύ μικρότερη από τη φαινόμενη επιφάνεια επαφής και εξαρτάται μόνον από την κάθετη δύναμη που δρα στο σώμα (δηλαδή το βάρος του, στην περίπτωση που το σώμα βρίσκεται σε οριζόντια επιφάνεια). Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι σε μικροσκοπικό επίπεδο οι δύο επιφάνειες εφάπτονται μόνον σε κάποιες μικρές περιοχές, το εμβαδό των οποίων αυξάνεται όσο αυξάνεται η κάθετη δύναμη σε αυτές. Από τα παραπάνω γίνεται κατανοητό ότι καταγράφοντας τη δύναμη που ασκούμε σε ένα σώμα, προκειμένου να το θέσουμε σε ομαλή κίνηση, μπορούμε από τις σχέσεις 8.14 και 8.15 να υπολογίσουμε τους συντελεστές της στατικής και κινητικής τριβής.

υλικά επιφανειών	μ_s	μ_k
χάλυβας σε χάλυβα	0.74	0.57
αλουμίνιο σε χάλυβα	0.61	0.47
χαλκός σε χάλυβα	0.53	0.36
τεφλόν σε χάλυβα	0.04	0.04
ξύλο σε ξύλο	0.25 – 0.50	0.2
γυαλί σε γυαλί	0.94	0.4
τεφλόν σε τεφλόν	0.04	0.04
τσιμέντο (υγρό) σε λάστιχο	0.3	0.25
τσιμέντο (στεγνό) σε λάστιχο	1.0	0.8
πάγος σε πάγο	0.1	0.03
Μέταλλο σε μέταλλο (με λιπαντικό)	0.15	0.06
πολύ τραχιές επιφάνειες	-	1.5

Πίνακας 8.3 Συντελεστές στατικής και κινητικής τριβής μεταξύ των επιφανειών διαφόρων υλικών.

8.2.1.3. Υπολογισμός συντελεστή στατικής τριβής με τη χρήση κεκλιμένου επιπέδου

Έστω κύβος μάζας m βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια κεκλιμένου επιπέδου που σχηματίζει γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο (Halliday & Resnick, 1976). Καθώς αυξάνουμε την κλίση του επιπέδου, θα παρατηρήσουμε ότι για κάποια τιμή της γωνίας θ_s , το σώμα θα αρχίσει να ολισθαίνει. Τη στιγμή πριν την έναρξη της ολίσθησης, η συνισταμένη των δυνάμεων πάνω στο σώμα θα είναι μηδέν. Από τη συνθήκη αυτή, μπορούμε να υπολογίσουμε το συντελεστή στατικής τριβής μεταξύ των επιφανειών του σώματος και του κεκλιμένου επιπέδου.



Σχήμα 8.7 (α) Σώμα ηρεμεί πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο, γιατί η συνιστώσα του βάρους στη διεύθυνση του κεκλιμένου επιπέδου, αντισταθμίζεται από τη δύναμη της τριβής. (β) Αυξάνοντας τη γωνία κλίσης, το σώμα αρχίζει να ολισθαίνει. Μετρώντας τη γωνία θ_s που αρχίζει η ολίσθηση, μπορούμε να υπολογίσουμε το συντελεστή στατικής τριβής μεταξύ των δύο επιφανειών.

Ισχύει δηλαδή:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow T - mgsin\theta_s = 0$$

και

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - mg \cos \theta_s = 0$$

ενώ η δύναμη της στατικής τριβής θα ισούται με:

$$T = \mu_s N$$

όπου N η κάθετη δύναμη πάνω στο σώμα. Αντικαθιστώντας στην τελευταία σχέση τις δυνάμεις T και N , προκύπτει:

$$mg \sin \theta_s = \mu_s mg \cos \theta_s$$

και τελικά:

$$\mu_s = \tan \theta_s \quad (8.16)$$

Μετρώντας επομένως την κρίσιμη γωνία θ_s για την οποία αρχίζει το σώμα να ολισθαίνει πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο, μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε το συντελεστή στατικής τριβής των δύο επιφανειών.

8.2.2. Σκοπός του πειράματος

Σκοπός του πειράματος είναι ο πειραματικός προσδιορισμός των συντελεστών στατικής και κινητικής τριβής μεταξύ των επιφανειών διαφορετικών υλικών. Ο συντελεστής στατικής τριβής μπορεί να προκύψει από τη μέτρηση της κρίσιμης γωνίας θ_s για την οποία ξεκινά η ολίσθηση του σώματος πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο (Σχέση 8.16). Ο συντελεστής κινητικής τριβής μπορεί να υπολογιστεί βάσει της σχέσης 8.14, καταγράφοντας τη δύναμη που χρειάζεται για την κίνηση ενός σώματος με σταθερή ταχύτητα. Στην περίπτωση αυτή και ανάλογα με το μέγεθος των δυνάμεων τριβών, μπορεί να καταστεί εφικτός και ο προσδιορισμός του συντελεστή στατικής τριβής (εφόσον διαφέρει αρκετά από το συντελεστή της κινητικής τριβής) χρησιμοποιώντας τη σχέση 8.15.

8.2.3. Πειραματικό μέρος

8.2.3.1. Χρησιμοποιούμενα όργανα

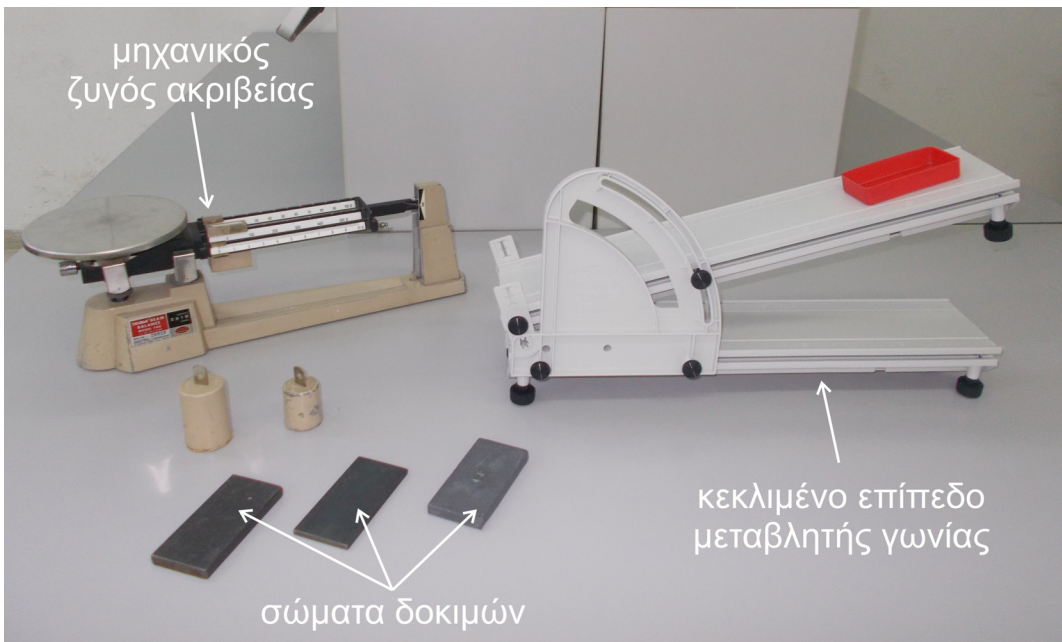
1. Κεκλιμένο πλαστικό επίπεδο με μεταβλητή γωνία κλίσης και γωνιόμετρο για τη μέτρησή της. Το μισό μήκος του κεκλιμένου επιπέδου είναι καλυμμένο με γυαλόχαρτο (από SiC) ώστε να έχουμε δύο διαφορετικούς συντελεστές τριβής.
2. Αισθητήρας μέτρησης δύναμης (± 50 N) που συνδέεται με ηλεκτρονικό υπολογιστή μέσω κατάλληλης μονάδας συλλογής δεδομένων (Σύνδεσμος 4, Βιβλιογραφία).
3. Μηχανικός ζυγός (ακρίβειας 0.1g) για τη ζύγιση διαφόρων μαζών.
4. Κυβόλιθος και διάφορα άλλα σώματα δοκιμών (πλαστικό, μόλυβδος, σίδηρος).

Οι πειραματικές διατάξεις απεικονίζονται στα Σχήματα 8.8 και 8.9.

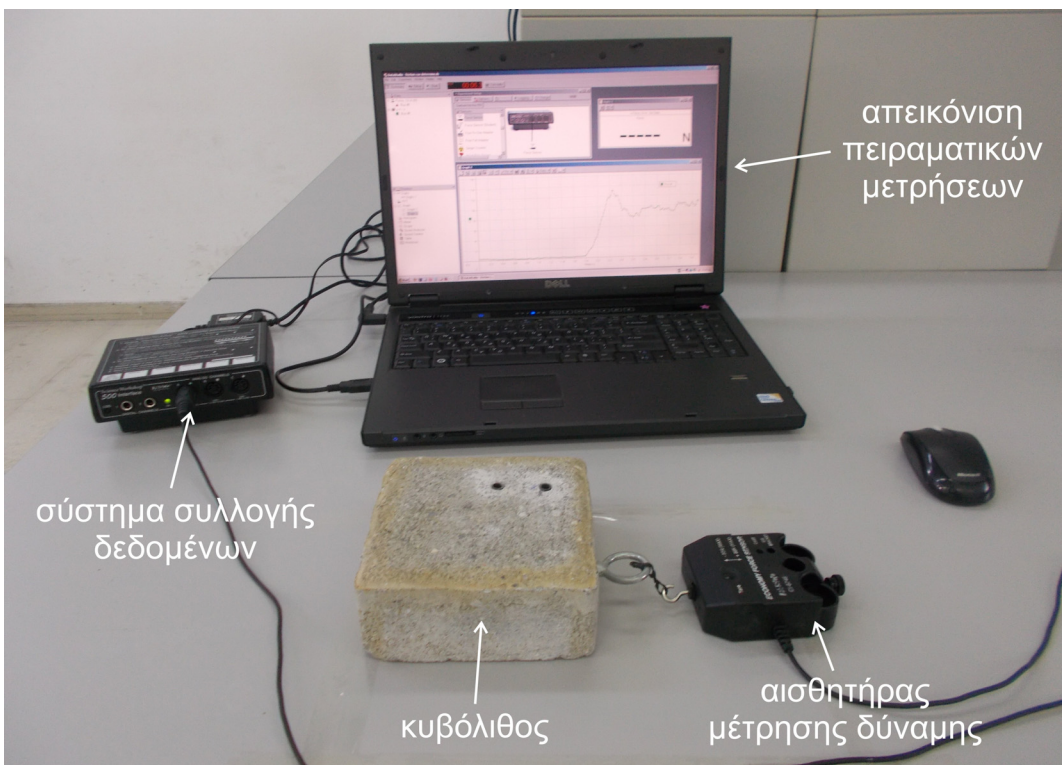
8.2.3.2. Μετρήσεις

1° Πείραμα

1. Ξεσφίξτε τη βίδα στήριξης του κεκλιμένου επιπέδου, ώστε αυτό να οριζοντιωθεί. Μετρήστε τη μάζα ενός από τα διαθέσιμα σώματα και καταχωρίστε την τιμή της στον Πίνακα Μετρήσεων 8.4.
2. Τοποθετήστε το σώμα στην πλαστική επιφάνεια του κεκλιμένου επιπέδου και αυξήστε σιγά-σιγά την κλίση του. Στο σημείο που το σώμα αρχίσει να ολισθαίνει, σφίξτε τη βίδα στήριξης και μετρήστε τη γωνία κλίσης θ_s . Καταχωρίστε κατάλληλα την τιμή της στον Πίνακα Μετρήσεων 8.4



Σχήμα 8.8 Η πειραματική διάταξη για τον προσδιορισμό του συντελεστή στατικής τριβής.



Σχήμα 8.9 Η πειραματική διάταξη για τον προσδιορισμό των συντελεστών στατικής και κινητικής τριβής.

3. Υπολογίστε από τη σχέση 8.16 το συντελεστή στατικής τριβής μ_s .
4. Υπολογίστε τη μέγιστη δύναμη στατικής τριβής από τη σχέση:

$$T_{s,max} = mgsin\theta_s$$

και γράψτε το αποτέλεσμα στον Πίνακα 8.4.

- Επαναλάβετε τα βήματα 2-4 τοποθετώντας αυτή τη φορά το σώμα στην επιφάνεια του κεκλιμένου επιπέδου που είναι καλυμμένη με το γυαλόχαρτο.
- Επαναλάβετε τα προηγούμενα βήματα τοποθετώντας τα υπόλοιπα διαθέσιμα σώματα σε κάθε μία από τις δύο διαφορετικές επιφάνειες του κεκλιμένου επιπέδου και καταχωρίστε τα αποτελέσματα στον Πίνακα Μετρήσεων 8.4.

υλικά επιφανειών	m (g)	θ_s	$\mu_s = \tan\theta_s$	$T_{s,max}$ (N)
πλαστικό -				
πλαστικό -				
πλαστικό -				
πλαστικό -				
γυαλόχαρτο -				
γυαλόχαρτο -				
γυαλόχαρτο -				
γυαλόχαρτο -				

Πίνακας 8.4 Πίνακας μετρήσεων του συντελεστή στατικής τριβής μεταξύ των επιφανειών διαφόρων υλικών.

2^ο Πείραμα

- Τοποθετήστε τον κυβόλιθο στο μάρμαρο του δαπέδου και αγκιστρώστε κατάλληλα τον αισθητήρα της δύναμης.
- Βεβαιωθείτε ότι το σύστημα συλλογής δεδομένων είναι σε λειτουργία και στην επιφάνεια εργασίας διπλασιάστε με το ποντίκι στο εικονίδιο Friction. Στο εμφανιζόμενο παράθυρο πατήστε START, ώστε να αρχίσει να καταγράφεται η δύναμη που θα ασκήσετε μέσω του αισθητήρα στον κυβόλιθο, προκειμένου να τον θέσετε σε κίνηση.
- Τραβήξτε αργά τον αισθητήρα, ώστε να θέσετε τον κυβόλιθο σε κίνηση με σταθερή ταχύτητα. Υπολογίστε από το γράφημα τη μέγιστη τιμή της στατικής τριβής και την κινητική τριβή.
- Σηκώστε με τον αισθητήρα τον κυβόλιθο ώστε να μετρήσετε το βάρος του. Υπολογίστε τους συντελεστές στατικής και κινητικής τριβής.
- Τοποθετήστε τον κυβόλιθο πάνω στο μάρμαρο του δαπέδου με διαφορετική επιφάνεια έδρασης και επαναλάβετε το προηγούμενο πείραμα. Βρείτε πάλι τους συντελεστές στατικής και κινητικής τριβής. Διαφέρουν από τις προηγούμενες τιμές και αν ναι, γιατί;

8.2.4. Ασκήσεις

- Στον κυβόλιθο του 2^{ου} πειράματος τοποθετούμε πάνω του σώμα μάζας 1kg. Υπολογίστε πόσο θα αλλάξει η μέγιστη δύναμη της στατικής τριβής.
- Ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ ενός τούβλου μάζας 500 g και της επιφάνειας του τοίχου είναι 0.65. Ποια είναι η ελάχιστη οριζόντια δύναμη που πρέπει να ασκούμε στο τούβλο ώστε αυτό να μείνει προσκολλημένο στην κατακόρυφη επιφάνεια του τοίχου;
- Υπολογίστε τη δύναμη που πρέπει να εφαρμόσουμε σε ξύλινο κιβώτιο μάζας 50 kg προκειμένου να το θέσουμε σε κίνηση πάνω σε οριζόντιο ξύλινο δάπεδο. Πόση δύναμη χρειάζεται προκειμένου να το μετακινούμε με σταθερή ταχύτητα;

8.3. Θερμική διαστολή σωμάτων

8.3.1. Σύντομη ανασκόπηση της θεωρίας

Στα περισσότερα υλικά όταν μεταβάλλεται η θερμοκρασία τους προκαλείται αλλαγή στις διαστάσεις τους (διαστελλονται ή συστέλλονται). Η θερμική διαστολή των σωμάτων παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον, εξαιτίας των πολλών εφαρμογών στην καθημερινή μας ζωή. Σε πλήθος κατασκευών όπως γέφυρες, σιδηροδρομικές γραμμές, δρόμοι, σπίτια, πρέπει να λαμβάνεται πρόνοια ώστε να αποφεύγονται καταστροφές λόγω της θερμικής διαστολής.

Η μεταβολή μιας οποιασδήποτε διάστασης ενός υλικού ονομάζεται γραμμική διαστολή. Έστω ότι το αρχικό μήκος μιας γραμμικής διάστασης του υλικού είναι L_0 σε θερμοκρασία T_0 . Αν μεταβληθεί η θερμοκρασία κατά $\Delta T = T - T_0$ ώστε το τελικό μήκος να γίνει L , βρίσκεται πειραματικά ότι για μικρές μεταβολές της θερμοκρασίας ΔT , η μεταβολή του μήκους $\Delta L = L - L_0$ είναι ανάλογη προς τη μεταβολή της θερμοκρασίας ΔT και του αρχικού μήκους L_0 . Θα ισχύει δηλαδή,

$$\Delta L = \alpha L_0 \Delta T \quad (8.17)$$

ή

$$L - L_0 = \alpha L_0 (T - T_0) \Rightarrow L = L_0 [1 + \alpha (T - T_0)]$$

Στην παραπάνω σχέση ο συντελεστής α ονομάζεται συντελεστής γραμμικής διαστολής και εκφράζει τη σχετική μεταβολή του μήκους του υλικού ($\Delta L/L_0$) ανά βαθμό μεταβολής της θερμοκρασίας του. Η τιμή του α εξαρτάται από το είδος του υλικού. Τιμές του α για διάφορα υλικά δίνονται στον Πίνακα 8.5.

Στα ισότροπα υλικά η σχετική μεταβολή του μήκους ($\Delta L/L_0$) για δεδομένη μεταβολή της θερμοκρασίας είναι η ίδια για όλες τις διευθύνσεις του στερεού. Στην περίπτωση που μεταβάλλεται η θερμοκρασία ενός τρισδιάστατου ισότροπου σώματος αρχικού όγκου V_0 κατά ΔT , τότε ο όγκος του θα αυξηθεί κατά

$$\Delta V = \beta V_0 \Delta T \quad (8.18)$$

όπου $\beta = 3\alpha$ είναι ο συντελεστής διαστολής όγκου και ισούται με τη σχετική μεταβολή του όγκου ($\Delta V/V_0$) ανά βαθμό μεταβολής της θερμοκρασίας. Τιμές του β για διάφορα υλικά δίνονται στον Πίνακα 8.5.

Η ερμηνεία του φαινομένου της θερμικής διαστολής ενός σώματος βρίσκεται σε ατομικό επίπεδο. Σε μια πρώτη προσέγγιση μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα άτομα σε ένα στερεό συμπεριφέρονται ως απλοί αρμονικοί ταλαντωτές. Τα άτομα δηλαδή ταλαντώνονται γύρω από μια θέση ισορροπίας υπό την επίδραση δυνάμεων ελατηρίων, τα οποία ωστόσο είναι πιο εύκολο να επιμηκυνθούν παρά να συσπειρωθούν. Στην πραγματικότητα δηλαδή, όταν τα άτομα πλησιάζουν μεταξύ τους εμφανίζονται ισχυρές απωστικές δυνάμεις, ενώ όταν αυτά απομακρύνονται οι εμφανιζόμενες δυνάμεις είναι ασθενέστερες (μη αρμονικός ταλαντωτής). Με την αύξηση της θερμοκρασίας, αυξάνει το πλάτος της ασύμμετρης ταλάντωσης των ατόμων και συνεπώς η μέση απόσταση μεταξύ των ατόμων, με αποτέλεσμα τη διαστολή ολόκληρου του υλικού.

8.3.2. Σκοπός του πειράματος

Σκοπός του πειράματος είναι ο πειραματικός προσδιορισμός του συντελεστή γραμμικής διαστολής μιας μεταλλικής ράβδου αλουμινίου. Για συγκεκριμένη μεταβολή της θερμοκρασίας της ράβδου ΔT θα μετρηθεί η μεταβολή του μήκους της ΔL . Από τη γραφική παράσταση $\Delta L = f(\Delta T)$ εξάγεται ότι η κλίση της προκύπτουσας ευθείας, σύμφωνα με την εξίσωση 8.17, θα ισούται με:

$$\kappa = \frac{\Delta L}{\Delta T} = \alpha L_0$$

απ' όπου μπορεί εύκολα να υπολογιστεί ο συντελεστής γραμμικής διαστολής της ράβδου, αν είναι γνωστό το αρχικό της μήκος L_0 .

Υλικό	α ($\times 10^{-6} \text{C}^{-1}$ ή K^{-1})	β ($\times 10^{-6} \text{C}^{-1}$ ή K^{-1})
Χαλκός	17	51
Ορείχαλκος	19	57
Χάλυβας*	11 ~ 13	33 ~ 39
Άμορφος χαλαζίας	0.33	1
Αλουμίνιο	23.1	69
Invar (κράμα Ni-Fe)	1.2	3.6
Γυαλί (συνηθισμένο)	8.5	25.5
Γυαλί (πυρίμαχο)	3.3	9.9
Πάγος	50	
Διαμάντι	1	3
Μόλυβδος	29	87
Χρυσός	14	42
Πλατίνα	9	27
Υδράργυρος	61	182
Άργυρος	18	54
Νικέλιο	13	39
Βολφράμιο	4.5	13.5
Μαγνήσιο	26	78
Νερό	69	207
PVC	52	156

*ανάλογα με τη σύσταση

Πίνακας 8.5 Συντελεστές γραμμικής διαστολής και διαστολής όγκου διαφόρων υλικών στους 20°C .

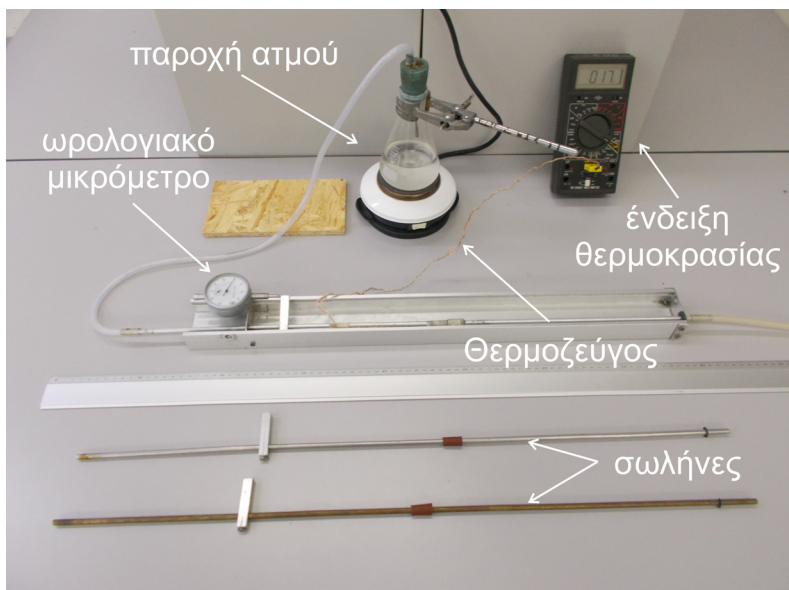
8.3.3. Πειραματικό μέρος

8.3.3.1. Χρησιμοποιούμενα όργανα

1. Μεταλλικοί σωλήνες (αλουμινίου, ορείχαλκου και χάλυβα).
2. Βαθμονομημένος κανόνας για τη μέτρηση του μήκους του σωλήνα.
3. Ωρολογιακό μικρόμετρο για τη μέτρηση της μεταβολής του μήκους του σωλήνα, τοποθετημένο κατάλληλα πάνω σε βάση στήριξης μαζί με το σωλήνα.
4. Σύστημα παροχής ατμού στο σωλήνα που αποτελείται από σφραγισμένο δοχείο pyrex με ελαστικό σωλήνα και πλάκα θέρμανσης.
5. Βολτόμετρο και θερμοστοιχείο για τη μέτρηση της θερμοκρασίας του σωλήνα.

Η πειραματική διάταξη απεικονίζεται στο Σχήμα 8.10.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Βεβαιωθείτε ότι κατά τη διάρκεια της θέρμανσης, ο ατμός και το ζεστό νερό διέρχονται ανεμπόδιστα από το μεταλλικό σωλήνα και τις ελαστικές συνδέσεις και διοχετεύονται στο πλαστικό μπουκάλι στη βάση του πάγκου εργασίας. Σε διαφορετική περίπτωση, υπάρχει κίνδυνος απότομης διαφυγής και πιθανής πρόκλησης τραυματισμού. Χρησιμοποιήστε την ειδική λαβίδα για να κατεβάσετε το θερμαινόμενο δοχείο από τη θερμαντική πλάκα, μόλις τελειώσει η διαδικασία της θέρμανσης, σύμφωνα με τις επόμενες οδηγίες του πειράματος.



Σχήμα 8.10 Απεικόνιση της πειραματικής διάταξης για τη μέτρηση του συντελεστή γραμμικής διαστολής διαφόρων μεταλλικών ράβδων.

8.3.3.2. Μετρήσεις

1. Μετρήστε με το χάρακα το αρχικό μήκος του σωλήνα, λαμβάνοντας υπόψη μόνο εκείνο το κομμάτι, για το οποίο θα μετρήσετε τη μεταβολή του μήκους του κατά τη θέρμανση, με τη χρήση του ωρολογιακού μικρομέτρου. Αφού εκτιμήσετε το σφάλμα στη μέτρησή σας, γράψτε το αποτέλεσμα ως εξής:

$$L_0 = \dots \pm \dots \text{ cm}$$

2. Η μεταβολή του μήκους του σωλήνα κατά τη θέρμανση του είναι πολύ μικρή ώστε να μπορεί να μετρηθεί με το χάρακα. Γι αυτό το λόγο χρησιμοποιούμε ένα ωρολογιακό μικρόμετρο με το οποίο μπορούμε να μετρήσουμε μεταβολές μήκους με μεγάλη ακρίβεια. Υπολογίστε την ελάχιστη και τη μέγιστη μεταβολή μήκους που μπορεί να μετρήσει το μικρόμετρο αυτό.

$$\Delta L_{min} = \dots \text{ mm}$$

$$\Delta L_{max} = \dots \text{ mm}$$

3. Βεβαιωθείτε ότι το σύστημα παροχής ατμού είναι συνδεδεμένο στο σωλήνα και ότι τίποτε δεν εμποδίζει τη διέλευση του ατμού διαμέσου αυτού. Καταγράψτε την αρχική θερμοκρασία του σωλήνα, όπως αυτή δίνεται από το πολύμετρο.

$$T_0 = \dots \text{ } ^\circ\text{C}$$

4. Αφού μηδενίσετε την ένδειξη του μικρομέτρου, θέστε σε λειτουργία τη θερμαντική πλάκα και περιμένετε μέχρι να αρχίσει να βράζει το νερό. Καθώς ατμός και ζεστό νερό θα διέρχονται από το σωλήνα και αυτός αρχίζει και ζεσταίνεται, παρατηρήστε τη μεταβολή του μήκους του, όπως αυτή φαίνεται στο μικρόμετρο. Επειδή η διαδικασία της θέρμανσης του σωλήνα, και κατά συνέπεια και της μεταβολής του μήκους του είναι αρκετά γρήγορη, ώστε να μπορέσετε να καταγράψετε τις τιμές, αυτό θα πραγματοποιηθεί κατά τη διαδικασία της ψύξης του. Αφού η θερμοκρασία φτάσει στους 80 °C, κατεβάστε με την ειδική λαβίδα το δοχείο pyrex από τη θερμαντική πλάκα, ώστε ο μεταλλικός σωλήνας να αρχίσει να ψύχεται. Ξεκινώντας από τους 80 °C και ανά 5 βαθμούς, καταγράψτε στον Πίνακα Μετρήσεων 8.6 τη μεταβολή του μήκους ΔL σε mm και την αντίστοιχη θερμοκρασία T , την οποία διαβάζουμε στο βολτόμετρο. Υπολογίστε στην τελευταία στήλη τη διαφορά $\Delta T = T - T_0$.

5. Από τις τιμές του Πίνακα Μετρήσεων, χαράξτε τη γραφική παράσταση $\Delta L=f(\Delta T)$ σε χιλιοστομετρικό χαρτί. Δικαιολογείται η μορφή που έχει βάσει της θεωρίας;

6. Υπολογίστε με τη βοήθεια της κλίσης, το συντελεστή γραμμικής διαστολής του υλικού:

$$\alpha = \dots \dots \dots \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

7. Συγκρίνετε την τιμή που βρήκατε με την τιμή του συντελεστή γραμμικής διαστολής του Al που δίνεται στον Πίνακα 8.5, υπολογίζοντας την επί τοις εκατό διαφορά των δύο τιμών.

8. Υπολογίστε με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων την εξίσωση της ευθείας:

$$\Delta L = \kappa \cdot \Delta T + \beta$$

και χαράξτε τη πάνω στην προηγούμενη γραφική παράσταση. Από την τιμή του κ που βρήκατε υπολογίστε εκ νέου το συντελεστή γραμμικής διαστολής της ράβδου. Ποια από τις δύο τιμές είναι η καλύτερη;

9. Που μπορεί να υπεισέρχονται σφάλματα στον πειραματικό προσδιορισμό του συντελεστή γραμμικής διαστολής;

a/a	T (°C)	ΔL (mm)	ΔT (°C)
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

Πίνακας 8.6 Πίνακας μετρήσεων για τον προσδιορισμό του συντελεστή γραμμικής διαστολής ράβδου ορείχαλκου.

10. Εφόσον υπάρχει διαθέσιμος χρόνος, μπορείτε να επαναλάβετε όλη την προηγούμενη διαδικασία προσδιορισμού του συντελεστή γραμμικής διαστολής, χρησιμοποιώντας αυτή τη φορά έναν από τους άλλους δύο διαθέσιμους μεταλλικούς σωλήνες (ορείχαλκου ή χάλυβα).

11. Αφαιρέστε με τη βοήθεια του επιβλέποντα το μεταλλικό σωλήνα αλουμινίου από τη βάση στήριξή του χωρίς να αφαιρέσετε όμως το θερμοζεύγος από το σωλήνα. Τοποθετήστε εκ νέου, έναν από τους δύο διαθέσιμους σωλήνες και προσαρμόστε στα άκρα του τους ελαστικούς συνδέσμους για την παροχή και αποχέτευση του ατμού-νερού. Τοποθετήστε κατάλληλα στη μέση περίπου του σωλήνα το διαθέσιμο θερμοζεύγος και συνδέστε το στην κατάλληλη υποδοχή του πολυμέτρου.

12. Επαναλάβετε το βήμα 4 καταχωρώντας τις νέες μετρήσεις σας στον Πίνακα Μετρήσεων 8.7.

13. Χαράξτε τη γραφική παράσταση $\Delta L=f(\Delta T)$ στο ίδιο χιλιοστομετρικό χαρτί που χρησιμοποιήσατε πριν. Ποια ράβδος έχει το μεγαλύτερο συντελεστή γραμμικής διαστολής; (αιτιολογίστε το αποτέλεσμα σας κατευθείαν από τη γραφική παράσταση των δεδομένων των Πινάκων 8.6 και 8.7).

14. Υπολογίστε μέσω της κλίσης, το νέο συντελεστή γραμμικής διαστολής του υλικού και συγκρίνεται με την τιμή της βιβλιογραφίας που δίνεται στον Πίνακα 8.4.

a/a	$T (^{\circ}\text{C})$	ΔL (mm)	$\Delta T (^{\circ}\text{C})$
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

Πίνακας 8.7 Πίνακας μετρήσεων για τον προσδιορισμό του συντελεστή γραμμικής διαστολής της 2^{ης} ράβδου.

15. Εναλλακτικά, εφόσον δεν πραγματοποιήσετε το πείραμα, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τις πειραματικές τιμές του Πίνακα 8.8 που λήφθηκαν για το σωλήνα ορείχαλκου.

a/a	ΔL (mm)	$\Delta T (^{\circ}\text{C})$
1	0.45	45
2	0.385	40
3	0.33	35
4	0.28	30
5	0.235	25
6	0.185	20
7	0.145	15
8	0.10	10

Πίνακας 8.8 Πίνακας μετρήσεων για τον προσδιορισμό του συντελεστή γραμμικής διαστολής της ράβδου από ορείχαλκο.

8.3.4. Ερωτήσεις - Ασκήσεις

1. Πως θα μπορούσαμε να ξεσφίξουμε το μεταλλικό καπάκι ενός γυάλινου βάζου που έχει κολλήσει; (αιτιολογήστε την απάντησή σας βάσει των διαφορετικών συντελεστών θερμικής διαστολής μετάλλου και γυαλιού).
2. Τι συμπέρασμα βγάζετε συγκρίνοντας τους συντελεστές γραμμικής διαστολής και διαστολής όγκου των στερεών υλικών του Πίνακα 8.5;
3. Βρείτε τη μεταβολή του όγκου μιας σφαίρας αργιλίου (ΔV) ακτίνας 10 cm όταν θερμανθεί από τους μηδέν στους 100 °C.
4. Αν η διάμετρος του σωλήνα που χρησιμοποιήσατε στην εργαστηριακή άσκηση είναι $d = 6.1$ mm, υπολογίστε τη μέγιστη διαστολή της, κατά τη θέρμανση του σωλήνα από τη θερμοκρασία δωματίου στους 85 °C.

8.4. Μηχανικές ιδιότητες υλικών – Υπολογισμός μέτρου ελαστικότητας Young

8.4.1. Σύντομη ανασκόπηση της θεωρίας

8.4.1.1. Μηχανικές Ιδιότητες των υλικών

Έστω ένα σώμα κυβικού σχήματος με εμβαδό έδρας A , το οποίο ισορροπεί επάνω σε μία οριζόντια επιφάνεια. Αν εφαρμόσουμε μία δύναμη F κάθετα στην πάνω έδρα του, τότε σύμφωνα με τον 3^ο νόμο του Newton (νόμος δράσης – αντίδρασης), η δύναμη αυτή θα αντισταθμιστεί από μία αντίθετη δύναμη που θα εξασκηθεί στη βάση του κύβου από την επιφάνεια στην οποία εδράζεται. Λέμε τότε ότι ο κύβος βρίσκεται υπό καθεστώς μηχανικής τάσης σ , η οποία ορίζεται ως το πηλίκο της εφαρμοζόμενης δύναμης προς το εμβαδό της επιφάνειας στην οποία αυτή ασκείται:

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (8.19)$$

Όταν η εφαρμοζόμενη δύναμη τείνει να επιμηκύνει το στερεό σώμα, η τάση ονομάζεται εφελκυστική τάση, ενώ στην αντίθετη περίπτωση που το υλικό συμπιέζεται, ονομάζεται θλιπτική τάση.

Η απόκριση (αντίδραση) των υλικών στην εφαρμογή της τάσης (θλίψη ή εφελκυσμός) ονομάζεται παραμόρφωση. Η αξονική παραμόρφωση ε που υφίσταται ένα σώμα, κατά μήκος της διεύθυνσης που εφαρμόζεται η εφελκυστική (ή θλιπτική) τάση και μεταβάλλει την αρχική του διάσταση L_o κατά ΔL , ορίζεται ως το πηλίκο της μεταβολής ΔL ως προς την αρχική διάσταση L_o , δηλαδή

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_o} \quad (8.20)$$

και εκφράζεται συνήθως σε μονάδες με (microstrain) ή μπορεί να αναχθεί σε ποσοστό επί τοις εκατό (πολλαπλασιάζοντας επί 100). Για παράδειγμα, αν το αρχικό μήκος ενός αντικειμένου $L_o=100$ mm μεταβληθεί κατά $\Delta L=0.01$ mm (δηλ. 0.01%), η αξονική παραμόρφωση ε θα είναι:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_o} = \frac{0.01\text{mm}}{100\text{mm}} = 0.0001 \varepsilon = 0.0001 \times 10^6 \text{ με} = 100 \text{ με}$$

Μεταξύ τάσης και παραμόρφωσης σε ένα στερεό με ελαστική συμπεριφορά (δηλ. τη συμπεριφορά ενός ελατηρίου) ισχύει ο ακόλουθος γραμμικός νόμος (γνωστότερος ως νόμος του Hooke):

$$\sigma_x = \frac{F_x}{A} = E \cdot \varepsilon_x \quad (8.21)$$

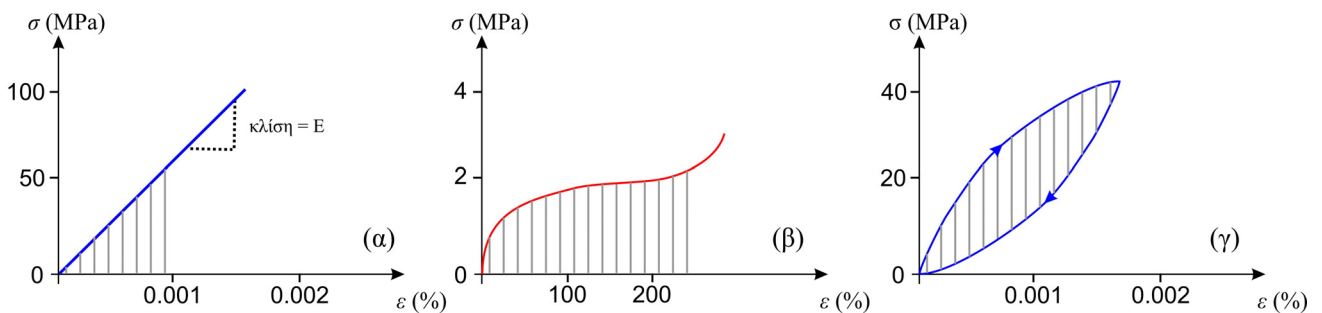
όπου σ_x είναι η εφελκυστική (ή θλιπτική) τάση (λόγος δύναμης F_x προς την επιφάνεια A) που ασκείται στο σώμα κατά μήκος της x -διεύθυνσης και E το μέτρο ελαστικότητας ή μέτρο του Young. Επειδή η παραμόρφωση είναι αδιάστατο μέγεθος, το μέτρο ελαστικότητας έχει μονάδες τάσης (πίεσης). Στην πράξη μετριέται σε GPa (=10⁹ Pa). Τιμές του μέτρου ελαστικότητας Young για διάφορα υλικά δίνονται στον Πίνακα 8.9.

Η γραμμική σχέση μεταξύ τάσης – παραμόρφωσης ισχύει μέχρι το όριο ελαστικότητας, όταν δηλαδή το υλικό επανέρχεται στην αρχική του κατάσταση (διάσταση) καταργώντας την εφαρμοζόμενη τάση. [Ψαθυρά](#) υλικά όπως το γυαλί και τα κεραμικά εμφανίζουν γραμμική ελαστική συμπεριφορά. Σε ένα ψαθυρό υλικό, πάνω από το όριο ελαστικότητας οδηγούμαστε στη θραύση. Στα μεταλλικά υλικά, η γραμμική ελαστική συμπεριφορά βρίσκεται μέσα σε πολύ στενά όρια παραμόρφωσης (έως 1000 με ή 0.1%).

Η κλίση της ευθείας στο διάγραμμα τάσης – παραμόρφωσης ισούται με το μέτρο ελαστικότητας του υλικού (Σχήμα 8.11α). Το εμβαδό της επιφάνειας κάτω από την ευθεία μας δίνει την ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στο υλικό και αποδίδεται πάλι όταν καταργηθεί το μηχανικό φορτίο (μηχανική τάση).

Υλικό	E (GPa)
Διαμάντι	1050 – 1210
Γραφένιο	1050
Νανοσωλήνες άνθρακα	1000+
Καρβίδιο του βολφραμίου (WC)	450 – 650
Καρβίδιο του πυριτίου (SiC)	450
Βολφράμιο (W)	400 – 410
Μολυβδένιο (Mo)	330
Βηρύλλιο (Be)	287
Χάλυβας	200
Χαλκός (Cu)	117
Τιτάνιο (Ti)	110.3
Ορείχαλκος	100 – 125
Αλουμίνιο (Al)	69
Γυαλί	50 – 90
Μαγνήσιο (Mg)	45
Τσιμέντο υψηλής αντοχής	30
Ανθρώπινα οστά	14
Ξύλο βελανιδιάς	11
Νάιλον	2 – 4
Τεφλόν (PTFE)	0.5
λάστιχο	0.01 – 0.1

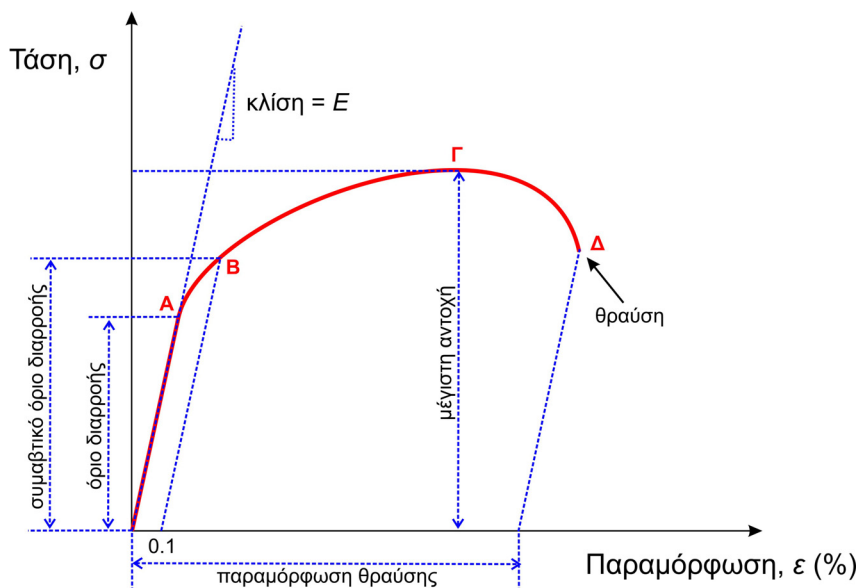
Πίνακας 8.9 Τιμές του μέτρου ελαστικότητας διαφόρων υλικών.



Σχήμα 8.11 Διαγράμματα τάσης-παραμόρφωσης για (α) γραμμικά ελαστικό υλικό (β) ελαστομερές υλικό και (γ) ανελαστικό υλικό. Το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν κάτω από την καμπύλη παριστάνει την ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στο υλικό ή απελευθερώνεται σε έναν κύκλο φόρτισης υπό τη μορφή θερμότητας.

Ελαστομερή υλικά εμφανίζουν πολύ μεγάλες τιμές ελαστικής παραμόρφωσης (έως και 500%) αλλά στην περίπτωση αυτή, η εφαρμοζόμενη τάση από κάποια τιμή της παραμόρφωσης και πάνω, δεν εμφανίζει γραμμική μεταβολή με την παραμόρφωση (μη-γραμμική ελαστική συμπεριφορά, Σχήμα 8.11β).

Πολυμερή υλικά και μαλακά μέταλλα (π.χ. μόλυβδος) εμφανίζουν ανελαστική συμπεριφορά. Στο διάγραμμα τάσης – παραμόρφωσης δηλαδή (Σχήμα 8.11γ), οι καμπύλες φόρτισης και αποφόρτισης του υλικού δε συμπίπτουν, με αποτέλεσμα να εμφανίζεται ένας βρόγχος υστέρησης. Το εμβαδό αυτού του βρόγχου μας δίνει την ενέργεια ανά μονάδα όγκου που εκλύεται από το υλικό υπό τη μορφή θερμότητας.



Σχήμα 8.12 Καμπύλη τάσης – παραμόρφωσης για ένα όλκιμο υλικό.

Σε ένα όλκιμο υλικό (π.χ. τα περισσότερα μέταλλα επιδέχονται διάφορους τρόπους μορφοποίησης υπό πίεση και έλξη), πέραν από το όριο ελαστικότητας εμφανίζεται μόνιμη παραμόρφωση (μη αντιστρεπτή μεταβολή σε σχήμα και μέγεθος) που ονομάζεται πλαστική παραμόρφωση. Η καμπύλη τάσης – παραμόρφωσης μέχρι και το όριο θραύσης για ένα τέτοιο υλικό απεικονίζεται στο Σχήμα 8.12.

Μετά τη γραμμική περιοχή (σημείο Α) όπου το μέταλλο παραμορφώνεται ελαστικά, αρχίζει η πλαστική του παραμόρφωση κατά την οποία ελαττώνεται το πλάτος (εμβαδόν διατομής του) και αυξάνεται το μήκος του υλικού. Στο σημείο μέγιστης τάσης (σημείο Γ) θα εμφανιστεί τοπικά ελάττωση της διατομής του υλικού, γνωστή ως δημιουργία “λαιμού” και περαιτέρω παραμόρφωση θα επιφέρει τη θραύση του υλικού εντός της περιοχής αυτής (Χρυσουλάκης και Παντελής, 1996). Στο Σχήμα 8.12, η τάση όπου αρχίζει να εμφανίζεται πλαστική παραμόρφωση, ονομάζεται όριο διαρροής (σημείο Α). Για μικρότερα φορτία, το υλικό παραμορφώνεται ελαστικά. Σε διάφορα υλικά, η μετάβαση από την ελαστική στην πλαστική περιοχή δεν είναι σημειακή (στο όριο διαρροής) αλλά γίνεται σε μία περιοχή που οριοθετείται από το ανώτερο και κατώτερο σημείο διαρροής. Ως συμβατικό όριο διαρροής ορίζουμε την τάση που αντιστοιχεί σε παραμόρφωση του υλικού κατά 0.1% (σημείο Β).

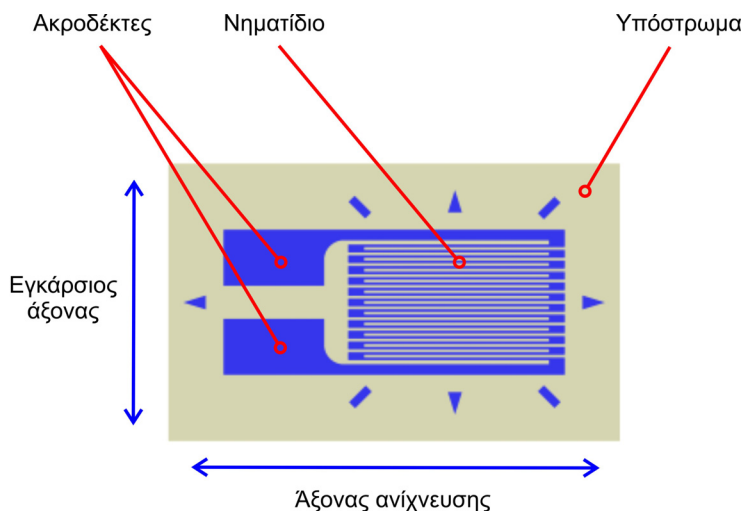
Ανάλογα με το βαθμό της πλαστικής παραμόρφωσης που προηγείται της θραύσης, η εφελκυστική θραύση διακρίνεται σε ψαθυρή και όλκιμη θραύση. Κατά την όλκιμη θραύση, παρατηρείται μακροσκοπικά σημαντική ελάττωση στη διατομή του υλικού λόγω της πλαστικής παραμόρφωσής του, ενώ στη ψαθυρή θραύση η ελάττωση της διατομής είναι αμελητέα, χωρίς προηγούμενη μακροσκοπική πλαστική παραμόρφωση (Χρυσουλάκης και Παντελής, 1996).

8.4.1.2. Αισθητήρες μέτρησης μηχανικής τάσης

Οι μετρητές μηχανικής τάσης (strain gauges) μετρούν τις μεταβολές του μεγέθους ενός στερεού αντικειμένου όταν σε αυτό εξασκούνται δυνάμεις (τάσεις) συμπίεσης ή εφελκυσμού. Ο συνηθέστερος και απλούστερος τύπος μετρητή μηχανικής τάσης είναι ο μετρητής με αντίσταση, η λειτουργία του οποίου στηρίζεται στην αλλαγή της ηλεκτρικής του αντίστασης με τη μεταβολή των διαστάσεών του.

Ένας απλός μετρητής μηχανικής τάσης (με έναν άξονα ανίχνευσης) απεικονίζεται στο Σχήμα 8.13. Αποτελείται από ένα λεπτό φύλλο πάχους μερικών μικρομέτρων (μm) πάνω στο οποίο με τη βοήθεια φωτογραφικών τεχνικών έχει σχηματισθεί μια συνεχής τεθλασμένη γραμμή σε σχήμα ζιγκ-ζάγκ (νηματίδιο). Τα υλικά κατασκευής των νηματιδίων είναι κράματα Cu-Ni ή Cr-Ni που συνδυάζουν υψηλή ειδική αντίσταση με υψηλή μηχανική αντοχή. Η όλη κατασκευή είναι στερεωμένη σε μονωτική βάση κατασκευασμένη από εποξικές ρητίνες διαφόρων τύπων, ανάλογα με το θερμοκρασιακό εύρος λειτουργίας των μετρητών. Διατίθενται σε διάφορα μεγέθη (δέκατα του χιλιοστού έως και 50 mm) που ποικίλουν ανάλογα με την εφαρμογή και στερεώνονται στο υπό μέτρηση αντικείμενο με τη χρησιμοποίηση μη αγωγίμων,

ισχυρών συγκολλητικών κονιαμάτων (κυανο-ακρυλικές ή εποξικές κόλλες). Έτσι, όταν υπό συνθήκες συμπίεσης ή εφελκυσμού μεταβληθούν οι διαστάσεις του αντικειμένου (άρα και του μετρητή), αυτή η αλλαγή μεταφράζεται σε μεταβολή της αντίστασης του νηματιδίου του μετρητή.



Σχήμα 8.13 Κάτοψη μετρητή μηχανικής τάσης με αντίσταση.

Γενικά, η αντίσταση ενός αγωγού δίνεται από τη σχέση:

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

όπου ρ είναι η ειδική αντίσταση του υλικού (σε Ωm), l το μήκος του αγωγού (σε m) και S το εμβαδόν της διατομής του (σε m^2). Όταν λοιπόν στο υπό μέτρηση αντικείμενο ασκηθούν δυνάμεις που τείνουν να αυξήσουν το μήκος του (εφελκυσμός), θα αυξηθεί το μήκος του μετρητή με ταυτόχρονη ελάττωση του εμβαδού της διατομής του νηματιδίου, προκαλώντας αύξηση στην ηλεκτρική αντίσταση R . Η αλλαγή της αντίστασης μπορεί να μετατραπεί με τη βοήθεια μιας γέφυρας Wheatstone σε μετρήσιμη διαφορά δυναμικού (Πετρίδης, 1992). Το πηλίκο της ποσοστιαίας αλλαγής της αντίστασης R προς την ποσοστιαία αλλαγή του μήκους λόγω της εφαρμοζόμενης μηχανικής τάσης ονομάζεται παράγοντας G . Ισχύει δηλαδή:

$$G = \frac{\Delta R/R}{\Delta l/l} = \frac{\Delta R/R}{\varepsilon}$$

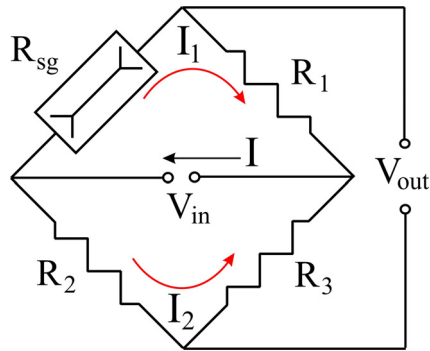
ή

$$G\varepsilon = \frac{\Delta R}{R}$$

Ο παράγοντας G παίρνει τιμές μεταξύ 1.8 και 2.2 ενώ οι αντιστάσεις των μετρητών μηχανικής τάσης κυμαίνονται μεταξύ 50 Ω και 2 k Ω .

Με τη χρησιμοποίηση μιας γέφυρας Wheatstone (Σχήμα 8.14) όπου η μία εκ των τεσσάρων αντιστάσεων έχει αντικατασταθεί από ένα μετρητή μηχανικής τάσης (γέφυρα ενός τετάρτου), μπορούμε με εύκολο τρόπο να ανάγουμε τη μεταβολή της μετρούμενης τάσης εξόδου V_{out} (λόγω αλλαγής της αντίστασης R_{sg} του μετρητή), σε υπολογισμό της δύναμης που προκαλεί τη συμπίεση ή τον εφελκυσμό του υπό μέτρηση αντικειμένου. Η τάση εξόδου V_{out} συναρτηθεί της τάσης εισόδου V_{in} σε μια γέφυρα Wheatstone μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

Για μηδενική τάση εξόδου, $V_{out} = 0$ (γέφυρα σε ισορροπία) θα ισχύει



Σχήμα 8.14 Γέφυρα Wheatstone ενός τετάρτου για μέτρηση μηχανικών τάσεων.

$$V_{R_{sg}} = V_{R_2} \quad \text{ή} \quad I_1 R_{sg} = I_2 R_2 \quad (8.22)$$

Ανάλογα:

$$V_{R_1} = V_{R_3} \quad \text{ή} \quad I_1 R_1 = I_2 R_3 \quad (8.23)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις (8.22) και (8.23), προκύπτει:

$$\frac{R_{sg}}{R_1} = \frac{R_2}{R_3}$$

θα ισχύει επίσης:

$$V_{out} = I_1 R_{sg} - I_2 R_2 \quad (8.24)$$

όπου

$$I_1 = \frac{V_{in}}{R_1 + R_{sg}} \quad \text{και} \quad I_2 = \frac{V_{in}}{R_2 + R_3}$$

Αντικαθιστώντας τις δύο τελευταίες σχέσεις για τα I_1 και I_2 στην 8.24, θα έχουμε τελικά:

$$V_{out} = V_{in} \left[\frac{R_{sg}}{R_1 + R_{sg}} - \frac{R_2}{R_2 + R_3} \right] \quad (8.25)$$

Υπό την εφαρμογή τάσης εφελκυσμού ή θλίψης, η αντίσταση R_{sg} θα μεταβληθεί κατά ΔR_{sg} , οπότε θα μεταβληθεί και η τάση εξόδου κατά ΔV_{out} . Η 8.25 τότε θα γίνει:

$$V_{out} + \Delta V_{out} = V_{in} \left[\frac{R_{sg} + \Delta R_{sg}}{R_1 + R_{sg} + \Delta R_{sg}} - \frac{R_2}{R_2 + R_3} \right] \quad (8.26)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις 8.25 και 8.26, θα προκύψει τελικά:

$$\Delta V_{out} = V_{in} \left[\frac{R_{sg} + \Delta R_{sg}}{R_1 + R_{sg} + \Delta R_{sg}} - \frac{R_{sg}}{R_1 + R_{sg}} \right] \quad (8.27)$$

Οι μεταβολές όμως της αντίστασης ΔR_{sg} του μετρητή είναι πολύ μικρές σε σχέση με την τιμή της R_{sg} ($\Delta R_{sg} \ll R_{sg}$), οπότε μπορούμε να γράψουμε την σχέση 8.27 ως εξής:

$$\Delta V_{out} \approx V_{in} \left[\frac{R_{sg} + \Delta R_{sg}}{R_1 + R_{sg}} - \frac{R_{sg}}{R_1 + R_{sg}} \right] = V_{in} \left[\frac{\Delta R_{sg}}{R_1 + R_{sg}} \right]$$

Λόγω των μικρών μεταβολών της αντίστασης ΔR_{sg} με την παραμόρφωση του αντικειμένου, η αλλαγή της τάσης εξόδου είναι της τάξης των mV και γι αυτό συνήθως στην έξοδο χρησιμοποιείται κατάλληλος ενισχυτής σήματος. Για δεδομένη λοιπόν τιμή της τάσης εισόδου στη γέφυρα Wheatstone, μπορούμε μετρώντας τη μεταβολή της τάσης εξόδου να υπολογίσουμε τη μεταβολή της αντίστασης ΔR_{sg} του μετρητή και επομένως την αλλαγή στο μήκος του αντικειμένου που υφίσταται μηχανική παραμόρφωση.

Μεγάλη σημασία βέβαια για τον ακριβή υπολογισμό των μεταβολών των διαστάσεων των αντικειμένων παίζει η ακριβής τοποθέτηση του μετρητή μηχανικής τάσης (καλή συγκόλληση και σωστός προσανατολισμός) στο υπό μέτρηση αντικείμενο.

Οι μετρητές μηχανικής τάσης χρησιμοποιούνται:

- στις κυψέλες φόρτισης (load cells) για τον προσδιορισμό μιας άγνωστης δύναμης (φορτίου) ή μάζας (γέφυρες ζύγισης οχημάτων, βάρος υγρών σε δεξαμενές, κ.ά).
- στους αισθητήρες πνευματικού βρόχου (pneumatic loop) για τον έλεγχο της οδικής κυκλοφορίας
- σε διατάξεις για μέτρηση της γραμμικής μετατόπισης
- για καταγραφή καταπονήσεων σε δομικά έργα όπως οδικές και σιδηροδρομικές γέφυρες ή ψηλά κτίρια
- για μέτρηση μηχανικών τάσεων σε δείγματα υλικών, πρωτότυπους κινητήρες, αεροσκάφη, κ.λ.π.

Γενικά, η δοκιμή εφελκυσμού αποτελεί τη συνηθέστερη μηχανική δοκιμή σε ένα υλικό. Οι μηχανικές δοκιμές είναι τυποποιημένες από διεθνείς οργανισμούς (American Society for Testing and Materials – [ASTM](#), International Standardization Organization – [ISO](#), κ.ά.), προκειμένου τα αποτελέσματα να ερμηνεύονται και να αξιολογούνται με τον ίδιο τρόπο από όλους τους χρήστες. Η τυποποίηση αυτή αφορά σε συγκεκριμένη γεωμετρία των δοκιμίων, σε βαθμονομημένες συσκευές μέτρησης, πειραματικές τεχνικές και παρουσίαση των αποτελεσμάτων. Ογκώδεις πειραματικές [διατάξεις](#) μεγάλου κόστους χρησιμοποιούνται για τις δοκιμές μηχανικών ιδιοτήτων υλικών. Τα δοκίμια εφελκυσμού μπορεί να είναι ράβδοι κυκλικής διατομής ή ελάσματα τυποποιημένων διαστάσεων. Οι άκρες των δοκιμίων που θα συγκρατηθούν στις δαγκάνες της μηχανής εφελκυσμού έχουν μεγαλύτερες διαστάσεις.

8.4.2. Σκοπός του πειράματος

Σκοπός της εργαστηριακής άσκησης είναι η καταγραφή και ανάλυση καμπύλων τάσης-παραμόρφωσης (stress-strain) σε κατάλληλα διαμορφωμένα δοκίμια διαφόρων υλικών. Από τις καμπύλες τάσης – παραμόρφωσης μπορούν να προκύψουν διάφορες μηχανικές ιδιότητες υλικών, όπως είναι το μέτρο ελαστικότητας Young, το σημείο διαρροής, το όριο θραύσης, κ.ά., που είναι σημαντικές σε τεχνολογικές-κατασκευαστικές εφαρμογές. Η καταγραφή επιτυγχάνεται με επιτραπέζια εκπαιδευτική διάταξη που περιλαμβάνει αισθητήρα μέτρησης δύναμης (τύπου strain gauge) και αισθητήρα μέτρησης μικρομετρικών αποστάσεων.

8.4.3. Πειραματικό μέρος

8.4.3.1. Χρησιμοποιούμενα όργανα

1. Αισθητήρας μέτρησης δύναμης με χρήση strain gauge (εύρος: -50 έως +50N) και προστασία υπερφόρτισης (Σύνδεσμος 4, Βιβλιογραφία).
2. Αισθητήρας μέτρησης γωνιακής μετατόπισης που συνδυάζεται με διάταξη μικρομετρικών μετατοπίσεων για την εφαρμογή εφελκυσμού και τη μέτρηση της παραμόρφωσης (Σύνδεσμος 5, Βιβλιογραφία).
3. Ράβδος βαθμονόμησης της διάταξης και δοκίμιο υπό τη μορφή ελάσματος.
4. Μικρόμετρο ακρίβειας 0.01mm και διαστημόμετρο ακρίβειας 0.05mm για τη μέτρηση των διαστάσεων του δοκιμίου.
5. Κατάλληλο λογισμικό για τη συλλογή και απεικόνιση των μετρήσεων.
6. Δοκίμια διαφόρων υλικών υπό τη μορφή ελασμάτων.

Η πειραματική διάταξη απεικονίζεται στο Σχήμα 8.15. Για τις δοκιμές χρησιμοποιούνται δοκίμια μικρών διατομών (ελάσματα), ώστε να απαιτούνται μικρές τάσεις για την παραμόρφωσή τους, ενώ το εφαρμοζόμενο φορτίο που ασκείται με την χειροκίνητη περιστροφή της μικρομετρικής διάταξης υποπολλαπλασιάζεται (στο 1/5), πριν καταγραφεί από τον αισθητήρα μέτρησης δύναμης που παρουσιάζει μικρή μέγιστη τιμή μέτρησης ($\pm 50\text{N}$). Έτσι, η δύναμη που καταγράφεται στον αισθητήρα είναι 5 φορές μικρότερη από την εφαρμοζόμενη τάση στο δείγμα.



Σχήμα 8.15 Πειραματική εκπαιδευτική διάταξη για την καταγραφή της καμπύλης τάσης-παραμόρφωσης σε κατάλληλα διαμορφωμένα δοκίμια διαφόρων υλικών.

8.4.3.2. Μετρήσεις

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Τα δεδομένα που συλλέγονται με τη χρήση του Η/Υ σε κάθε δοκιμή εφελκυσμού είναι πολλά (500 – 1000 σημεία, ανάλογα με την αντοχή του κάθε υλικού) και προτείνεται η χρήση κάποιου λογισμικού δημιουργίας γραφικών παραστάσεων, προκειμένου να αναπαρασταθεί η καμπύλη τάσης-παραμόρφωσης με όλες τις λεπτομέρειες. Εναλλακτικά, μετά τη διεξαγωγή του πειράματος, ο φοιτητής μπορεί να επιλέξει από την καμπύλη τάσης-παραμόρφωσης συγκεκριμένα ζεύγη τιμών, προκειμένου να χαράξει τη γραφική παράσταση σε χιλιοστομετρικό χαρτί. Τα βήματα που ακολουθούν είναι κοινά και για τις δύο περιπτώσεις.

1. Βεβαιωθείτε ότι οι δύο αισθητήρες (δύναμης και περιστροφικής κίνησης) είναι συνδεδεμένοι στα κανάλια του συστήματος συλλογής δεδομένων και ότι αυτό είναι σε λειτουργία (πράσινη ένδειξη στην πρόσοψη).
2. Στην επιφάνεια εργασίας του Η/Υ διπλοπατήστε με το ποντίκι στο εικονίδιο Materials_stress-strain. Στο παράθυρο του προγράμματος, εμφανίζεται το γράφημα της εφαρμοζόμενης δύναμης (σε N) ως προς την παραμόρφωση (σε mm) του ελάσματος.
3. Μετρήστε τις διαστάσεις του δοκιμίου που θα χρησιμοποιήσετε, κάνοντας χρήση του διαστημόμετρου και του μικρομέτρου:

$$L_o = \dots \dots \dots mm, \quad a = \dots \dots \dots mm, \quad b = \dots \dots \dots mm$$

όπου L_o το αρχικό μήκος του δοκιμίου και a, b το πλάτος και το πάχος του, αντίστοιχα.

4. Τοποθετήστε με τη συνδρομή του διδάσκοντα ένα δοκίμιο ανάμεσα στις δύο βίδες στήριξης των δειγμάτων. Το δοκίμιο θα πρέπει να τοποθετηθεί και να βιδωθεί προσεκτικά, έτσι ώστε να μην κάμπτεται στην αρχική θέση ηρεμίας (θέση μηδενικής τάσης).
5. Ο αισθητήρας περιστροφικής κίνησης μετράει τη γωνιακή μετατόπιση (σε μοίρες) κατά την περιστροφή του μικρομετρικού κοχλία που μετακινεί (εφελκύει) το έλασμα (δοκίμιο). Μία πλήρης περιστροφή (κατά 360°) ισοδυναμεί με γραμμική μετατόπιση (επιμήκυνση) ίση με 1mm.
6. Πατώντας Start, αρχίζει η καταγραφή των μετρήσεων δύναμης – μετατόπισης για το συγκεκριμένο δοκίμιο. Περιστρέψτε με αργό ρυθμό τον περιστροφέα και παρατηρήστε την καταγραφή των τιμών στο γράφημα, καθώς και στα παράθυρα των ενδείξεων. Σταματήστε μόλις το δοκίμιο σπάσει ή στην περίπτωση πλαστικού δοκιμίου που υφίσταται μεγάλη πλαστική παραμόρφωση, όταν δεν υπάρχει δυνατότητα επιπλέον μετατόπισης (παραμόρφωσης).

a/a	F (x 5N)	ΔL (mm)	σ (MPa)	$\varepsilon = \Delta L / L_o$
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
19				
20				

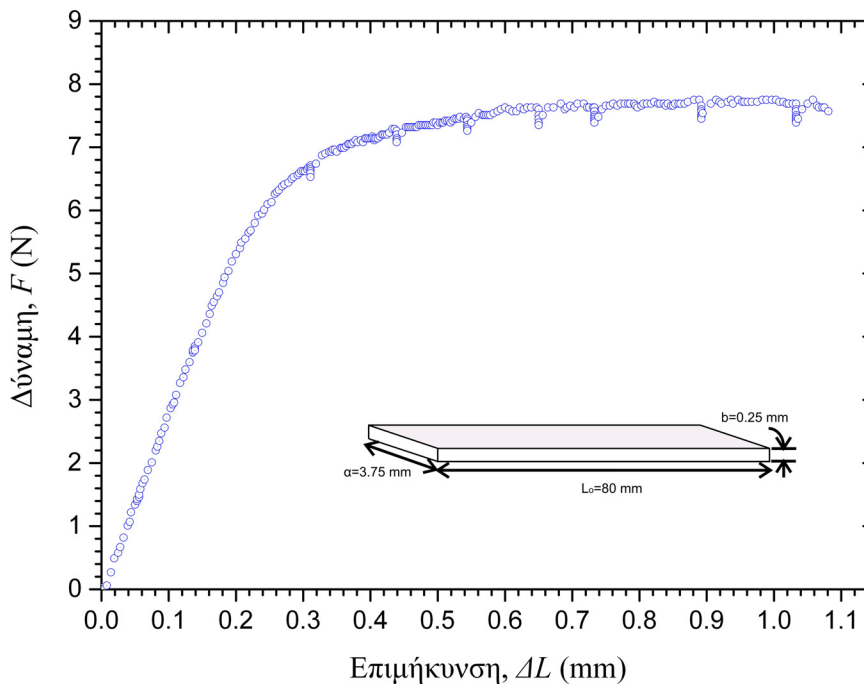
Πίνακας 8.9 Πίνακας μετρήσεων τάσης – παραμόρφωσης.

7. Με το εργαλείο Smart Tool του παράθυρου γραφήματος επιλέξτε σε όλο το εύρος της μετρούμενης επιμήκυνσης του ελάσματος, 15 – 20 σημεία και καταχωρίστε τις τιμές της πραγματικής δύναμης F και της επιμήκυνσης ΔL στον Πίνακα Μετρήσεων 8.9. Υπενθυμίζεται ότι η πραγματική δύναμη εφελκυσμού που ασκείται πάνω στο έλασμα είναι πενταπλάσια της μετρούμενης.

8. Υπολογίστε από τις σχέσεις 8.19 και 8.20 την τάση σ (σε MPa) και την παραμόρφωση ϵ , αντίστοιχα και καταχωρίστε κατάλληλα τις τιμές στον Πίνακα 8.9.
9. Χαράξτε σε χιλιοστομετρικό χαρτί τη γραφική παράσταση $\sigma=f(\epsilon)$. Καθορίστε την περιοχή ελαστικής συμπεριφοράς του υλικού και υπολογίστε από την κλίση της γραμμικής περιοχής, το μέτρο ελαστικότητας του Young (E) σε MPa (Σχέση 8.21).
10. Σημειώστε το όριο διαρροής του υλικού, τη μέγιστη τάση σ_{max} καθώς και το σημείο θραύσης του (εφόσον υπάρχει).

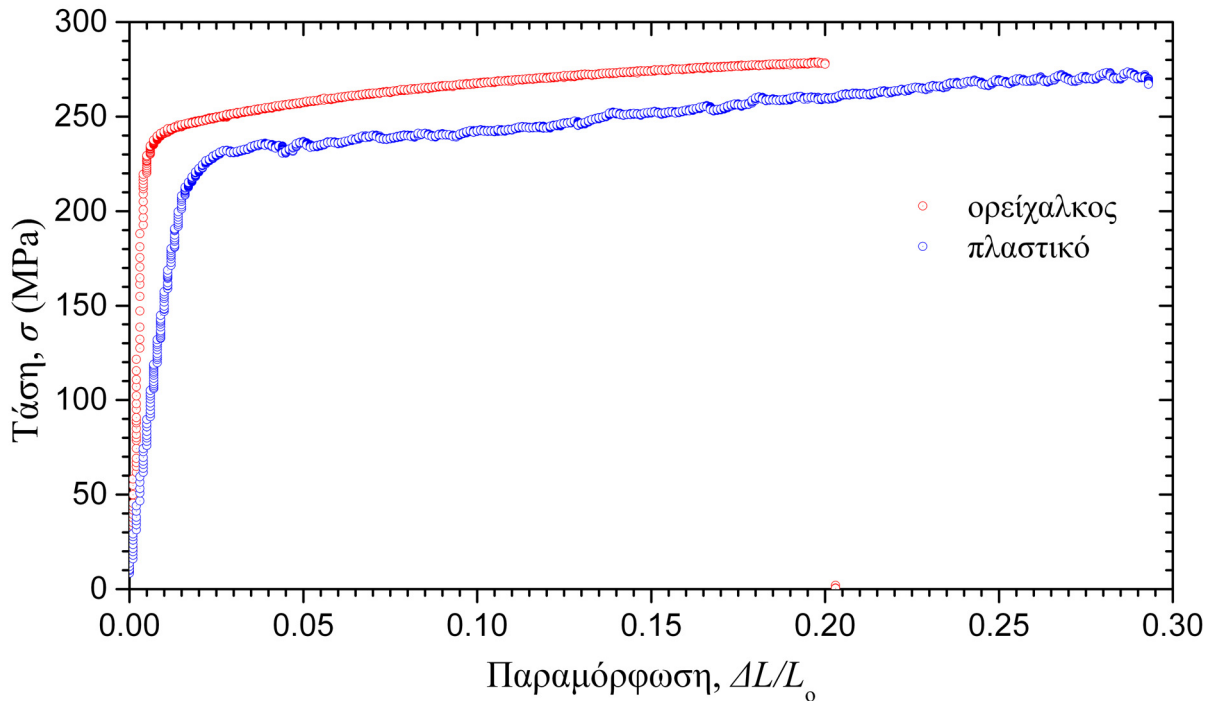
8.4.4. Ασκήσεις

1. Η καμπύλη της εφαρμοζόμενης δύναμης σε ένα έλασμα αλουμινίου ως προς την επιμήκυνση που αυτό υφίσταται, σε ένα πείραμα εφελκυσμού με την πειραματική διάταξη του Σχήματος 8.15, απεικονίζεται στο Σχήμα 8.16. Να υπολογίσετε το μέτρο ελαστικότητας του υλικού. Υπενθυμίζεται ότι η πραγματική δύναμη εφελκυσμού είναι πενταπλάσια αυτής που καταγράφεται. Οι διαστάσεις του ελάσματος δίνονται στο ένθετο του Σχήματος 8.16.
(Σημείωση: τα πειραματικά δεδομένα μπορείτε να τα βρείτε πατώντας [εδώ](#)).



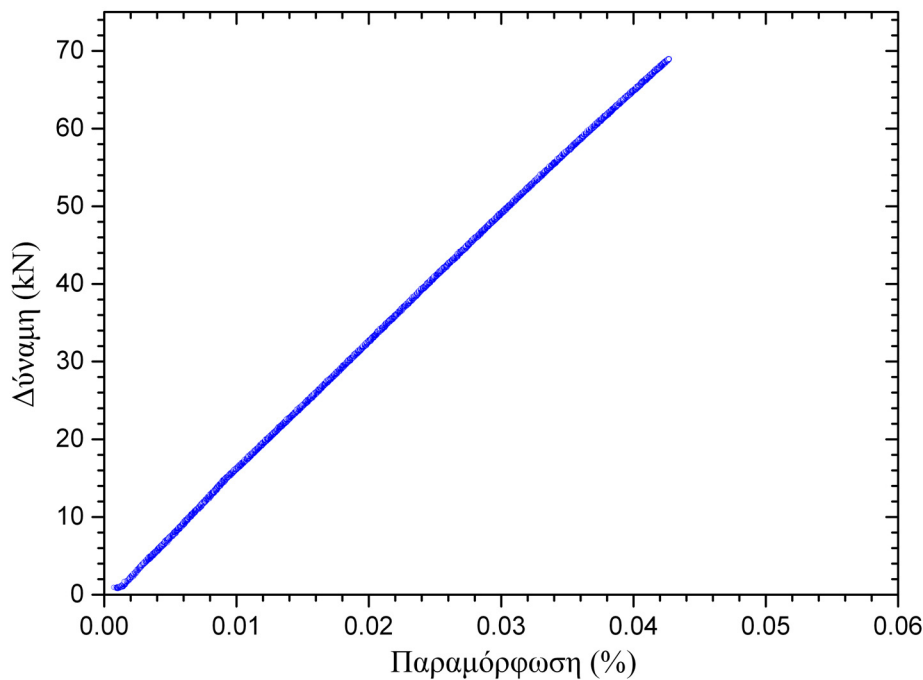
Σχήμα 8.16 Καμπύλη επιμήκυνσης ενός ελάσματος αλουμινίου κατά την εφαρμογή δύναμης εφελκυσμού σε αυτό.

2. Οι καμπύλες τάσης – παραμόρφωσης δύο δοκιμίων ορείχαλκου και πλαστικού απεικονίζονται στο Σχήμα 8.17.
 - (α) Καθορίστε την περιοχή ελαστικής συμπεριφοράς του κάθε υλικού και υπολογίστε από την κλίση της γραμμικής περιοχής, το μέτρο ελαστικότητας του Young (σε MPa).
 - (β) Σημειώστε το όριο διαρροής του κάθε υλικού, τη μέγιστη τάση σ_{max} , καθώς και τα σημεία θραύσης τους.



Σχήμα 8.17 Καμπύλες τάσης – παραμόρφωσης δοκιμίων ορείχαλκου και πλαστικού.

3. Η καμπύλη της εφαρμοζόμενης δύναμης ως προς την παραμόρφωση που υφίσταται ένα κυλινδρικό δοκίμιο από Teflon σε πείραμα μονοαξονικής συμπίεσης (θλίψης), απεικονίζεται στο Σχήμα 8.18. Η διάμετρος του κυλινδρικού δοκιμίου είναι 6.1 cm. Να υπολογίσετε το μέτρο ελαστικότητας του υλικού. Υπολογίστε την επί τοις εκατό διαφορά με τη θεωρητική τιμή (δες Πίνακα 8.9).



Σχήμα 8.18 Καμπύλη δύναμης – παραμόρφωσης κυλινδρικού δοκιμίου Teflon (δεν περιλαμβάνεται όλη η καμπύλη γιατί η δοκιμή έχει σταματήσει λίγο μετά τη γραμμική περιοχή).

Βιβλιογραφία/Αναφορές

Πετρίδης, Β. (1992). *Συστήματα Μετρήσεων*. Αθήνα: University Studio Press.

Χρυσουλάκης, Γ. Δ. και Παντελής, Δ. Ι. (1996). *Επιστήμη και Τεχνολογία των Μεταλλικών Υλικών*. Αθήνα: Εκδόσεις Παπασωτηρίου.

Halliday, D. & Resnick, R. (1976). *Πανεπιστημιακή Φυσική, Μέρος Α*. Αθήνα: Εκδόσεις Πνευματικός.

Σύνδεσμοι στο διαδίκτυο που αναφέρονται εντός του κειμένου

1. http://www.pasco.com/file_downloads/product_manuals/Motion-Sensor-II-Manual-CI-6742A.pdf
2. http://www.pasco.com/prodCatalog/CI/CI-6400_scienceworkshop-500-interface/
3. <http://www.pasco.com/datastudio/>
4. <http://www.pasco.com/prodCompare/force-sensors/index.cfm>
5. http://www.pasco.com/prodCatalog/AP/AP-8216_stress-strain-apparatus-scienceworkshop/index.cfm

Κεφάλαιο 9 – Πειράματα ταλαντώσεων, κυματικής και οπτικής

Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται η μελέτη της απλής αρμονικής κίνησης, καθώς και της ταλάντωσης με απόσβεση, μέσω των πειραμάτων ταλάντωσης ενός συστήματος μάζας-ελατηρίου και του απλού εκκρεμούς. Επίσης, παρουσιάζονται πειράματα κυματικής, όπως ο υπολογισμός της ταχύτητας διάδοσης των ηχητικών κυμάτων με τη μέθοδο των στάσιμων κυμάτων και η συμβολή ηχητικών κυμάτων. Τέλος, παρουσιάζονται πειράματα γεωμετρικής οπτικής με λεπτούς φακούς και η ανάλυση του φωτός με τη χρήση του οπτικού φασματοσκοπίου.

Προαπαιτούμενη γνώση

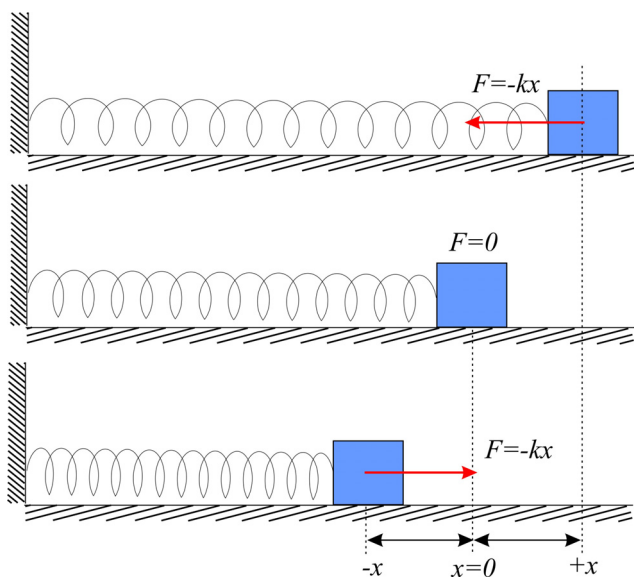
Μετρήσεις θεμελιωδών φυσικών μεγεθών (Κεφ. 4), μέση τιμή και αβεβαιότητα (Κεφ. 3), στοιχεία άλγεβρας και διαφορικού λογισμού.

9.1. Μελέτη απλής αρμονικής ταλάντωσης

9.1.1. Σύντομη ανασκόπηση της θεωρίας

Οποιαδήποτε κίνηση επαναλαμβάνεται σε ίσα χρονικά διαστήματα ονομάζεται περιοδική ή ταλάντωση. Ο χρόνος που απαιτείται για να ολοκληρωθεί μία πλήρης κίνηση ονομάζεται περίοδος, ενώ ο αριθμός των πλήρων κινήσεων στη μονάδα του χρόνου (1 s) ονομάζεται συχνότητα της ταλάντωσης και μετράται σε Hz (κύκλοι/s). Η απλούστερη περιοδική κίνηση που μπορούμε να μελετήσουμε είναι αυτή της απλής αρμονικής κίνησης, όπου η μετατόπιση του σώματος που την εκτελεί, μπορεί να εκφραστεί ως συνάρτηση ημίτονου ή συνημίτονου ως προς το χρόνο (Αλεξόπουλος, 1986α · Halliday & Resnick, 1976).

Ένα σύστημα που μπορεί να εκτελέσει απλή αρμονική κίνηση (ταλάντωση) απεικονίζεται στο Σχήμα 9.1. Σώμα μάζας m , συνδεδεμένο με ελατήριο που μπορεί είτε να τεντώνεται είτε να συσπειρώνεται, κινείται σε λείο (χωρίς τριβές) οριζόντιο επίπεδο, υπό την επίδραση του ελατηρίου. Η κίνηση αυτή χωρίς τριβές θα μπορούσε για παράδειγμα να πραγματοποιηθεί με τη χρήση της αεροτροχιάς (βλ Κεφ. 8.1).



Σχήμα 9.1 Σώμα μάζας m εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο, υπό την επίδραση της δύναμης του ελατηρίου, $F = -kx$.

Στη θέση ισορροπίας το ελατήριο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος και η δύναμη που εξασκείται πάνω στο σώμα είναι μηδέν. Εάν ωστόσο το ελατήριο επιμηκυνθεί (ή συμπιεστεί) κατά x , τότε ασκείται πάνω στο σώμα μία δύναμη που τείνει να το επαναφέρει στη θέση ισορροπίας (δύναμη επαναφοράς). Η δύναμη αυτή δίνεται από το νόμο του Hooke

$$F = -k \cdot x \quad (9.1)$$

όπου k είναι μια σταθερά που ονομάζεται σταθερά δυνάμεως του ελατηρίου και είναι ένα μέτρο της σκληρότητας του ελατηρίου. Το αρνητικό πρόσημο υποδηλώνει ότι η δύναμη είναι πάντα αντίθετη προς τη μετατόπιση του άκρου του ελατηρίου από τη θέση ισορροπίας. Η παραπάνω σχέση αναλογίας μεταξύ δυνάμεως και μετατόπισης ισχύει για μικρές επιμηκύνσεις (ή συμπιέσεις) του ελατηρίου, ώστε να ισχύει η ελαστική συμπεριφορά του ελατηρίου. Εφαρμόζοντας το 2^ο νόμο του Newton στην κίνηση του σώματος μάζας m , θα προκύψει

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow -k \cdot x = m \frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{k}{m}x(t) = 0 \quad (9.2)$$

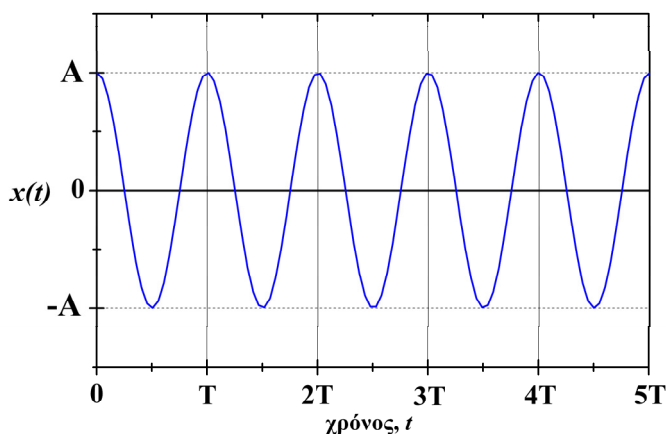
Η τελευταία εξίσωση ονομάζεται διαφορική εξίσωση κίνησης ενός απλού αρμονικού ταλαντωτή και αποδεικνύεται εύκολα με τη μέθοδο της αντικατάστασης ότι έχει ως λύση συναρτήσεις της μορφής

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (9.3)$$

όπου

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (9.4)$$

είναι η κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης. Στη σχέση 9.3, η σταθερά A ονομάζεται πλάτος της ταλάντωσης και είναι η μέγιστη απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας (Σχήμα 9.2), ενώ το φ είναι η αρχική φάση της ταλάντωσης.



Σχήμα 9.2 Γραφική παράσταση της θέσης ενός αρμονικού ταλαντωτή συναρτήσει του χρόνου, $x=x(t)$ για $\varphi=0$.

Αν στη σχέση 9.3 ο χρόνος αυξηθεί κατά $t=2\pi/\omega$, παρατηρούμε ότι η 9.3 δεν αλλάζει μορφή, αφού ισχύει

$$x\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = A\cos\left(\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \varphi\right) = A\cos(\omega t + 2\pi + \varphi) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

Το σώμα δηλαδή έχει εκτελέσει έναν πλήρη κύκλο, και επομένως η περίοδος T της κίνησης ισούται με

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (9.5)$$

Παρατηρούμε ότι η περίοδος κίνησης εξαρτάται μόνο από τα χαρακτηριστικά του ταλαντευόμενου συστήματος, δηλαδή τη μάζα m του σώματος και τη σταθερά k του ελατηρίου και γι αυτό ονομάζεται ιδιο-περίοδος ή φυσική περίοδος ταλάντωσης.

Επειδή η δύναμη του ελατηρίου είναι η μόνη οριζόντια δύναμη που ασκείται στο σώμα και εφόσον οι κάθετες στη διεύθυνση της κίνησης δυνάμεις δεν παράγουν έργο, η μηχανική ενέργεια του συστήματος μάζας – ελατηρίου παραμένει σταθερή. Η μηχανική ενέργεια του συστήματος κάθε χρονική στιγμή ισούται με το άθροισμα της αντίστοιχης κινητικής και δυναμικής ενέργειας του συστήματος, την ίδια χρονική στιγμή. Ισχύει δηλαδή

$$E_{\text{μηχ}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad (9.6)$$

Σε κάθε απλή αρμονική ταλάντωση έχουμε συνεχή εναλλαγή κινητικής και δυναμικής ενέργειας με τέτοιο τρόπο ώστε το άθροισμά τους, δηλαδή η μηχανική ενέργεια, να παραμένει συνεχώς σταθερή. Όταν το σώμα βρίσκεται στη θέση μέγιστης απομάκρυνσης $x = A$, στο σημείο αυτό η ταχύτητα είναι μηδέν (το σώμα στιγμιαία ακινητεί) οπότε η μηχανική ενέργεια $E_{\text{μηχ}}$ θα ισούται με

$$E_{\text{μηχ}} = \frac{1}{2}kA^2 \quad (9.7)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις 9.6 και 9.7 έχουμε την τελική έκφραση για τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας στο σύστημα ελατηρίου-μάζας

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \quad (9.8)$$

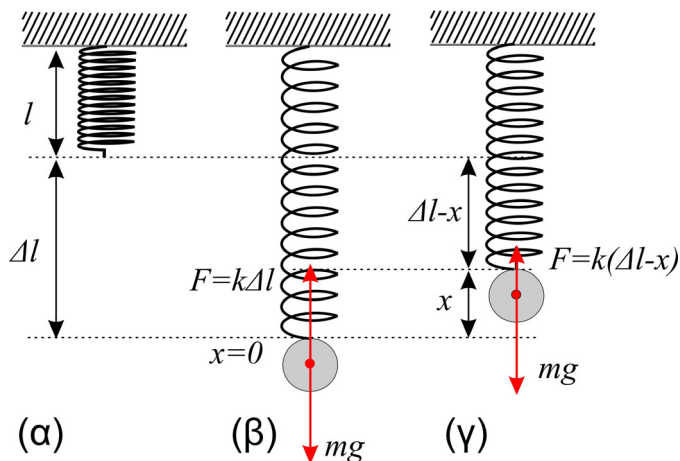
9.1.2. Σκοπός του πειράματος

Σκοπός του πειράματος είναι ο υπολογισμός της σταθεράς ελατηρίου k σε έναν απλό αρμονικό ταλαντωτή που ταλαντώνεται σε κατακόρυφο επίπεδο, καθώς επίσης και η επαλήθευση της αρχής διατήρησης της μηχανικής ενέργειας του ταλαντευόμενου συστήματος (Καμαράτος, 2002).

Η κατακόρυφη απλή αρμονική κίνηση δε διαφέρει ουσιαστικά από αυτή που έχει ήδη αναφερθεί. Σώμα μάζας m αναρτημένο από ελατήριο φυσικού μήκους l και σταθεράς k , ισορροπεί στη θέση $x = 0$, έχοντας επιμηκύνει το ελατήριο κατά μήκος Δl (Σχήμα 9.3β). Στη θέση αυτή, η ισορροπία του σώματος επιβάλλει ότι η συνισταμένη των δυνάμεων είναι μηδέν, δηλαδή $k\Delta l = mg$. Σε τυχαία απόσταση x πάνω από τη θέση ισορροπίας, η δύναμη που ασκεί το ελατήριο στο σώμα θα είναι $k(\Delta l - x)$, οπότε η ολική δύναμη πάνω στο σώμα θα είναι

$$F = k(\Delta l - x) - mg = -kx \quad (9.9)$$

Η δύναμη επαναφοράς επομένως είναι ίδια με αυτή της ταλάντωσης ενός σώματος σε οριζόντιο επίπεδο, οπότε και η περίοδος της ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση 9.5.



Σχήμα 9.3 Ελατήριο φυσικού μήκους l (α) επιμηκύνεται κατά Δl υπό την επίδραση του βάρους mg του αναρτημένου σώματος (β). Για εκτροπή του σώματος κατά x από τη θέση ισορροπίας (γ), η δύναμη επαναφοράς θα ισούται με $F = -kx$, όπως και στην περίπτωση ταλάντωσης σε οριζόντιο επίπεδο.

Η σχέση 9.5 ωστόσο ισχύει στην περίπτωση ελατηρίου με μηδενική μάζα. Στην πραγματικότητα βέβαια κάθε ελατήριο έχει μη μηδενική μάζα που επηρεάζει την περίοδο ταλάντωσης (Ζαχαριουδάκης, 2002 · Σιδεράς, 1995). Στην περίπτωση αυτή, αποδεικνύεται ότι η σχέση 9.5 τροποποιείται ως εξής

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m + \frac{m_\epsilon}{3}}{k}} \quad (9.10)$$

όπου m_ϵ είναι η μάζα του ελατηρίου. Υψώνοντας την προηγούμενη σχέση στο τετράγωνο και λύνοντας ως προς T^2 θα έχουμε τελικά

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k} m + \frac{4\pi^2 m_\epsilon}{3k} \quad (9.11)$$

Επομένως, η γραφική παράσταση $T^2 = f(m)$ της παραπάνω σχέσης θα είναι ευθεία της μορφής

$$T^2 = a \cdot m + \beta$$

με κλίση

$$a = \frac{4\pi^2}{k} \quad (9.12)$$

και τεταγμένη

$$\beta = \frac{4\pi^2 m_\epsilon}{3k} \quad (9.13)$$

Μετρώντας επομένως για διαφορετικές τιμές της μάζας m την αντίστοιχη περίοδο ταλάντωσης T και σχεδιάζοντας τη γραφική παράσταση $T^2 = f(m)$, μπορούμε από την κλίση της ευθείας να υπολογίσουμε εύκολα τη σταθερά δυνάμεως k του ελατηρίου.

9.1.3. Πειραματικό μέρος

9.1.3.1. Χρησιμοποιούμενα όργανα

1. Ηχητικός πομποδέκτης για την καταγραφή της θέσης της ταλαντευόμενης μάζας (Σύνδεσμος 1, Βιβλιογραφία).
2. Ελατήριο αναρτημένο κατακόρυφα από σταθερό σημείο.
3. Διάφορες μάζες που στο κάτω μέρος τους φέρουν δίσκο για την ανίχνευση από τον ηχητικό πομποδέκτη και την απόσβεση των ταλαντώσεών τους.
4. Ζυγός ακριβείας για τη ζύγιση των μαζών, ακρίβειας 0.1 g.
5. Ηλεκτρονικός υπολογιστής με κατάλληλο λογισμικό (Data Studio) για την καταγραφή, επεξεργασία και αποθήκευση των δεδομένων (Σύνδεσμοι 2-3, Βιβλιογραφία).

Η πειραματική διάταξη για τη μελέτη της απλής αρμονικής ταλάντωσης απεικονίζεται στο Σχήμα 9.4.



Σχήμα 9.4 Πειραματική διάταξη για τη μελέτη της απλής αρμονικής ταλάντωσης του συστήματος ελατηρίου-μάζας.

9.1.3.2 Μετρήσεις

1^ο Πείραμα

1. Θέστε σε λειτουργία τον υπολογιστή και βεβαιωθείτε ότι ο διακόπτης στο πίσω μέρος του datalogger 500 Interface, στο οποίο συνδέεται ο ηχητικός πομποδέκτης, είναι στη θέση ON. Στην επιφάνεια εργασίας διπλασιάστε με το ποντίκι στο εικονίδιο Harmonic_Oscillation_1.
2. Μετά την έναρξη του προγράμματος συλλογής και ανάλυσης δεδομένων (DataStudio), θα εμφανιστεί στην οθόνη ένα παράθυρο που απεικονίζει τη γραφική παράσταση της απόστασης της αναρτημένης από το ελατήριο μάζας από τον ηχητικό πομποδέκτη, συναρτήσει του χρόνου, $x = f(t)$.

3. Επιλέξτε μία από τις διαθέσιμες μάζες και αφού τη ζυγίσετε, καταχωρήστε τη μετρούμενη τιμή της στον Πίνακα Μετρήσεων 9.1.
4. Αναρτήστε τη μάζα από την άκρη του ελατηρίου και φέρτε τη προσεκτικά στη θέση ισορροπίας της. Βεβαιωθείτε ότι ο ηχητικός πομποδέκτης βρίσκεται ακριβώς κάτω από την αναρτημένη μάζα και ότι τίποτε δεν παρεμβάλλεται μεταξύ τους. ΠΡΟΣΟΧΗ: αφού αναρτήσετε κάθε μάζα από το ελατήριο, να μην την αφήνετε να πέσει γιατί ενδέχεται να χτυπήσει τον ηχητικό πομποδέκτη που βρίσκεται κάτω από αυτή και να τον καταστρέψει.
5. Εκτρέψτε τη μάζα 10-15 cm από τη θέση ισορροπίας της (είτε προς τα πάνω είτε προς τα κάτω), ώστε αυτή να αρχίσει να ταλαντώνεται και πατήστε στη συνέχεια το εικονίδιο με την ένδειξη START. Στην οθόνη του υπολογιστή θα παρατηρήσετε τη μεταβολή της απόστασης του κάτω άκρου της μάζας από τον ηχητικό πομποδέκτη, συναρτήσει του χρόνου. Δικαιολογήστε βάσει της θεωρίας τη μορφή της προκύπτουσας καμπύλης.
6. Αφού καταγράψετε την κίνηση της ταλαντευόμενης μάζας για διάστημα μερικών δευτερολέπτων, πατήστε στη συνέχεια το εικονίδιο με την ένδειξη STOP. Σε περίπτωση που η καμπύλη που κατέγραψε ο υπολογιστής δεν είναι ομαλή ή παρουσιάζει απότομες μεταβολές και σημεία εκτός αυτής, επαναλάβετε τη διαδικασία της μέτρησης.
7. Προκειμένου να μετρήσετε την περίοδο ταλάντωσης της μάζας, μετακινηθείτε στο παράθυρο του γραφήματος, επιλέξτε το εικονίδιο SMART TOOL και μετακινήστε το εμφανιζόμενο σταυρόνημα πάνω στα σημεία της καταγεγραμμένης καμπύλης. Με τον τρόπο αυτό εμφανίζονται οι τιμές του χρόνου και οι αντίστοιχες αποστάσεις του σώματος από τον ηχητικό πομποδέκτη. Μετακινώντας το ποντίκι πάνω στις κλίμακες του γραφήματος και κρατώντας πατημένο το αριστερό του πλήκτρο, έχετε τη δυνατότητα να μεγεθύνεται το κομμάτι της γραφικής παράστασης που σας ενδιαφέρει, ώστε η καμπύλη να φαίνεται με μεγαλύτερη λεπτομέρεια. Μετακινηθείτε στις χρονικές στιγμές που αντιστοιχούν σε δύο διαδοχικές κορυφές της καμπύλης και καταγράψτε τις αντίστοιχες χρονικές τιμές t_1 και t_2 στον Πίνακα μετρήσεων 9.1.
8. Επαναλάβετε τα βήματα 3 έως 7 για όλες τις μάζες που έχετε στη διάθεσή σας, καταχωρώντας τις μετρήσεις σας στις υπόλοιπες γραμμές του Πίνακα μετρήσεων 9.1.
9. Υπολογίστε την περίοδο ταλάντωσης T για κάθε μία μάζα, καθώς και το τετράγωνο της T^2 και καταχωρείστε τα στις δύο τελευταίες στήλες του Πίνακα 9.1.
10. Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση $T^2 = f(m)$ σε χιλιοστομετρικό χαρτί. Από την κλίση της ευθείας που προκύπτει, υπολογίστε μέσω της 9.12 τη σταθερά δυνάμεως του ελατηρίου.
11. Βρείτε από τη γραφική παράσταση την τεταγμένη της ευθείας που χαράξατε και στη συνέχεια υπολογίστε από τη σχέση 9.13 τη μάζα m_s του ελατηρίου. Συγκρίνετε την τιμή που βρήκατε με την πραγματική τιμή της μάζας ($m = 50$ gr), υπολογίζοντας την επί τοις εκατό διαφορά των δύο τιμών.
12. Υπολογίστε εκ νέου την κλίση α και την τεταγμένη β με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Χαράξτε την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων $T^2 = \alpha m + \beta$ στην ίδια γραφική παράσταση.

a/a	m (g)	t ₁ (s)	t ₂ (s)	T = t ₂ - t ₁ (s)	T ² (s ²)
1					
2					
3					
4					
5					

Πίνακας 9.1 Πίνακας μετρήσεων της περιόδου ταλάντωσης T συναρτήσει της μάζας m .

2° Πείραμα

13. Για την επαλήθευση της αρχής διατήρησης της μηχανικής ενέργειας του αρμονικού ταλαντωτή επιλέξτε μία από τις μάζες που χρησιμοποιήσατε προηγουμένως.
14. Στην επιφάνεια εργασίας διπλοπατήστε με το ποντίκι στο εικονίδιο Harmonic_Oscillation_2. Στην οθόνη του υπολογιστή θα εμφανιστούν οι γραφικές παραστάσεις τόσο της απόστασης $x(t)$ όσο και της ταχύτητας $v(t)$ του σώματος, συναρτήσει του χρόνου κίνησής του.
15. Μετρήστε από τη γραφική παράσταση το πλάτος ταλάντωσης A , δηλαδή το μισό της απόστασης μεταξύ ενός μεγίστου x_{\max} και του επόμενου ελαχίστου x_{\min} της καμπύλης

$$A = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2} = \dots \dots \dots m$$

16. Επιλέξτε στη συνέχεια ένα τυχαίο σημείο της καμπύλης $x(t)$ (όχι μέγιστο, ελάχιστο ή σημείο που να αντιστοιχεί σε μηδενική ταχύτητα) και καταγράψτε τη θέση x' και την αντίστοιχη ταχύτητα, εκείνη τη χρονική στιγμή

$$x' = \dots \dots \dots m$$

$$v = \dots \dots \dots m/s$$

17. Η πραγματική απόσταση x του σώματος από τη θέση ισορροπίας ($x=0$) θα είναι τότε:

$$x = x' - x_{\min} - A$$

όπου A το πλάτος ταλάντωσης που μετρήσατε προηγουμένως.

18. Υπολογίστε την ολική ενέργεια $E_{ολ}$ του ταλαντωτή

$$E_{ολ} = \frac{1}{2}kA^2 = \dots \dots \dots J$$

καθώς και την κινητική $E_{κιν}$ και δυναμική ενέργεια $E_{δυν}$ του σώματος στο σημείο που επιλέξατε προηγουμένως. Για τους υπολογισμούς, χρησιμοποιήστε την τιμή του k που υπολογίσατε στο βήμα 12 με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων.

$$E_{κιν} = \dots \dots \dots J$$

$$E_{δυν} = \dots \dots \dots J$$

Επαληθεύεται η αρχή διατήρησης της ενέργειας όπως δίνεται από τη σχέση 9.8;

9.1.4. Ερωτήσεις

1. Διπλασιάζοντας το πλάτος ταλάντωσης A πως θα μεταβληθεί η περίοδος ταλάντωσης T και η ολική ενέργεια $E_{ολ}$ του ταλαντωτή;
2. Πόσο θα αλλάξει η περίοδος ταλάντωσης T αν διπλασιαστούν η μάζα του σώματος και η μάζα του ελατηρίου, ενώ η σταθερά k παραμείνει η ίδια;
3. Τι αλλαγές μπορείτε να κάνετε ώστε να τριπλασιάσετε την περίοδο ταλάντωσης ενός συστήματος μάζας-ελατηρίου;
4. Που νομίζεται ότι υπεισέρχονται σφάλματα στην επαλήθευση της αρχής διατήρησης της μηχανικής ενέργειας στο 2^ο πείραμα;

9.2. Εφαρμογή της Αρμονικής Κίνησης στο Απλό Εκκρεμές

9.2.1. Σύντομη ανασκόπηση της θεωρίας

Το απλό ή μαθηματικό εκκρεμές είναι ένα ιδανικό σύστημα αποτελούμενο από μια σημειακή μάζα αναρτημένη με ένα μη εκτατό και αβαρές νήμα από σταθερό σημείο (Halliday & Resnick, 1976). Όταν η μάζα εκτραπεί από τη θέση ισορροπίας της και αφεθεί ελεύθερη, αρχίζει να αιωρείται σε κατακόρυφο επίπεδο υπό την επίδραση της βαρύτητας. Θα δείξουμε ότι η κίνηση που εκτελεί η μάζα, για μικρές γωνίες εκτροπής, είναι απλή αρμονική ταλάντωση.

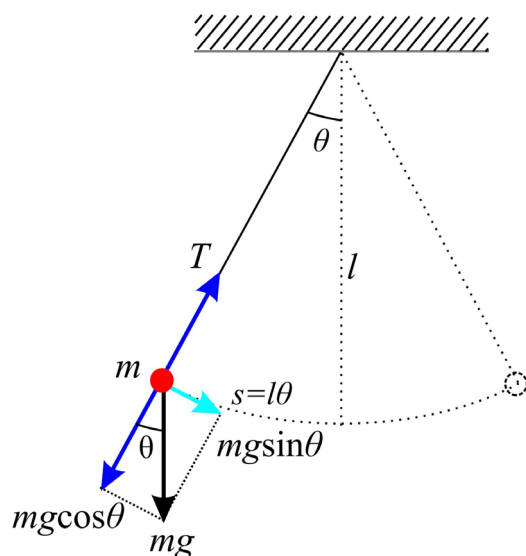
Στο Σχήμα 9.5 απεικονίζεται σχηματικά ένα απλό εκκρεμές μαζί με τις δυνάμεις που ασκούνται στη μάζα m , όταν αυτή έχει εκτραπεί κατά γωνία θ από τη θέση ισορροπίας της. Οι δυνάμεις που δρουν πάνω στη μάζα είναι η δύναμη της βαρύτητας mg και η τάση του νήματος T . Η συνιστώσα του βάρους που εφάπτεται στην κυκλική τροχιά της μάζας είναι η δύναμη επαναφοράς F που δρα πάνω σε αυτή, τείνοντας να την επαναφέρει στη θέση ισορροπίας της και ισούται με

$$F = -mg\sin\theta \quad (9.14)$$

Παρατηρούμε ότι η δύναμη επαναφοράς δεν είναι ανάλογη της γραμμικής μετατόπισης x και κατ' επέκταση της γωνιακής μετατόπισης θ (αφού ισχύει $x = l\theta$), αλλά είναι ανάλογη του ημιτόνου $\sin\theta$. Δεν πληρούται επομένως το κριτήριο για την απλή αρμονική κίνηση. Για μικρές ωστόσο γωνίες εκτροπής θ , το $\sin\theta$ είναι με πολύ καλή προσέγγιση ίσο προς τη γωνία θ σε ακτίνια (radians). Για παράδειγμα, για $\theta = 15^\circ = 0.2618 \text{ rad}$ το $\sin\theta (=0.2588)$ διαφέρει $\approx 1\%$ από τη γωνία θ . Η σχέση 9.14 επομένως μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$F = -mg\theta = -mg\frac{x}{l} = -\frac{mg}{l}x \quad (9.15)$$

όπου $x = l\theta$ είναι το μήκος τόξου που διαγράφει η κινούμενη μάζα m . Η δύναμη επαναφοράς επομένως είναι ανάλογη προς την απομάκρυνση x και έχει φορά αντίθετη από αυτή. Η απομάκρυνση x μετράται από την κατακόρυφη θέση ισορροπίας της μάζας, όπου $x=0$. Η παραπάνω σχέση 9.15 είναι ανάλογη της σχέσης $F = -kx$ που εκφράζει τη δύναμη επαναφοράς ενός σώματος μάζας m το οποίο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, υπό την επίδραση ελατηρίου σταθεράς k με περίοδο κίνησης $T = 2\pi\sqrt{m/k}$. Αντικαθιστώντας στην τελευταία σχέση τη σταθερά k με mg/l , προκύπτει ότι η περίοδος του απλού εκκρεμούς, για μικρά πλάτη ταλάντωσης, ισούται με



Σχήμα 9.5 Απλό εκκρεμές και οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω του.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{mg/l}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (9.16)$$

Παρατηρούμε ότι η περίοδος T είναι ανεξάρτητη της μάζας του σώματος και εξαρτάται μόνον από το μήκος l του εκκρεμούς. Το απλό εκκρεμές πέρα από το γεγονός ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μελέτη της απλής αρμονικής ταλάντωσης, μας δίνει μία εύκολη μέθοδο για τον υπολογισμό της επιτάχυνσης της βαρύτητας g . Μετρώντας το μήκος l του εκκρεμούς και την αντίστοιχη περίοδο ταλάντωσης T , μπορούμε εύκολα από τη σχέση 9.16 να υπολογίσουμε την επιτάχυνση g της βαρύτητας.

9.2.2. Σκοπός του πειράματος

Σκοπός του πειράματος είναι ο πειραματικός προσδιορισμός της επιτάχυνσης της βαρύτητας με τη μέθοδο του εκκρεμούς (Παπαγεωργόπουλος, 1998). Το απλό εκκρεμές ωστόσο είναι ένα ιδανικό σύστημα, όπου το νήμα θεωρείται μη εκτατό και αβαρές και η μάζα συγκεντρωμένη σε ένα σημείο στην άκρη του νήματος. Στην πράξη, οι προϋποθέσεις αυτές δεν ικανοποιούνται. Η σημειακή μάζα προσεγγίζεται με μια σχετικά μικρή ομογενή μεταλλική σφαίρα. Επειδή το νήμα όμως δεν είναι αβαρές, το κέντρο μάζας του εκκρεμούς δε συμπίπτει με το γεωμετρικό κέντρο της σφαίρας. Στην περίπτωση αυτή, το μήκος l δεν είναι ίσο με την απόσταση του σημείου στήριξης από το κέντρο μάζας της σφαίρας. Έτσι, η θέση του κέντρου μάζας δεν είναι απολύτως γνωστή, με αποτέλεσμα η μέτρηση του μήκους l να γίνεται με ένα σχετικό σφάλμα. Η παραπάνω δυσκολία παρακάμπτεται με την ακόλουθη τροποποίηση.

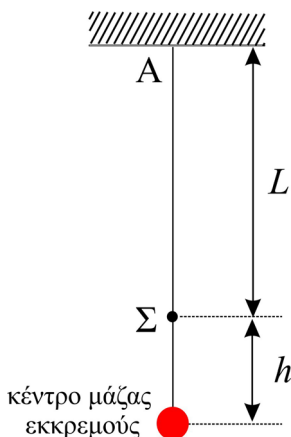
Θεωρούμε ένα σταθερό σημείο Σ πάνω στο νήμα το οποίο απέχει απόσταση h από το άγνωστο κέντρο μάζας του εκκρεμούς. Αν L είναι η απόσταση του σημείου Σ από το σημείο ανάρτησης A , τότε το ολικό μήκος του νήματος θα ισούται με $l = L + h$. Η σχέση 9.16 θα τροποποιηθεί τότε ως ακολούθως

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L+h}{g}} \quad (9.17)$$

Υψώνοντας τη σχέση 9.17 στο τετράγωνο και λύνοντας ως προς L , προκύπτει

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} (L+h) \Rightarrow \frac{g}{4\pi^2} T^2 = L+h \Rightarrow$$

$$L = \frac{g}{4\pi^2} T^2 - h \quad (9.18)$$



Σχήμα 9.6 Σχηματική απεικόνιση απλού εκκρεμούς με τον κόμπο στο σημείο Σ .

Η γραφική παράσταση $L = f(T^2)$ της σχέσης 9.18 θα είναι ευθεία της μορφής $Y = \kappa \cdot X + \beta$

Η κλίση της ευθείας, δηλαδή ο συντελεστής της μεταβλητής $X (= T^2)$ θα ισούται με

$$\kappa = \frac{g}{4\pi^2}$$

απ' όπου προκύπτει ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας θα είναι

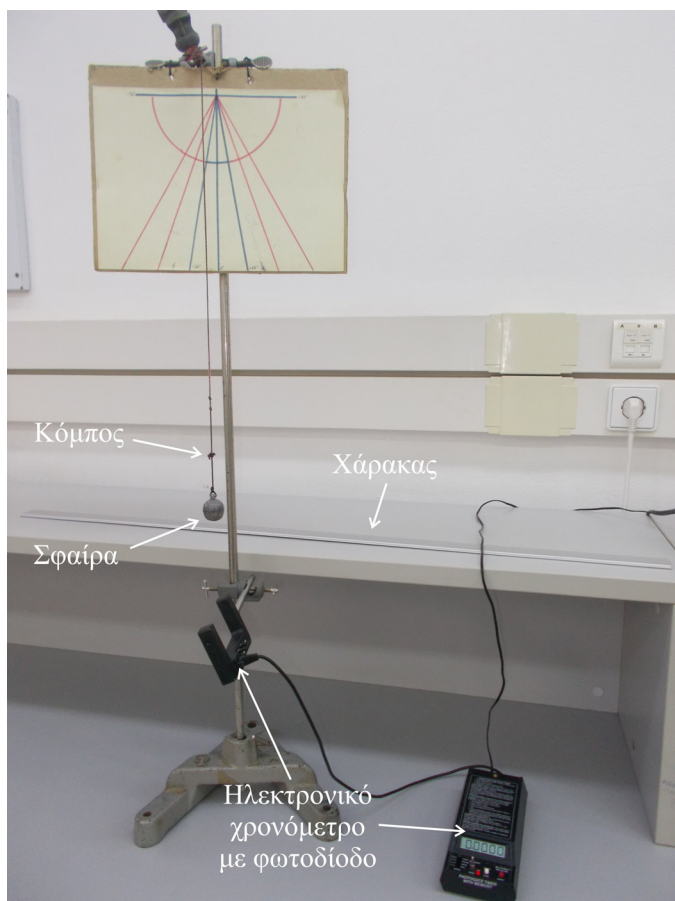
$$g = 4\pi^2 \kappa \quad (9.19)$$

9.2.3. Πειραματικό μέρος

9.2.3.1. Χρησιμοποιούμενα όργανα

1. Μεταλλική σφαίρα αναρτημένη με νήμα από σταθερό σημείο.
2. Χρονόμετρο χειρός ακρίβειας 0.01 s ή ηλεκτρονικό χρονόμετρο με φωτοδίοδο ακρίβειας 0.1 ms, για τη μέτρηση της περιόδου ταλάντωσης.
3. Χάρακας μήκους 1 m και ακρίβειας 1 mm για τη μέτρηση του μήκους του νήματος.

Η πειραματική διάταξη απεικονίζεται στο Σχήμα 9.7.



Σχήμα 9.7 Απεικόνιση της πειραματικής διάταξης του απλού εκκρεμούς.

9.2.3.2. Μετρήσεις

1. Επειδή το εκκρεμές, όπως προαναφέρθηκε, δεν είναι ιδανικό και η απόσταση l μεταξύ του σημείου ανάρτησης και του κέντρου μάζας δε μπορεί να μετρηθεί ακριβώς, έχουμε θεωρήσει ως σταθερό σημείο πάνω στο νήμα έναν κόμπο. Τυλίξτε το νήμα ώστε η απόσταση μεταξύ κόμπου και σημείου ανάρτησης, μετρημένη με το χάρακα, να είναι περίπου 10 cm.
2. Για τη μέτρηση της περιόδου ταλάντωσης της σφαίρας μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ένα χρονόμετρο χειρός. Στην περίπτωση αυτή, αφού εκτρέψετε τη σφαίρα από τη θέση ισορροπίας κατά μικρή γωνία ($\theta < 15^\circ$) θα πρέπει να μετρήσετε το χρόνο 10 πλήρων αιωρήσεων (γιατί;). Εναλλακτικά, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το ηλεκτρονικό χρονόμετρο του εργαστηρίου που η έναρξη και η λήξη της χρονομέτρησης ενεργοποιείται αυτόματα με τη χρήση φωτοδιόδου, όταν η δέσμη φωτός διακόπτεται από τη διέλευση της κινούμενης σφαίρας. Αφού δοκιμάσετε τη μέτρηση της περιόδου και με τους δύο παραπάνω τρόπους, αποφασίστε (αιτιολογημένα) με ποιον τρόπο θα ολοκληρώσετε το πείραμά σας.
3. Σε κάθε περίπτωση, για μικρή γωνία εκτροπής της σφαίρας από τη θέση ισορροπίας ($\theta < 15^\circ$), μετρήστε την περίοδο T της ταλάντωσης και καταχωρήστε τις μετρήσεις στον Πίνακα μετρήσεων 9.2.
4. Ξετυλίξτε το νήμα περίπου 5 cm και επαναλάβετε την παραπάνω μέτρηση. Πάρτε άλλες 10 μετρήσεις, ξετυλίγοντας κάθε φορά περίπου 5 cm το νήμα και καταχωρίστε τα αποτελέσματα στον πίνακα. **ΠΡΟΣΟΧΗ:** Στον πίνακα μετρήσεων σημειώνονται οι ακριβείς τιμές της απόστασης, όπως αυτές μετρούνται με το χάρακα.
5. Μετρήστε την απόσταση του κόμπου από το άγνωστο κέντρο μάζας του εκκρεμούς, εκτιμώντας τη θέση του.
 $h = \dots \dots \dots \text{ cm}$
6. Υπολογίστε το τετράγωνο της περιόδου T και καταχωρήστε τα αποτελέσματα στην τελευταία στήλη του Πίνακα μετρήσεων 9.2.

a/a	L (cm)	T (s)	T^2 (s ²)
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			

Πίνακας 9.2 Πίνακας μετρήσεων της περιόδου ταλάντωσης T συναρτήσει του μήκους του εκκρεμούς L .

7. Χαράξτε σε χιλιοστομετρικό χαρτί τη γραφική παράσταση $L = f(T)$. Τι παρατηρείτε αναφορικά με τη μορφή που έχει;
8. Χαράξτε σε χιλιοστομετρικό χαρτί τη γραφική παράσταση $L = f(T^2)$. Δικαιολογείται η γραμμική μορφή βάσει της θεωρίας;
9. Υπολογίστε την κλίση της ευθείας κ και στη συνέχεια από τη σχέση 9.19 την επιτάχυνση της βαρύτητας. Ποια η επί τοις εκατό διαφορά της από τη θεωρητική τιμή, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$;
10. Η τεταγμένη επί την αρχή της ευθείας που χαράξατε στο βήμα 8 ισούται με την άγνωστη απόσταση h , σύμφωνα με τη σχέση 9.18. Συμφωνεί η τιμή αυτή που βρήκατε από τη γραφική παράσταση με αυτή που μετρήσατε κατ' εκτίμηση στο βήμα 5;
11. Υπολογίστε την κλίση και την τεταγμένη της ευθείας με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Ποιες οι αντίστοιχες τιμές του g και του h που προκύπτουν αυτή τη φορά; Ποια από τις δύο μεθόδους υπολογισμού δίνει καλύτερα αποτελέσματα;

9.2.4. Ερωτήσεις – Ασκήσεις

1. Για τον υπολογισμό της περιόδου T του εκκρεμούς, για ποιο λόγο μετρήσατε το χρονικό διάστημα 10 περιόδων ταλάντωσης και δεν αρκεστήκατε στη μέτρηση μιας μόνο πλήρους ταλάντωσης;
2. Αν χρησιμοποιούσατε σφαίρα διπλάσιας μάζας, τι πιστεύετε ότι θα άλλαζε στα αποτελέσματά σας;
3. Στη σελήνη, το εκκρεμές θα ταλαντωνόταν πιο γρήγορα ή πιο αργά και γιατί;
4. Υπολογίστε την ημιπερίοδο ταλάντωσης εκκρεμούς μήκους 1 m. Σχολιάστε το αποτέλεσμα.

9.3. Μελέτη ταλάντωσης με απόσβεση

9.3.1. Συνοπτική ανασκόπηση της θεωρίας

Στη μελέτη του απλού αρμονικού ταλαντωτή στην παράγραφο 9.1, υποθέσαμε ότι η μόνη επιδρώσα δύναμη πάνω στη μάζα είναι η δύναμη επαναφοράς του ελατηρίου. Ως αποτέλεσμα, το σύστημα μάζας-ελατηρίου θα ταλαντώνεται επ' άπειρον και αυτή η κίνηση περιγράφεται από τη σχέση 9.3. Στην πράξη όμως, πάντα υπάρχουν δυνάμεις τριβών που δυσχεραίνουν την κίνηση και το πλάτος βαθμιαία φθίνει και τελικά μηδενίζεται. Η κίνηση αυτή ονομάζεται φθίνουσα αρμονική κίνηση ή φθίνουσα ταλάντωση (Halliday & Resnick, 1976). Σε πολλές περιπτώσεις, η δύναμη τριβής που αντιτίθεται της κίνησης είναι ανάλογη της ταχύτητας του ταλαντευόμενου σώματος, όπως συμβαίνει στην περίπτωση της κίνησης ενός σώματος στο οποίο επιδρά η αντίσταση του αέρα (νόμος του Stokes). Εφαρμόζοντας το 2^ο νόμο του Newton στην κίνηση ενός σώματος μάζας m στο οποίο επιδρά πέρα από τη δύναμη επαναφοράς του ελατηρίου και η δύναμη της τριβής, η οποία είναι ανάλογη της ταχύτητας του σώματος, έχουμε

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow -k \cdot x - bv = m \frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{k}{m} x(t) = 0 \quad (9.20)$$

όπου το b είναι γνωστό ως σταθερά απόσβεσης. Η παραπάνω διαφορική εξίσωση περιγράφει την κίνηση ενός αρμονικού ταλαντωτή με απόσβεση και η λύση της εξαρτάται από τη σχέση που έχουν μεταξύ τους οι παράμετροι b , m και $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Στην περίπτωση που η απόσβεση είναι μικρή (υποκρίσιμη απόσβεση, $b/2m < \omega_0$), δηλαδή οι δυνάμεις τριβών είναι μικρές, η λύση της διαφορικής εξίσωσης 9.20 δίνεται από την ακόλουθη συνάρτηση

$$x(t) = A_0 e^{-\frac{bt}{2m}} \cos(\omega' t + \varphi) \quad (9.21)$$

όπου A_0 είναι η αρχική (μέγιστη) απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας και ω' η κυκλική συχνότητα ταλάντωσης η οποία δίνεται από τη σχέση

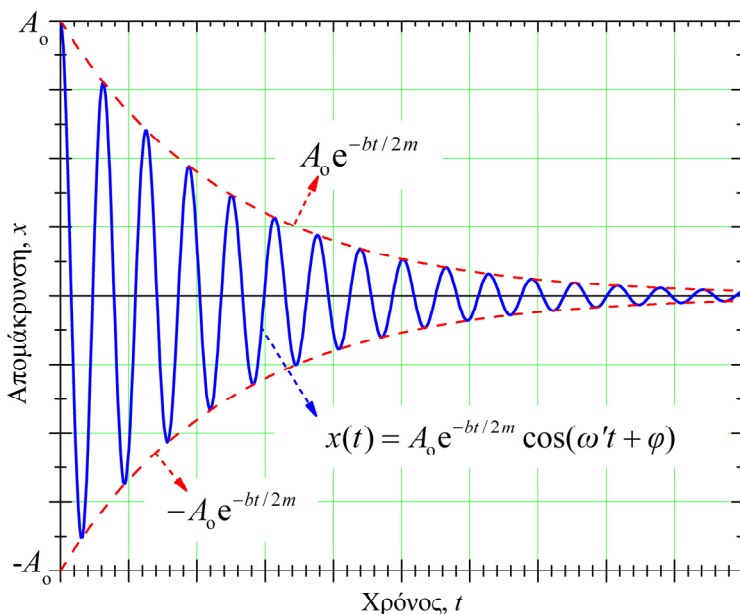
$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \quad (9.22)$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης 9.21 απεικονίζεται στο Σχήμα 9.8. Η μεταβολή της απομάκρυνσης του σώματος που εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση είναι μία αρμονική συνάρτηση ως προς το χρόνο, λόγω του όρου $\cos(\omega' t + \varphi)$, της οποίας ωστόσο το πλάτος $A(t)$ ελαττώνεται εκθετικά ως προς το χρόνο, $A(t) = A_0 e^{-\frac{bt}{2m}}$.

Παρατηρούμε ότι η κυκλική συχνότητα ω' της φθίνουσας ταλάντωσης είναι μικρότερη από τη συχνότητα της αμείωτης ταλάντωσης $\omega_0 (= \sqrt{k/m})$, δηλαδή της απλής αρμονικής ταλάντωσης. Αυτό είναι λογικό, γιατί η ύπαρξη των τριβών καθυστερεί την κίνηση, επομένως η περίοδος ταλάντωσης T' γίνεται μεγαλύτερη και άρα η συχνότητα μικρότερη (αφού $f' = 1/T'$), χωρίς ωστόσο αυτή να αλλάζει κατά τη διάρκεια της κίνησης.

Σε εκθετικά μεταβαλλόμενα μεγέθη, ορίζεται ο μέσος χρόνος ζωής τ , ο οποίος μας δείχνει πόσο γρήγορα (ή αργά) φθίνει το μέγεθος αυτό. Ο μέσος χρόνος ζωής ορίζεται ως το χρονικό διάστημα στο οποίο το πλάτος πέφτει στο $1/e$ της αρχικής του τιμής. Θα ισχύει επομένως στην περίπτωση της φθίνουσας ταλάντωσης

$$A(t = \tau) = \frac{1}{e} A_0 \Rightarrow A_0 e^{-\frac{b\tau}{2m}} = \frac{1}{e} A_0 \Rightarrow e^{-\frac{b\tau}{2m}} = e^{-1} \Rightarrow -\frac{b\tau}{2m} = -1 \Rightarrow$$



Σχήμα 9.8 Γραφική παράσταση της απομάκρυνσης x από τη θέση ισορροπίας συναρτήσει του χρόνου t ενός ταλαντωτή με απόσβεση.

$$\tau = \frac{2m}{b} \quad (9.23)$$

Η ταχύτητα του σώματος που εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση μπορεί να υπολογιστεί από την 1^η παράγωγο ως προς το χρόνο της απομάκρυνσης $x(t)$ (σχέση 9.21). Προκύπτει

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(A_0 e^{-\frac{bt}{2m}} \cos(\omega't + \varphi) \right) = A_0 \left\{ e^{-\frac{bt}{2m}} \frac{d}{dt} [\cos(\omega't + \varphi)] + \cos(\omega't + \varphi) \frac{d}{dt} \left(e^{-\frac{bt}{2m}} \right) \right\} \Rightarrow$$

$$v(t) = -A_0 e^{-\frac{bt}{2m}} \left\{ \omega' \sin(\omega't + \varphi) + \frac{b}{2m} \cos(\omega't + \varphi) \right\} \quad (9.24)$$

Η μηχανική ενέργεια του συστήματος, $E_{μηχ} = E_{κιν} + E_{δυν}$ θα ελαττώνεται λόγω απωλειών από τις τριβές και τελικά θα μηδενιστεί. Η κινητική και η δυναμική ενέργεια θα εκφράζονται από τις παρακάτω σχέσεις

$$E_{κιν} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m A_0^2 e^{-\frac{bt}{m}} \left\{ \omega' \sin(\omega't + \varphi) + \frac{b}{2m} \cos(\omega't + \varphi) \right\}^2 \quad (9.25)$$

$$E_{δυν} = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k \left\{ A_0 e^{-\frac{bt}{2m}} \cos(\omega't + \varphi) \right\}^2 = \frac{1}{2} m \omega_o^2 A_0^2 e^{-\frac{bt}{m}} \cos^2(\omega't + \varphi) \quad (9.26)$$

9.3.2. Σκοπός του πειράματος

Σκοπός του πειράματος είναι η καταγραφή μίας φθίνουσας ταλάντωσης που εκτελεί ένα σύστημα ελατηρίου-μάζας, προκειμένου να υπολογιστεί η σταθερά απόσβεσης b καθώς και ο μέσος χρόνος ζωής, τα οποία είναι χαρακτηριστικά του συστήματος ταλάντωσης και της κίνησης που αυτό εκτελεί. Η φθίνουσα ταλάντωση που θα καταγραφεί θα είναι της μορφής του Σχήματος 9.8, όπου το πλάτος της ταλάντωσης θα ελαττώνεται εκθετικά με το χρόνο (κόκκινη, διακεκομμένη καμπύλη), σύμφωνα με τη σχέση

$$A(t) = A_0 e^{-\frac{bt}{2m}} \quad (9.27)$$

Αν λογαριθμίσουμε τη σχέση 9.27 (δες Κεφ. 3.4.3.2), προκύπτει τελικά

$$\log A = \log A_0 - \frac{b \cdot \log e}{2m} \cdot t$$

Η γραφική παράσταση επομένως του πλάτους A συναρτήσει του χρόνου t σε ημιλογαριθμικό χαρτί θα είναι ευθεία με κλίση

$$\kappa = -\frac{b \cdot \log e}{2m} \quad (9.28)$$

και για γνωστή τιμή της μάζας m , μπορεί να προκύψει εύκολα η σταθερά απόσβεσης b . Γνωρίζοντας τη σταθερά απόσβεσης b , μπορούμε να υπολογίσουμε από τη σχέση 9.23, το μέσο χρόνο ζωής τ της φθίνουσας ταλάντωσης.

9.3.3. Πειραματικό μέρος

9.3.3.1. Χρησιμοποιούμενα όργανα

Η πειραματική διάταξη που θα χρησιμοποιηθεί είναι ίδια με αυτή του πειράματος της απλής αρμονικής ταλάντωσης συστήματος μάζας-ελατηρίου (Σχήμα 9.4). Στο πείραμα της απλής αρμονικής ταλάντωσης θεωρήσαμε ότι το πλάτος παραμένει αμείωτο, γεγονός που μπορεί κατά προσέγγιση να θεωρηθεί αληθές για το μικρό χρονικό διάστημα (λίγα δευτερόλεπτα) παρατήρησης και καταγραφής της κίνησης. Αν αφήσουμε ωστόσο τη μάζα να ταλαντωθεί για περισσότερη ώρα, γίνεται εμφανής η αποσβενόμενη κίνηση, λόγω της αντίστασης του αέρα που παρουσιάζει ο κυκλικός δίσκος που βρίσκεται στη βάση της μάζας.

9.3.3.2. Μετρήσεις

1. Θέστε σε λειτουργία τον Η/Υ και βεβαιωθείτε ότι ο διακόπτης στο πίσω μέρος του datalogger 500 Interface στον οποίο συνδέεται ο ηχητικός πομποδέκτης, είναι στη θέση ON. Στην επιφάνεια εργασίας διπλοπατήστε με το ποντίκι στο εικονίδιο Damped_Oscillation.
2. Μετά την έναρξη του προγράμματος συλλογής και ανάλυσης δεδομένων (DataStudio), θα εμφανιστεί στην οθόνη ένα παράθυρο που απεικονίζει τη γραφική παράσταση της απόστασης της αναρτημένης από το ελατήριο μάζας από τον ηχητικό πομποδέκτη συναρτήσει του χρόνου, $x = f(t)$.
3. Επιλέξτε μία από τις διαθέσιμες μάζες και ζυγίστε τη στο μηχανικό ζυγό

$$m = \dots \dots \dots g$$

6. Αναρτήστε τη μάζα από την άκρη του ελατηρίου και φέρτε τη προσεκτικά στη θέση ισορροπίας της. Βεβαιωθείτε ότι ο ηχητικός πομποδέκτης βρίσκεται ακριβώς κάτω από την αναρτημένη μάζα και ότι τίποτε δεν παρεμβάλλεται μεταξύ τους.
7. Εκτρέψτε τη μάζα από τη θέση ισορροπίας της ώστε αυτή να αρχίσει να ταλαντώνεται και πατήστε στη συνέχεια το εικονίδιο με την ένδειξη START. Στην οθόνη του υπολογιστή θα παρατηρήσετε τη μεταβολή της απόστασης του κάτω άκρου της μάζας από τον ηχητικό πομποδέκτη συναρτήσει του χρόνου. Αφού καταγράψετε την κίνηση της ταλαντευόμενης μάζας για διάστημα περίπου 3 λεπτών, πατήστε στη συνέχεια το εικονίδιο με την ένδειξη STOP.

8. Προκειμένου να μετρήσετε τη μέγιστη απομάκρυνση της μάζας σε κάθε περίοδο και την αντίστοιχη χρονική στιγμή, μετακινηθείτε στο παράθυρο του γραφήματος, επιλέξτε το εικονίδιο SMART TOOL και μετακινήστε το εμφανιζόμενο σταυρόνημα πάνω στις κορυφές της καταγεγραμμένης καμπύλης. Με τον τρόπο αυτό εμφανίζονται οι τιμές του χρόνου και οι αντίστοιχες αποστάσεις της μάζας από τον ηχητικό πομποδέκτη. Μετακινώντας το ποντίκι πάνω στις κλίμακες του γραφήματος και κρατώντας πατημένο το αριστερό του πλήκτρο, έχετε τη δυνατότητα να μεγθύνεται το κομμάτι της γραφικής παράστασης που σας ενδιαφέρει, ώστε η καμπύλη να φαίνεται με μεγαλύτερη λεπτομέρεια. Μετακινηθείτε στην πρώτη κορυφή της καμπύλης και καταγράψτε την απομάκρυνση y_1 και τον αντίστοιχο χρόνο στον Πίνακα μετρήσεων 9.3. Καταγράψτε επίσης τη θέση ισορροπίας της μάζας

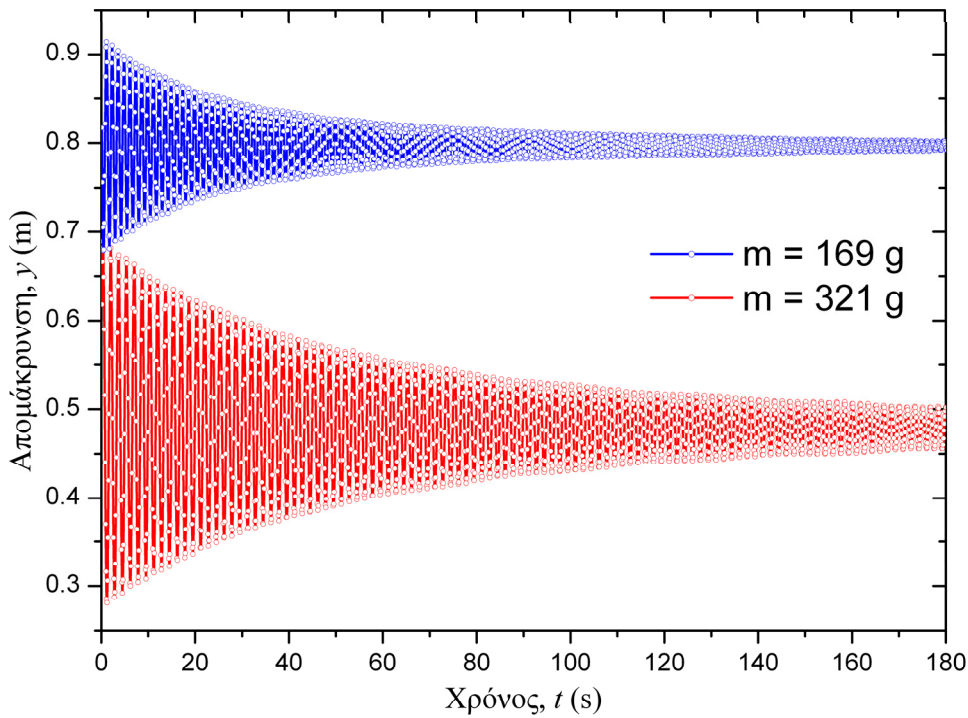
$$y_0 = \dots \dots \dots m$$

9. Για τη συνολική διάρκεια της καταγραφής (περίπου 3 λεπτά) λάβετε άλλες 10 περίπου μετρήσεις της απομάκρυνσης και του αντίστοιχου χρόνου που αντιστοιχούν σε κορυφές της καμπύλης που περιγράφει την κίνηση, καταχωρώντας τις μετρήσεις σας στις υπόλοιπες γραμμές του Πίνακα Μετρήσεων 9.3.
10. Υπολογίστε το πλάτος A της φθίνουσας ταλάντωσης και καταχωρίστε τις τιμές στην τελευταία στήλη του Πίνακα 9.3.

a/a	t (s)	y_1 (m)	$A_I = y - y_0$ (m)
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			

Πίνακας 9.3 Πίνακας μετρήσεων της περιόδου T φθίνουσας ταλάντωσης, συναρτήσει της μάζας m .

11. Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση $A = f(t)$ σε ημιλογαριθμικό χαρτί. Από την κλίση της ευθείας που θα χαράξετε, υπολογίστε μέσω της 9.28 τη σταθερά απόσβεσης της φθίνουσας ταλάντωσης και στη συνέχεια από τη σχέση 9.23, το μέσο χρόνο ζωής τ . Βρείτε κατευθείαν από τη γραφική παράσταση το μέσο χρόνο ζωής (χρόνος που το πλάτος πέφτει στο 36% της αρχικής του τιμής).
12. Υπολογίστε τη σταθερά απόσβεσης με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.
13. Μπορείτε να επεξεργαστείτε μόνοι σας τα δεδομένα της φθίνουσας ταλάντωσης ενός συστήματος μάζας-ελατηρίου, για δύο διαφορετικές τιμές της μάζας. Τα αρχεία μετρήσεων μπορείτε να τα βρείτε [εδώ](#). Σε κάθε αρχείο, περιλαμβάνεται η απόσταση της μάζας από το σημείο αναφοράς που είναι ο αισθητήρας μέτρησης αποστάσεων. Για να βρείτε το χρονικά μεταβαλλόμενο πλάτος, θα πρέπει από αυτές τις τιμές να αφαιρέσετε την απόσταση που αντιστοιχεί στη θέση ισορροπίας κάθε μάζας. Βρείτε τη σταθερά απόσβεσης σε κάθε περίπτωση, καθώς και το μέσο χρόνο ζωής. Σχολιάστε τα αποτελέσματά σας.



Σχήμα 9.9 Γραφική παράσταση της απομάκρυνσης συναρτήσει του χρόνου, ενός συστήματος μάζας-ελατηρίου με απόσβεση, για δύο διαφορετικές τιμές της μάζας.

9.3.4. Ερωτήσεις – Ασκήσεις

1. Αν στο βήμα 3 του πειράματος επιλέξετε μία μεγαλύτερη μάζα, πώς θα επηρεαστεί η περίοδος της φθίνουσας ταλάντωσης;
2. Υπολογίστε πόσο θα ελαττωθεί το αρχικό πλάτος A_0 μιας φθίνουσας ταλάντωσης σε χρονικό διάστημα ίσο με 2τ , όπου τ ο μέσος χρόνος ζωής της ταλάντωσης.
3. Σώμα μάζας 500 g εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση στην οποία η σταθερά απόσβεσης είναι 4 kg/s. Σε πόσο χρονικό διάστημα η κίνηση θα σταματήσει; (Υπόδειξη: θεωρείστε ότι η κίνηση σταματά όταν το πλάτος έχει ελαττωθεί στο 1/100 της αρχικής του τιμής).

9.4. Πειράματα με ηχητικά κύματα

9.4.1. Συνοπτική ανασκόπηση της θεωρίας

9.4.1.1. Γενικά περί κυμάτων

Κύμα ονομάζουμε κάθε διαταραχή από την κατάσταση ισορροπίας, η οποία διαδίδεται στο χώρο και στο χρόνο με πεπερασμένη ταχύτητα, μεταφέροντας ορμή και ενέργεια χωρίς όμως να μεταφέρει μάζα. Κύματα τα οποία διαδίδονται μέσα σε υλικά που παραμορφώνονται εύκολα (ελαστικά μέσα) ονομάζονται μηχανικά κύματα. Τα μηχανικά κύματα προέρχονται από την απομάκρυνση κάποιου τμήματος του ελαστικού μέσου από τη θέση ισορροπίας, που το αναγκάζει να ταλαντωθεί γύρω από τη θέση αυτή. Λόγω των ελαστικών ιδιοτήτων του μέσου η διαταραχή αυτή διαδίδεται από το ένα στοιχείο του μέσου στο επόμενο, προκαλώντας την ταλάντωση των διάφορων περιοχών του μέσου. Παραδείγματα μηχανικών κυμάτων είναι τα ηχητικά κύματα στον αέρα, τα κύματα επιφάνειας του νερού, τα σεισμικά κύματα, κ.ά. (Αλεξόπουλος, 1986β).

Τα κύματα ανάλογα με τον τρόπο κίνησης των σωματίων του υλικού μέσου στο οποίο διαδίδονται, χωρίζονται σε εγκάρσια και διαμήκη. Εγκάρσιο κύμα είναι εκείνο στο οποίο οι ταλαντώσεις του υλικού μέσου γίνονται κάθετα στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος. Διάμηκες κύμα είναι το κύμα στο οποίο οι δονήσεις του μέσου διάδοσης γίνονται παράλληλα στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος. Υπάρχουν κύματα τα οποία δεν προϋποθέτουν την ύπαρξη κάποιου υλικού μέσου για να διαδοθούν. Τέτοια είναι τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα, όπως π.χ. το φως, τα μικροκύματα, τα ραδιοφωνικά κύματα, οι ακτίνες -X , κ.ά., τα οποία διαδίδονται και στο κενό με ταχύτητα διάδοσης την ταχύτητα του φωτός ($c = 3 \times 10^8$ m/s).

Για τη μαθηματική περιγραφή ενός μηχανικού κύματος είναι απαραίτητη η γνώση της θέσης οποιουδήποτε σωματίου του υλικού μέσου διάδοσης, κάθε χρονική στιγμή. Η απλούστερη περίπτωση μηχανικού κύματος που μπορούμε να περιγράψουμε είναι αυτή της διάδοσης ενός αρμονικού (ημιτονοειδούς) κύματος σε μια τεντωμένη χορδή, όπου κάθε σωματίο της χορδής εκτελεί απλή αρμονική κίνηση γύρω από τη θέση ισορροπίας του. Το μέγεθος που μπορεί στην περίπτωση αυτή να μας περιγράψει το κύμα είναι η απομάκρυνση y κάθε σημείου της χορδής από τη θέση ισορροπίας του. Η τιμή του y εξαρτάται από τη θέση x του σωματίου στο οποίο αναφερόμαστε, καθώς επίσης και από τη χρονική στιγμή t την οποία το εξετάζουμε. Το y επομένως είναι συνάρτηση του x και του t , δηλαδή $y = f(x, t)$.

Εστω ότι η απομάκρυνση ενός σωματίου στο αριστερό άκρο της χορδής (στη θέση $x=0$) όπου ξεκινάει η διάδοση του κύματος (Σχήμα 9.10) δίνεται από τη σχέση

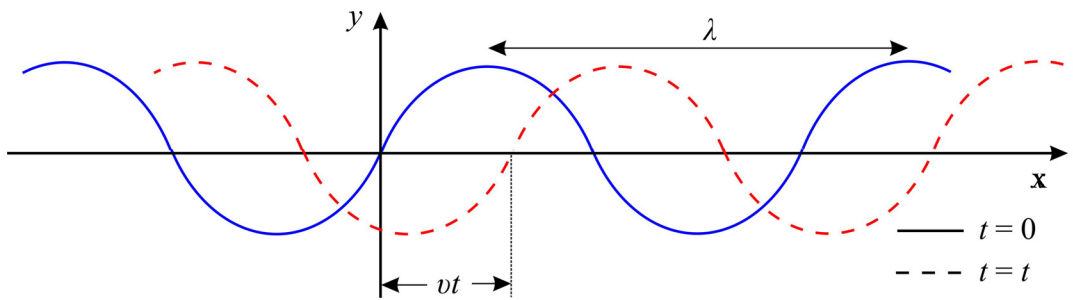
$$y(x = 0, t) = A \sin \omega t = A \sin(2\pi f t) \quad (9.29)$$

Το σωματίο δηλαδή εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με συχνότητα f . Λόγω των ελαστικών ιδιοτήτων του μέσου (χορδή), τα γειτονικά σημεία θα τεθούν και αυτά σε ταλάντωση και η διαταραχή αυτή (κύμα) θα διαδοθεί κατά μήκος της χορδής με σταθερή ταχύτητα v . Συγκρίνοντας την κίνηση οποιουδήποτε σημείου της χορδής με την κίνηση στο σημείο $x = 0$, παρατηρούμε ότι κάθε σημείο θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση με το ίδιο πλάτος, με μια χρονική ωστόσο καθυστέρηση σε σχέση με τα προηγούμενα σημεία. Αν η κυματική διαταραχή διαδίδεται με ταχύτητα v , ξεκινώντας από τη θέση $x = 0$, θα έχει φτάσει στο σημείο x ύστερα από χρόνο $t = x/v$. Η μετατόπιση επομένως του σημείου x τη χρονική στιγμή t είναι ίδια με τη μετατόπιση του σημείου $x = 0$, την προηγούμενη χρονική στιγμή $t - x/v$. Θα ισχύει δηλαδή,

$$y(x, t) = y\left(x = 0, t - \frac{x}{v}\right)$$

και σύμφωνα με τη σχέση 9.29

$$y(x, t) = A \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \right] = A \sin \left[2\pi f \left(t - \frac{x}{v} \right) \right] \quad (9.30)$$



Σχήμα 9.10 Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η χορδή έχει σχήμα που δίνεται από τη σχέση $y = A\sin(2\pi x/\lambda)$. Ύστερα από χρόνο $t = x/v$ το ημιτονοειδές κύμα έχει διανύσει προς τα δεξιά μια απόσταση ίση με $x = vt$ (διακεκομμένη καμπύλη).

Η παραπάνω συνάρτηση ονομάζεται συνάρτηση κύματος (ή κυματοσυνάρτηση) και περιγράφει πλήρως ένα αρμονικό κύμα.

Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων του κύματος που έχουν την ίδια μετατόπιση και βρίσκονται στην ίδια φορά της κίνησης, ονομάζεται μήκος κύματος λ . Ο χρόνος που χρειάζεται το κύμα για να διανύσει απόσταση ίση με ένα μήκος κύματος ονομάζεται περίοδος T του κύματος. Θα ισχύει επομένως ότι

$$\lambda = v \cdot T \text{ ή } v = \lambda \cdot f \quad (9.31)$$

όπου $f = 1/T$ η συχνότητα του κύματος. Η κυματοσυνάρτηση 9.30 επομένως μπορεί να πάρει εναλλακτικά τη μορφή

$$y(x, t) = A\sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \quad (9.32)$$

Μια άλλη συμπαγής και εύχρηστη μορφή της κυματοσυνάρτησης προκύπτει αν ορίσουμε την ποσότητα

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (9.33)$$

που ονομάζεται κυματαριθμός, οπότε συναρτήσει του k και της κυκλικής συχνότητας $\omega = 2\pi/T$, η 9.32 γίνεται

$$v = \lambda \cdot f = \lambda \cdot \frac{1}{T} = \frac{\lambda/2\pi}{T/2\pi} = \omega \cdot k$$

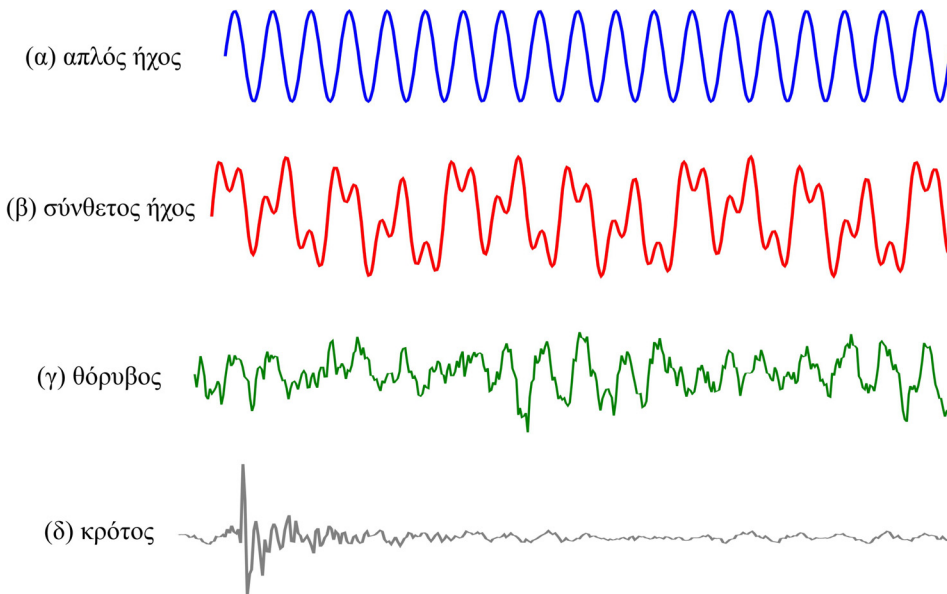
και η κυματοσυνάρτηση παίρνει τελικά τη μορφή

$$y(x, t) = A\sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x \right) = A\sin(\omega t - kx) \quad (9.34)$$

9.4.1.2. Ηχητικά κύματα

Κάθε περιοδική μεταβολή της πίεσης του ατμοσφαιρικού αέρα, της οποίας η συχνότητα είναι ικανή να ερεθίζει το αισθητήριο της ακοής και να προκαλεί το αντίστοιχο αίσθημα, ονομάζεται ήχος. Γενικά, οποιοδήποτε ελαστικό κύμα που διαδίδεται σε στερεό ή υγρό μέσο και η συχνότητα του βρίσκεται μέσα στην ακουστική περιοχή συχνοτήτων (δηλαδή μεταξύ 20 Hz και 20000 Hz) μπορεί να χαρακτηριστεί ως ήχος. Στην περίπτωση που η μεταβολή της πίεσης του αέρα είναι αρμονική συνάρτηση του χρόνου, ο ήχος είναι απλός, ενώ όταν η μεταβολή της πίεσης είναι μεν περιοδική αλλά όχι αρμονική, ο ήχος χαρακτηρίζεται ως σύνθετος

(Σχήμα 9.11α,β). Στους ήχους κατατάσσεται ο θόρυβος, όπου η μεταβολή της πίεσης δεν είναι περιοδική και ο κρότος που προέρχεται από απότομη μεταβολή της πίεσης του αέρα (Σχήμα 9.11γ,δ).



Σχήμα 9.11 Διάφορα είδη ηχητικών κυμάτων (Αλεξόπουλος, 1986β).

Περιοδική μεταβολή της πίεσης του αέρα μπορεί να δημιουργηθεί στο εσωτερικό ενός σωλήνα που περιέχει αέρα και στο ένα του άκρο κλίνεται από έμβολο, το οποίο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση (Σχήμα 9.12). Όταν το έμβολο κινείται προς τα δεξιά, ο αέρας μπροστά από αυτό συμπιέζεται και η πίεση και η πυκνότητα του ανέρχονται πάνω από τις κανονικές αδιατάραχτες τιμές τους. Ο συμπιεσμένος αέρας κινούμενος προς τα εμπρός, πιέζει με τη σειρά του τα διπλανά στρώματα αέρα και ένας παλμός συμπίεσης (πύκνωμα) κινείται προς τα δεξιά. Αντίστοιχα, όταν το έμβολο κινηθεί προς τα αριστερά, ένας παλμός αραιώσης (αραιώμα) θα κινηθεί προς τα δεξιά. Έτσι λοιπόν, ο αέρας συμπιέζεται περιοδικά από το έμβολο και μεταδίδει τα δημιουργούμενα πυκνώματα και αραιώματα προς τα δεξιά, υπό τη μορφή ενός διαμήκους κύματος (τα μόρια του αέρα ταλαντώνονται κατά μήκος της διεύθυνσης διάδοσης του κύματος).

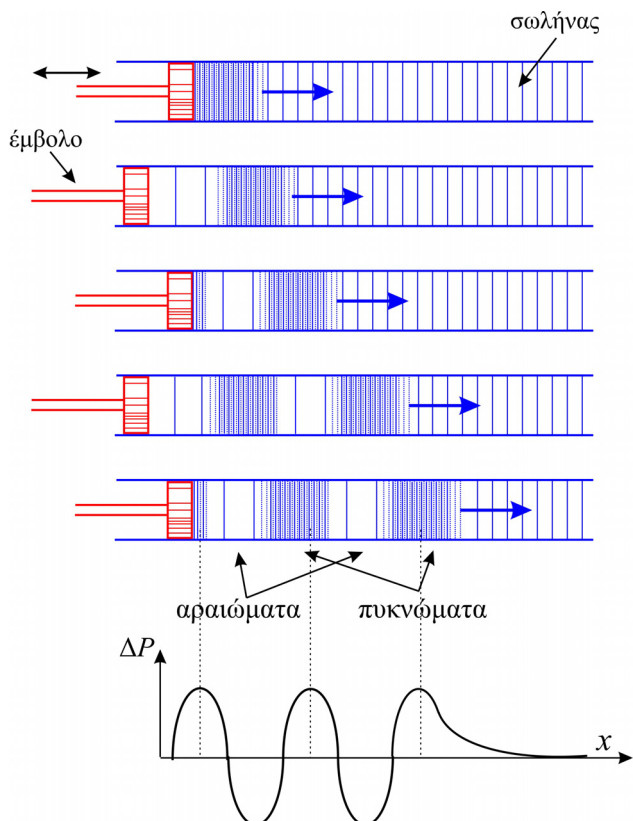
Στην περίπτωση αρμονικού ηχητικού κύματος η κυματοσυνάρτηση περιγραφής θα δίνεται από την εξίσωση 9.34

$$y(x, t) = A \sin(\omega t - kx)$$

μόνον που επειδή το κύμα είναι διάμηκες, η απομάκρυνση y θα είναι κατά μήκος της διεύθυνσης διάδοσης του κύματος και όχι κάθετα σε αυτή. Είναι ωστόσο βολικότερο να ασχολούμαστε με μεταβολές της πίεσης σε ένα ηχητικό κύμα (αφού αυτές αντιλαμβανόμαστε ως ήχο), παρά με τις πραγματικές απομακρύνσεις των μορίων που μεταβιβάζουν το κύμα. Αποδεικνύεται ότι η εξίσωση περιγραφής του κύματος, ως συνάρτηση της μεταβολής της πίεσεως, είναι η ακόλουθη

$$\Delta P = [k\rho_0 v^2 A] \cos(\omega t - kx) \quad (9.35)$$

όπου η ποσότητα $k\rho_0 v^2 A$ παριστάνει τη μέγιστη μεταβολή της πίεσης και ονομάζεται πλάτος της πίεσης (ρ_0 είναι η πυκνότητα του αερίου και v η ταχύτητα διάδοσης του κύματος). Δηλαδή, ένα ηχητικό κύμα μπορεί να θεωρηθεί είτε ως ένα κύμα απομάκρυνσης είτε ως ένα κύμα πίεσης. Αν το πρώτο είναι συνάρτηση ημίτονου, το δεύτερο θα είναι συνάρτηση συνημίτονου και αντίστροφα. Το κύμα απομάκρυνσης επομένως έχει διαφορά φάσης $\pi/2$ ως προς το κύμα πίεσης. Όταν επομένως η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας σε ένα σημείο είναι μέγιστη ή ελάχιστη, η μεταβολή της πίεσης εκεί είναι μηδέν και όταν η απομάκρυνση σε ένα σημείο είναι μηδέν έχουμε μέγιστη μεταβολή της πίεσης στο σημείο αυτό.



Σχήμα 9.12 Έμβολο το οποίο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση σε οριζόντια διεύθυνση δημιουργεί ένα διάμηκες κύμα μεταβολής της πίεσης του αέρα στο εσωτερικό του σωλήνα (διαδοχικά πυκνώματα και αραιώματα), το οποίο διαδίδεται κατά μήκος του σωλήνα. Στο κάτω μέρος φαίνεται η μεταβολή της πίεσης από την αρχική αδιατάρακτη τιμή της ατμοσφαιρικής πίεσης.

Η ταχύτητα διάδοσης των ηχητικών κυμάτων εντός αερίων αποδεικνύεται ότι είναι ανεξάρτητη από την πίεση και την πυκνότητα του αερίου και εξαρτάται μόνο από τη θερμοκρασία T και τη φύση του αερίου, βάσει της ακόλουθης σχέσης

$$v = \sqrt{\frac{R \cdot \gamma}{M} \cdot T} \quad (9.36)$$

όπου $R = 8.314 \text{ J/mol K}$ είναι η παγκόσμια σταθερά των ιδανικών αερίων, M είναι το μοριακό βάρος του αερίου και γ είναι ο λόγος c_p/c_v των ειδικών θερμοτήτων του αερίου. Ειδικά για τον ατμοσφαιρικό αέρα, $\gamma = 1.40$ και $M = 28.8 \text{ g/mol}$, οπότε σε θερμοκρασία δωματίου $T = 293 \text{ °K}$, η ταχύτητα του ήχου στον αέρα, όπως προκύπτει από την 9.36, θα ισούται με $v = 344 \text{ m/s}$.

9.4.1.3. Συμβολή κυμάτων

Το αποτέλεσμα της συνύπαρξης δύο ή περισσότερων κυμάτων που διέρχονται από την ίδια περιοχή την ίδια χρονική στιγμή ονομάζεται συμβολή των κυμάτων. Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας, η κυματοσυνάρτηση που θα περιγράφει την προκύπτουσα κίνηση βρίσκεται αθροίζοντας τις κυματοσυναρτήσεις των συμβαλλόμενων κυμάτων. Για παράδειγμα, αν έχουμε δύο εγκάρσια κύματα που διαδίδονται προς αντίθετες διευθύνσεις κατά μήκος μιας χορδής και συναντηθούν, η μετατόπιση οποιουδήποτε σημείου στη χορδή κάθε χρονική στιγμή θα προκύψει προσθέτοντας τη μετατόπιση που θα είχε το σημείο εάν μόνο το πρώτο κύμα ήταν παρόν και τη μετατόπιση που θα είχε μόνο από το δεύτερο κύμα, αν το πρώτο δεν ήταν παρόν.

Ας θεωρήσουμε τώρα την απλή περίπτωση δύο κυμάτων ίδιων κυκλικών συχνοτήτων ω και πλάτων A που κινούνται με την ίδια ταχύτητα v και προς την ίδια κατεύθυνση $+x$, αλλά με διαφορά φάσης φ μεταξύ τους. Οι κυματοσυναρτήσεις των δύο κυμάτων θα είναι τότε

$$y_1(x, t) = A \sin(\omega t - kx) \quad (9.37)$$

$$y_2(x, t) = A \sin(\omega t - kx + \varphi) \quad (9.38)$$

Η κυματοσυνάρτηση του συνολικού κύματος θα είναι, σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας, το άθροισμα των δύο κυματοσυναρτήσεων y_1 και y_2 , δηλαδή

$$y_{ολ}(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = A[\sin(\omega t - kx) + \sin(\omega t - kx + \varphi)] \quad (9.39)$$

Χρησιμοποιώντας από την τριγωνομετρία την ταυτότητα

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

η κυματοσυνάρτηση 9.39 θα γίνει τελικά

$$y_{ολ}(x, t) = 2A \sin \frac{\omega t - kx + \omega t - kx + \varphi}{2} \cos \frac{\omega t - kx - \omega t + kx - \varphi}{2} \Rightarrow$$

$$y_{ολ}(x, t) = 2A \cos \frac{\varphi}{2} \sin \left(\omega t - kx + \frac{\varphi}{2} \right) \quad (9.40)$$

Το αποτέλεσμα δηλαδή της συμβολής των δύο κυμάτων είναι ένα νέο κύμα της ίδιας συχνότητας, αλλά με πλάτος $2A \cos(\frac{\varphi}{2})$ που εξαρτάται από τη διαφορά φάσης φ των δύο κυμάτων. Αν $\varphi = 0$ (συμφασικά κύματα), τότε τα δύο κύματα λέμε ότι συμβάλλουν ενισχυτικά δίνοντας ένα νέο κύμα με διπλάσιο πλάτος (αφού $\cos(\frac{\varphi}{2}) = 1$). Αν $\varphi = \pi$, τότε τα δύο κύματα συμβάλλουν αποσβεστικά, δηλαδή εξουδετερώνουν το ένα το άλλο και δεν υπάρχει κυματική διαταραχή στο χώρο (αφού $\cos(\frac{\varphi}{2}) = 0$).

9.4.1.4. Στάσιμα κύματα

Ειδική περίπτωση της συμβολής δύο κυμάτων αποτελούν τα στάσιμα κύματα (Χριστοδουλίδης, 1995). Αν ένα κύμα διαδίδεται κατά μήκος μιας χορδής που είναι στερεωμένη στο δεξί της άκρο, το κύμα θα ανακλαστεί στο σταθερό αυτό σημείο και θα δημιουργηθεί ένα νέο κύμα με αντίθετη κατεύθυνση. Το προσπίπτον και το ανακλώμενο κύμα συμβάλλουν, δημιουργώντας ένα στάσιμο κύμα πάνω στη χορδή. Η κυματοσυνάρτηση που περιγράφει το στάσιμο κύμα μπορεί να προκύψει ως το άθροισμα των κυματοσυναρτήσεων δύο κυμάτων ίδιου πλάτους, συχνότητας και μήκους κύματος, τα οποία διαδίδονται σε αντίθετες κατευθύνσεις και περιγράφονται μαθηματικά από τις ακόλουθες κυματοσυναρτήσεις

$$y_1(x, t) = A \sin(\omega t + kx) \quad (9.41)$$

$$y_2(x, t) = -A \sin(\omega t - kx) \quad (9.42)$$

Η πρώτη κυματοσυνάρτηση y_1 περιγράφει ένα κύμα που διαδίδεται προς τα αριστερά και η δεύτερη το ανακλώμενο κύμα στο αριστερό σταθερό άκρο της χορδής, το οποίο διαδίδεται προς τα δεξιά αντεστραμμένο, εξαιτίας της ανάκλασής του. Η κυματοσυνάρτηση του στάσιμου κύματος, σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας, θα είναι

$$y_{ολ}(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = A[\sin(\omega t + kx) - \sin(\omega t - kx)] \quad (9.43)$$

και χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα

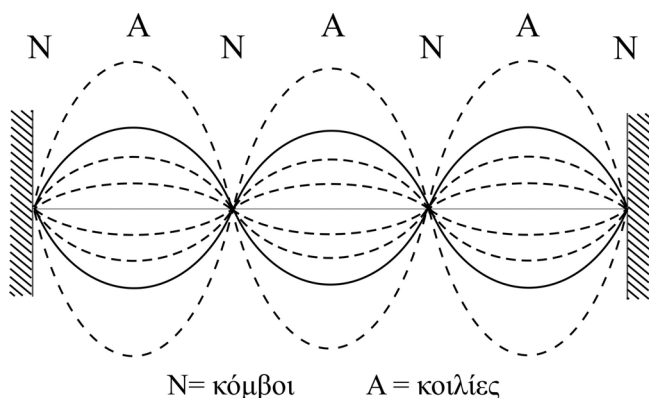
$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

προκύπτει

$$y_{ολ}(x, t) = A[\sin\omega t \cdot \cos kx + \cos\omega t \cdot \sin kx - \sin\omega t \cdot \cos kx + \cos\omega t \cdot \sin kx] \Rightarrow$$

$$y_{ολ}(x, t) = 2A \cdot \cos\omega t \cdot \sin kx \quad (9.44)$$

Η συνάρτηση 9.44 δεν παριστάνει τρέχον κύμα, αφού δεν είναι συνάρτηση της μορφής $y = f(\omega t - kx)$. Ο παράγοντας $\sin kx$ στην 9.44 δείχνει ότι κάθε χρονική στιγμή, η μορφή της χορδής είναι μια ημιτονοειδής καμπύλη. Το πλάτος ισούται με $2A \cdot \cos\omega t$ και μεταβάλλεται ημιτονοειδώς με το χρόνο από 0 έως $2A$. Ωστόσο, η κυματική αυτή μορφή δεν κινείται κατά μήκος της χορδής όπως ένα τρέχον κύμα, αλλά παραμένει στην ίδια θέση (στάσιμη) και το πλάτος της αυξομειώνεται με το χρόνο. Κάθε σημείο στη χορδή εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Υπάρχουν σημεία της χορδής τα οποία δεν ταλαντώνονται καθόλου και ονομάζονται κόμβοι ή δεσμοί και άλλα τα οποία ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος και ονομάζονται κοιλίες ή αντιδεσμοί. Διαδοχικά στιγμιότυπα ενός στάσιμου κύματος σε χορδή, όπου και τα δύο άκρα είναι σταθερά, απεικονίζονται στο Σχήμα 9.13.



Σχήμα 9.13 Διαφορετικά στιγμιότυπα ενός στάσιμου κύματος σε χορδή με ακλόνητα άκρα. Η μορφή της χορδής κάθε χρονική στιγμή είναι ημιτονοειδής καμπύλη, το πλάτος της οποίας δεν παραμένει σταθερό, αλλά μεταβάλλεται με το χρόνο.

Η θέση των κόμβων πάνω στη χορδή μπορεί να προκύψει από την εξίσωση του στάσιμου κύματος 9.44. Η μετατόπιση y θα είναι μηδέν όταν $\sin kx = 0$, δηλαδή όταν $kx = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ ή

$$x = 0, \frac{\pi}{k}, \frac{2\pi}{k}, \frac{3\pi}{k}, \dots$$

και αφού $k = 2\pi/\lambda$

$$x = 0, \frac{\lambda}{2}, \frac{2\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \dots$$

Η απόσταση δηλαδή μεταξύ δύο διαδοχικών κόμβων (ή δύο διαδοχικών κοιλιών) είναι ίση με μισό μήκος κύματος. Προϋπόθεση ύπαρξης στάσιμου κύματος σε χορδή μήκους L με ακλόνητα άκρα είναι το μήκος της χορδής να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του μισού μήκους κύματος που δημιουργείται σε αυτήν, δηλαδή

$$L = n \frac{\lambda}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (9.45)$$

9.4.1.5. Διακροτήματα

Κατά τη συμβολή δύο κυμάτων με διαφορετικές συχνότητες προκύπτει ένα σύνθετο κύμα, του οποίου η μορφή δεν είναι ημιτονοειδής καμπύλη. Θα εξετάσουμε την περίπτωση της συμβολής δύο ηχητικών κυμάτων που παρουσιάζουν παραπλήσιες συχνότητες και παράγουν το φαινόμενο του διακροτήματος, της αυξομειώσης δηλαδή της έντασης του ήχου με συχνότητα ίση με τη διαφορά των συχνοτήτων των δύο συμβαλλόμενων κυμάτων (Alonso & Finn, 1975). Βέβαια, το φαινόμενο αυτό δεν αφορά μόνον στα ηχητικά κύματα και μπορεί να εμφανιστεί και σε άλλα είδη κυμάτων. Για να περιγράψουμε το διακρότημα, θεωρούμε δύο ηχητικά κύματα ίδιου πλάτους που κινούνται στην ίδια κατεύθυνση με διαφορετικές συχνότητες, άρα και μήκη κύματος. Τα κύματα περιγράφονται από τις ακόλουθες κυματοσυναρτήσεις που μας δίνουν την απομάκρυνση σε κάθε σημείο της διεύθυνσης διάδοσης, συναρτήσει του χρόνου

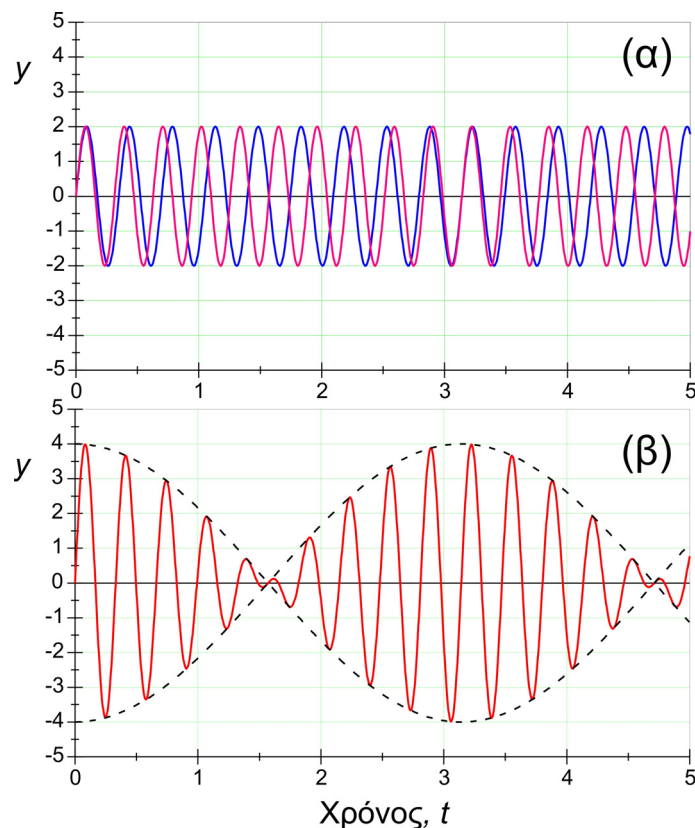
$$y_1(x, t) = A \sin(\omega_1 t - k_1 x) \quad (9.46)$$

$$y_2(x, t) = A \sin(\omega_2 t - k_2 x) \quad (9.47)$$

Για χάρην απλούστευσης, επειδή εξετάζουμε τη συμβολή των κυμάτων σε συγκεκριμένο σημείο του χώρου, εκεί δηλαδή που καταγράφουμε τον ήχο, μας ενδιαφέρει η χρονική εξέλιξη της συνισταμένης απομάκρυνσης η οποία μπορεί να περιγραφεί από τις συναρτήσεις (Σχήμα 9.14α)

$$y_1(t) = A \sin(\omega_1 t) \quad (9.48)$$

$$y_2(t) = A \sin(\omega_2 t) \quad (9.49)$$



Σχήμα 9.14 (α) Στιγμιότυπα δύο κυμάτων ίδιου πλάτους και με παραπλήσιες κυκλικές συχνότητες ($\omega_1 \approx \omega_2$). (β) Η συμβολή τους παράγει κύμα σχεδόν της ίδιας συχνότητας $(\omega_1 + \omega_2)/2$ αλλά με αργά μεταβαλλόμενο πλάτος, συχνότητας $(\omega_1 - \omega_2)/2$.

Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας, η συνισταμένη απομάκρυνση είναι

$$y_{ολ}(t) = y_1(t) + y_2(t) = A\sin(\omega_1 t) + A\sin(\omega_2 t) = A \left(2\sin \frac{\omega_1 t + \omega_2 t}{2} \cos \frac{\omega_1 t - \omega_2 t}{2} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{ολ}(t) = \left[2A \cos \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right) \right] \sin \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right) \quad (9.50)$$

που παριστάνει μία ημιτονοειδή ταλάντωση στη θέση x , με συχνότητα ίση με τη μέση συχνότητα των δύο κυμάτων $\bar{\omega} = (\omega_1 + \omega_2)/2$ και με πλάτος που μεταβάλλεται από $-2A$ έως $2A$, λόγω του παράγοντα συνημίτονου στη σχέση 9.50 (Σχήμα 9.14β). Το αποτέλεσμα αυτό είναι μία μορφή διαμόρφωσης πλάτους που παρουσιάζεται στους ραδιοφωνικούς πομπούς AM (Amplitude Modulation). Στην περίπτωση που οι δύο συχνότητες είναι πολύ κοντά ή μία στην άλλη, το προκύπτον κύμα έχει περίπου την ίδια συχνότητα, αλλά η συχνότητα μεταβολής του πλάτους είναι πολύ μικρή, $\omega_A = (\omega_1 - \omega_2)/2$ και το πλάτος μεταβάλλεται αργά, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 9.14. Επειδή το πλάτος που υποδηλώνεται με την περιβάλλουσα καμπύλη στο Σχήμα 9.14 μεγιστοποιείται δύο φορές στη διάρκεια της περιόδου, η συχνότητα των διακροτημάτων, δηλαδή της αυξομειώσης της έντασης του ήχου, θα ισούται με τη διαφορά των συχνοτήτων των 2 συμβαλλόμενων κυμάτων.

9.4.1.6. Συντονισμός

Αν ένα σύστημα που μπορεί να ταλαντωθεί, διεγερθεί περιοδικά με μια σειρά ωθήσεων συχνότητας ίσης (ή σχεδόν ίσης) με μία από τις φυσικές συχνότητες ταλάντωσης του συστήματος, το σύστημα ταλαντώνεται με σχετικά μεγάλο πλάτος. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται συντονισμός και λέμε ότι το σύστημα συντονίζεται με τις ασκούμενες ωθήσεις.

Όπως είδαμε προηγουμένως, σε μια χορδή στερεωμένη στα δύο άκρα της μπορούν να δημιουργηθούν ταλαντώσεις ή στάσιμα κύματα, υπό την προϋπόθεση ότι τα ακραία σημεία είναι δεσμοί. Οι φυσικές συχνότητες ταλάντωσης της χορδής μπορούν να προκύψουν από τη σχέση 9.45, αν αντικαταστήσουμε το μήκος κύματος λ από τη γνωστή σχέση $\lambda = v/f$. Θα προκύψει έτσι

$$f = \frac{v}{\lambda} = v \frac{n}{2L}, \quad \text{όπου } n = 1, 2, 3, \dots$$

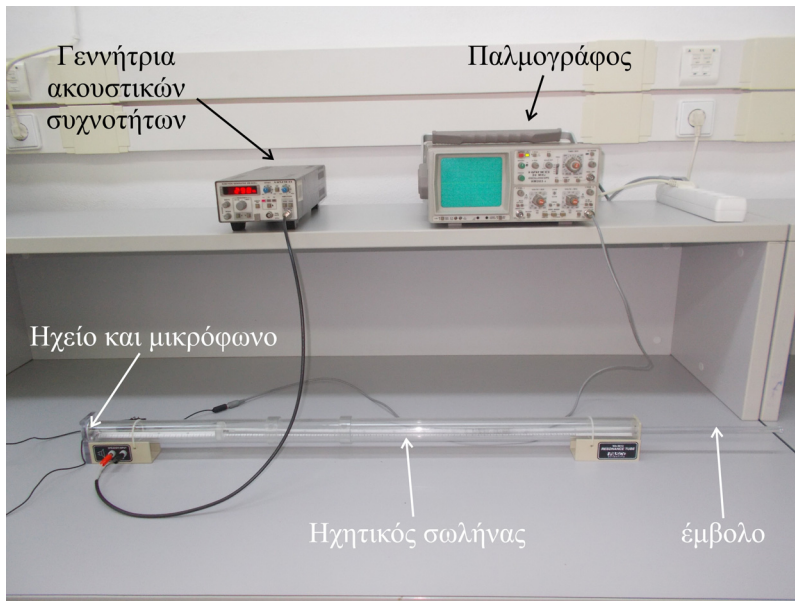
Αν η χορδή τεθεί σε ταλάντωση και αφεθεί ελεύθερη, οι ταλαντώσεις της θα εξασθενήσουν βαθμιαία, λόγω της απώλειας ενέργειας στα ελαστικά στηρίγματα των άκρων και της αντίστασης του αέρα στην κίνηση. Η ενέργεια αυτή μπορεί να αναπληρωθεί αν εφαρμόσουμε μια διεγείρουσα δύναμη. Αν η συχνότητα της διεγείρουσας δύναμης βρίσκεται κοντά σε οποιαδήποτε από τις φυσικές συχνότητες ταλάντωσης της χορδής, τότε η χορδή θα δονείται στη συχνότητα αυτή με μέγιστο πλάτος. Επειδή δε, η χορδή έχει πολλές φυσικές συχνότητες, συντονισμός μπορεί να επιτευχθεί σε πολλές διαφορετικές συχνότητες, βάσει της προηγούμενης σχέσης. Κατ' αναλογία με το φαινόμενο του συντονισμού σε χορδή, μία αέρια στήλη στο εσωτερικό ενός ηχητικού σωλήνα σταθερού μήκους, μπορεί να ταλαντωθεί με μέγιστο πλάτος για μία μόνον συχνότητα f του ηχητικού κύματος.

9.4.2. Σκοπός του πειράματος

Σκοπός του πειράματος είναι ο υπολογισμός της ταχύτητας διάδοσης του ήχου στον αέρα με τη μέθοδο των στάσιμων κυμάτων που δημιουργούνται στο εσωτερικό ενός ηχητικού σωλήνα. Επίσης, θα καταγραφεί η καμπύλη συντονισμού του ηχητικού σωλήνα και θα εξεταστεί το φαινόμενο των διακροτημάτων που παράγονται από τη συμβολή δύο ηχητικών κυμάτων με παραπλήσιες συχνότητες.

Η χρησιμοποιούμενη πειραματική διάταξη για τον υπολογισμό της ταχύτητας διάδοσης του ήχου απεικονίζεται στο Σχήμα 9.15. Αποτελείται από έναν ηχητικό σωλήνα, κλειστό στο δεξί του άκρο, με έμβολο το οποίο μπορεί να κινείται ελεύθερα. Στο αριστερό ανοιχτό άκρο του σωλήνα υπάρχει τοποθετημένο ηχείο το οποίο τροφοδοτούμενο από γεννήτρια εναλλασσόμενου ρεύματος συχνότητας f , παράγει απλό αρμονικό ήχο της ίδιας συχνότητας. Το παραγόμενο ηχητικό κύμα θα διαδοθεί κατά μήκος του σωλήνα, θα ανακλαστεί

από το έμβολο και επιστρέφοντας θα συμβάλλει με το αρχικό προσπίπτον κύμα. Εάν το μήκος του σωλήνα είναι κατάλληλο, θα δημιουργηθεί ένα μόνιμο στάσιμο ηχητικό κύμα στο εσωτερικό του. Ένα μικρόφωνο τοποθετημένο ακριβώς κάτω από το ηχείο καταγράφει τη μεταβολή της πίεσης του στάσιμου κύματος και την απεικονίζει σε παλμογράφο. Το Σχήμα 9.16 αναπαριστά στιγμιότυπα της κατανομής της απομάκρυνσης y και της μεταβολής της πίεσης ΔP κατά μήκος του σωλήνα, για διάφορους τρόπους ταλάντωσης της περιεχόμενης εντός του σωλήνα στήλης αέρα. Επειδή στο κλειστό άκρο του σωλήνα είναι αδύνατη η ταλάντωση των μορίων του αέρα, στο σημείο αυτό η απομάκρυνση y των μορίων θα είναι μηδέν (δεσμός απομάκρυνσης). Στο σημείο αυτό θα δημιουργηθεί κοιλία πίεσης, η μεταβολή δηλαδή της πίεσης στο σημείο αυτό θα είναι μέγιστη. Αντίθετα, στο ανοικτό (αριστερό) άκρο του σωλήνα, θα πρέπει η πίεση να είναι συνεχώς σταθερή και ίση με την ατμοσφαιρική. Συνεπώς, στο σημείο αυτό θα δημιουργηθεί δεσμός πίεσης ή αντίστοιχα κοιλία απομάκρυνσης.



Σχήμα 9.15 Απεικόνιση πειραματικής διάταξης για τη μέτρηση της ταχύτητας του ήχου στον αέρα με τη μέθοδο των στάσιμων κυμάτων που δημιουργούνται σε έναν ηχητικό σωλήνα.

Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 9.16, απαραίτητη συνθήκη για τη δημιουργία στάσιμων κυμάτων στην αέρια στήλη του ηχητικού σωλήνα, ανοικτού στο ένα άκρο και κλειστού στο άλλο, είναι το μήκος L της στήλης να είναι ίσο με $\lambda/4$ ή $3\lambda/4$ ή $5\lambda/4, \dots$ με άλλα λόγια περιττό πολλαπλάσιο του $\lambda/4$.

$$L = n \frac{\lambda}{4}, \quad \text{όπου } n = 1, 3, 5, 7, \dots$$

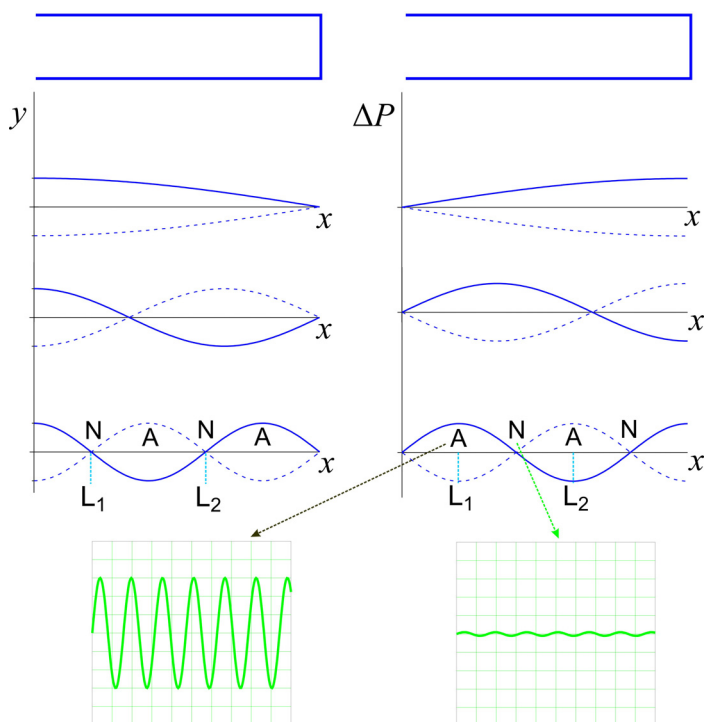
Μετακινώντας το έμβολο προς τα δεξιά μέσα στο σωλήνα, μπορούμε να βρούμε δύο διαδοχικές θέσεις L_1 και L_2 όπου το πλάτος του σήματος στον παλμογράφο (μεταβολή της πίεσης) γίνεται μέγιστο. Θα ισχύει τότε

$$L_2 - L_1 = 2 \frac{\lambda}{4} \Rightarrow \lambda = 2(L_2 - L_1) \quad (9.51)$$

και η ταχύτητα του ήχου θα είναι

$$v = \lambda \cdot f = 2(L_2 - L_1) \cdot f \quad (9.52)$$

όπου f η συχνότητα του ηχητικού κύματος.



Σχήμα 9.16 Διάφοροι τρόποι ταλάντωσης της στήλης αέρα στο εσωτερικό ηχητικού σωλήνα. Απεικονίζεται η μεταβολή της απομάκρυνσης και η μεταβολή της πίεσης ως συνάρτηση της θέσης. Στις θέσεις L_1 και L_2 αντιστοιχούν κοιλίες πίεσης ή δεσμοί απομάκρυνσης. Στο κάτω μέρος του σχήματος απεικονίζεται το σήμα στην οθόνη του παλμογράφου για τις δύο αυτές περιπτώσεις.

9.4.3. Πειραματικό μέρος

9.4.3.1. Χρησιμοποιούμενα όργανα

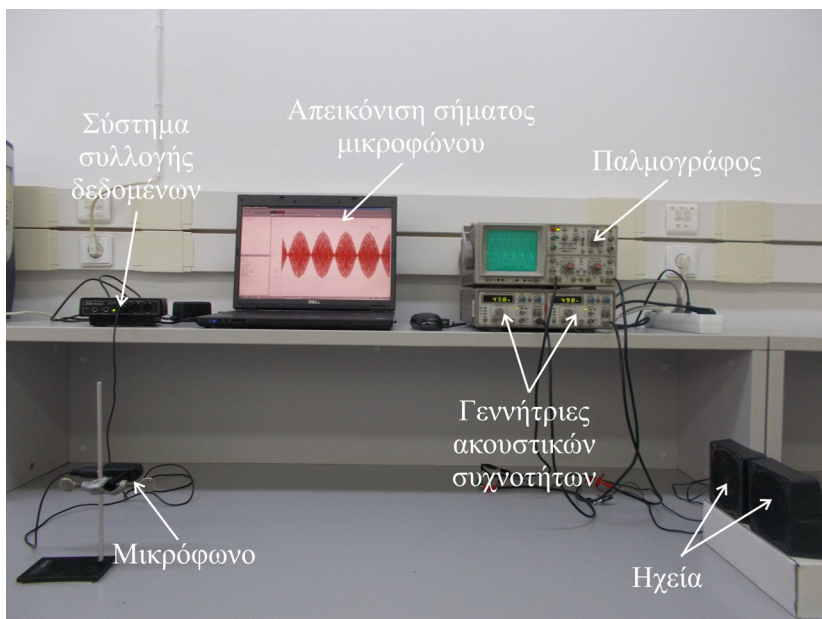
Για τα πειράματα της μέτρησης της ταχύτητας διάδοσης του ήχου και της καταγραφής της καμπύλης συντονισμού, απαιτούνται τα εξής:

1. Ηχητικός σωλήνας με μετακινούμενο έμβολο και βαθμονομημένο κανόνα στο εσωτερικό του. Στο αριστερό του άκρο φέρει ενσωματωμένο ηχείο και μικρόφωνο συνδεδεμένο με ενισχυτή.
2. Γεννήτρια ακουστικών συχνοτήτων.
3. Παλμογράφος.
4. Υδραργυρικό θερμόμετρο.
5. Καλώδια BNC για τις απαραίτητες συνδέσεις.

Για το 3^ο πείραμα το οποίο αφορά την δημιουργία και μελέτη διακροτημάτων απαιτούνται τα εξής:

1. Διπλή γεννήτρια ακουστικών συχνοτήτων.
2. Παλμογράφος.
3. Δύο ηχεία και μικρόφωνο.
4. Ηλεκτρονικός υπολογιστής με κατάλληλο interface (DataLogger) για την ψηφιακή καταγραφή του σήματος του μικροφώνου και την αποθήκευσή του.
5. Καλώδια BNC για τις απαραίτητες συνδέσεις.

Η πειραματική διάταξη για τη μελέτη του φαινομένου των διακροτημάτων απεικονίζεται στο Σχήμα 9.17.



Σχήμα 9.17 Πειραματική διάταξη για την καταγραφή και απεικόνιση του φαινομένου των διακροτημάτων.

9.4.3.2. Μετρήσεις

1^ο Πείραμα

1. Βεβαιωθείτε ότι το ηχείο είναι τοποθετημένο στο αριστερό άκρο του ηχητικού σωλήνα και εφάπτεται στο χείλος του. Οι ακροδέκτες του ηχείου θα πρέπει να είναι συνδεδεμένοι στη γεννήτρια συχνοτήτων. Κάτω από το ηχείο είναι στερεωμένο το μικρόφωνο, το οποίο μέσω κατάλληλου ενισχυτή συνδέεται στην είσοδο του παλμογράφου (Σχήμα 9.15).
2. Θέστε σε λειτουργία τη γεννήτρια συχνοτήτων, τον παλμογράφο και τον ενισχυτή του μικροφώνου. Επιλέξτε από τη γεννήτρια συχνοτήτων την ημιτονοειδή μορφή σήματος και ρυθμίστε αρχικά τη συχνότητα στα 500 Hz. Ρυθμίστε κατάλληλα από τη γεννήτρια την ένταση του σήματος, ώστε να ακούτε τον ηχητικό βόμβο συχνότητας 500 Hz που εκπέμπει το μεγάφωνο και διαδίδεται στο εσωτερικό του σωλήνα. Ο δημιουργούμενος ήχος ανιχνεύεται από το μικρόφωνο και μέσω του ενισχυτή απεικονίζεται ως ηλεκτρικό σήμα στην οθόνη του παλμογράφου. Το πλάτος του ημιτονοειδούς σήματος που παρατηρείτε στην οθόνη του παλμογράφου είναι ανάλογο της μεταβολής της πίεσης του ηχητικού κύματος.
3. Μετακινήστε σιγά – σιγά το έμβολο από το αριστερό άκρο του ηχητικού σωλήνα, παρατηρώντας ταυτόχρονα στον παλμογράφο τη μεταβολή του πλάτους του σήματος (απόσταση από κορυφή σε κορυφή της ημιτονοειδούς μορφής). Σταματήστε το έμβολο στη θέση εκείνη όπου παρατηρείτε μέγιστο πλάτος στην οθόνη του παλμογράφου, και καταγράψτε την απόσταση L_1 από το άκρο του σωλήνα στον Πίνακα μετρήσεων 9.4. Συνεχίστε να μετακινείτε το έμβολο προς τα δεξιά, μέχρι να παρατηρήσετε το επόμενο μέγιστο πλάτος στην οθόνη του παλμογράφου και καταγράψτε την αντίστοιχη θέση L_2 στην αντίστοιχη στήλη του Πίνακα μετρήσεων 9.4.
4. Υπολογίστε από τη σχέση 9.51 το μήκος κύματος που προκύπτει για τη συχνότητα των 500 Hz και καταχωρήστε την τιμή στην αντίστοιχη στήλη του πίνακα μετρήσεων. Υπολογίστε στη συνέχεια την ταχύτητα του ήχου από τη σχέση 9.52 και καταχωρίστε την τιμή στην τελευταία στήλη.
5. Επαναλάβετε την παραπάνω διαδικασία (βήματα 3 και 4) για τις υπόλοιπες τιμές της συχνότητας f που δίνονται στον Πίνακα μετρήσεων 9.4.

a/a	f (Hz)	L_1 (m)	L_2 (m)	λ (m)	v (m/s)
1	500				
2	600				
3	700				
4	800				
5	900				
6	1000				

Πίνακας 9.4 Πίνακας μετρήσεων για τον υπολογισμό της ταχύτητας διάδοσης του ήχου στον αέρα.

6. Από τις τιμές της ταχύτητας του ήχου που υπολογίσατε στην τελευταία στήλη για τις διαφορετικές συχνότητες, υπολογίστε τη μέση τιμή της ταχύτητας του ήχου στον αέρα

$$\bar{v} = \dots \dots \dots m/s$$

καθώς και την τυπική απόκλιση της μέσης τιμής από τη σχέση

$$\delta\bar{v} = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^6 (v - \bar{v})^2}{6(6 - 1)}}$$

Για τους υπολογισμούς σας, κατασκευάστε κατάλληλο βοηθητικό πίνακα. Γράψτε το τελικό αποτέλεσμα ως εξής

$$v = \bar{v} \pm \delta\bar{v} = (\dots \dots \dots \pm \dots \dots \dots) m/s$$

7. Μετρήστε με το θερμόμετρο τη θερμοκρασία περιβάλλοντος (ή εκτιμήστε τη σε περίπτωση που δεν υπάρχει διαθέσιμο θερμόμετρο) και υπολογίστε την ταχύτητα του ήχου στον αέρα βάσει της σχέσης 9.36 για τη θερμοκρασία αυτή.
8. Συγκρίνετε την τιμή που υπολογίσατε από τη θεωρητική σχέση 9.36, με τη μέση τιμή της ταχύτητας που υπολογίσατε πειραματικά στο βήμα 6, υπολογίζοντας την επί τοις εκατό διαφορά των δύο τιμών. Σχολιάστε ανάλογα.

2^ο Πείραμα

9. Τοποθετήστε το έμβολο σε απόσταση $L = 10$ cm από το αριστερό άκρο του σωλήνα. Μεταβάλλετε τη συχνότητα της γεννήτριας από τα 500 Hz έως και τα 750 Hz με βήμα 10 Hz κάθε φορά, και για κάθε μία από αυτές τις τιμές της συχνότητας, μετρήστε στην οθόνη του παλμογράφου το πλάτος του σήματος, δηλαδή το μισό του ύψους από κορυφή σε κορυφή της ημιτονοειδής καμπύλης που παρατηρείτε. Καταχωρίστε τις αντίστοιχες τιμές στον Πίνακα μετρήσεων 9.5.
10. Αφού τελειώσετε τις μετρήσεις σας, θέστε εκτός λειτουργίας όλα τα όργανα που χρησιμοποιήσατε (παλμογράφο, γεννήτρια και ενισχυτή).
11. Χαράξτε σε χιλιοστομετρικό χαρτί την καμπύλη συντονισμού $A=A(f)$, επιλέγοντας κατάλληλες κλίμακες.
12. Από την καμπύλη συντονισμού του ηχητικού σωλήνα, υπολογίστε το εύρος συντονισμού

$$\delta f = f_2 - f_1 = \dots \dots \dots Hz$$

όπου οι συχνότητες f_1 και f_2 αντιστοιχούν στο μισό του μέγιστου πλάτους της καμπύλης συντονισμού.

f (Hz)	A (mV)	f (Hz)	A (mV)
500		630	
510		640	
520		650	
530		660	
540		670	
550		680	
560		690	
570		700	
580		710	
590		720	
600		730	
610		740	
620		750	

Πίνακας 9.5 Πίνακας μετρήσεων για τη χάραξη της καμπύλης συντονισμού.

3^ο Πείραμα

13. Συνδέστε τους ακροδέκτες των δύο ηχείων στις εξόδους σήματος των δύο γεννητριών ακουστικών συχνοτήτων. Η διακλάδωση του καλωδίου μας επιτρέπει να συνδέσουμε την έξοδο κάθε γεννήτριας στα δύο κανάλια του παλμογράφου, προκειμένου να απεικονίσουμε ταυτόχρονα τα δύο ακουστικά σήματα. Βεβαιωθείτε ότι ο διακόπτης λειτουργίας του συστήματος συλλογής δεδομένων (Science Workshop 500) στο πίσω μέρος της συσκευής είναι στη θέση ON. Στην επιφάνεια εργασίας του H/Y διπλοπατήστε στο εικονίδιο Beats, προκειμένου να ξεκινήσει το πρόγραμμα συλλογής και απεικόνισης του σήματος του μικροφώνου. Τα ηχεία και το μικρόφωνο πρέπει να είναι τοποθετημένα όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 9.17.
14. Θέστε σε λειτουργία τις γεννήτριες συχνοτήτων και τον παλμογράφο. Επιλέξτε στις δύο γεννήτριες την ημιτονοειδή μορφή σήματος και ρυθμίστε αρχικά τις συχνότητες των δύο σημάτων στα 498 Hz. Από τα ηχεία θα ακουστεί ένας χαρακτηριστικός διαρκής ήχος της συχνότητας αυτής. Στην οθόνη του παλμογράφου μπορείτε να δείτε τα δύο αρμονικά σήματα και μπορείτε, ρυθμίζοντας τον περιστροφέα AMPLITUDE στις δύο γεννήτριες, να επιτύχετε ίδια πλάτη και για τα δύο σήματα. Τα δύο αυτά αρμονικά σήματα ίδιου πλάτους και συχνότητας, μετατρέπονται από τα ηχεία σε ηχητικά κύματα ίδιας έντασης και συχνότητας. Το ηχητικό αποτέλεσμα, δηλαδή ο ήχος που ακούμε και μπορούμε να καταγράψουμε με το μικρόφωνο, είναι ένα ηχητικό κύμα της ίδιας συχνότητας (498 Hz) και διπλάσιου πλάτους.
15. Ρυθμίστε τη συχνότητα της 2^{ης} γεννήτριας στα 502 Hz. Θα ακούσετε τότε έναν βόμβο του οποίου η ένταση αυξομειώνεται με το χρόνο (διακροτήματα). Στο πρόγραμμα συλλογής δεδομένων DataStudio, πατήστε START ώστε να αρχίσει να καταγράφεται το σήμα του μικροφώνου και ύστερα από λίγα

δευτερόλεπτα πατήστε STOP. Σύροντας το ποντίκι πάνω στην κλίμακα του χρόνου έχετε τη δυνατότητα να μεγεθύνετε το γράφημα, ώστε να απεικονίσετε με λεπτομέρεια το αποτέλεσμα της συμβολής. Μετρήστε την περίοδο του διαμορφωμένου ημιτονοειδούς σήματος T_σ καθώς και την περίοδο του διακροτήματος T_δ .

$$T_\sigma = \dots \dots \dots \text{ ms}$$

$$T_\delta = \dots \dots \dots \text{ ms}$$

- Υπολογίστε τη συχνότητα του διαμορφωμένου σήματος f_σ καθώς και τη συχνότητα του διακροτήματος f_δ και συγκρίνετε τις πειραματικές σας τιμές με τις αντίστοιχες θεωρητικές.
- Αυξήστε τη συχνότητα στα 506 Hz και επαναλάβετε τα βήματα 15 και 16. Αυξήστε τη συχνότητα της 2^{ης} γεννήτριας έτσι ώστε να μην μπορείτε πλέον να ακούσετε τα διακροτήματα. Ποια είναι η μέγιστη τιμή της συχνότητας των διακροτημάτων $f_{\delta,\max}$ που γίνεται αντιληπτή;

$$f_{\delta,\max} = \dots \dots \dots \text{ Hz}$$

- ΠΡΟΕΡΑΙΤΙΚΑ: προκειμένου να επεξεργαστείτε ξεχωριστά τις καταγραφές των διακροτημάτων από το μικρόφωνο, για διάφορους συνδυασμούς των συχνοτήτων των δύο γεννητριών, μπορείτε να βρείτε τα αρχεία δεδομένων (σε format txt) [εδώ](#). Η συχνότητα δειγματοληψίας των μετρήσεων είναι 5000 Hz, δηλαδή καταγράφεται από το μικρόφωνο μία μέτρηση κάθε 0.2 ms. Περιλαμβάνονται συνολικά 9 καταγραφές και το όνομα του κάθε αρχείου αντιστοιχεί στις 2 συχνότητες των γεννητριών. Για παράδειγμα, το αρχείο 498_502.txt περιέχει την καταγραφή του μικροφώνου όπου οι δύο γεννήτριες ρυθμίστηκαν στα 498 και 502 Hz, αντίστοιχα.

9.4.4. Ερωτήσεις – Ασκήσεις

- Πως μπορείτε να βρείτε την απόσταση σας από μια αστραπή;
- Υπολογίστε την ταχύτητα του ήχου από τη σχέση 9.36 για θερμοκρασία $T = 0 \text{ }^\circ\text{C}$.
- Ποια η συχνότητα των διακροτημάτων που προκύπτουν από τη συμβολή δύο ηχητικών κυμάτων 1250 Hz και 1262 Hz;

9.5. Γεωμετρική οπτική – Λεπτοί φακοί

9.5.1. Σύντομη ανασκόπηση της θεωρίας

9.5.1.1. Γενικά περί οπτικής

Η οπτική αποτελεί το κομμάτι εκείνο της Φυσικής που πραγματεύεται τα φαινόμενα τα σχετικά με το φως και τη διάδοσή του, καθώς και την αλληλεπίδρασή του με την ύλη, δηλαδή της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας που γίνεται αντιληπτή από το αισθητήριο της όρασης. Σήμερα είναι αποδεκτό ότι το φως συμπεριφέρεται με δυικό χαρακτήρα, δηλαδή ως κύμα αλλά και ως σωματίο (φωτόνιο). Σε κάποια φαινόμενα επικρατεί η κυματική φύση του φωτός ενώ σε κάποια άλλα η σωματιδιακή του φύση. Η κυματική φύση του φωτός ερμηνεύεται από την ηλεκτρομαγνητική θεωρία που διατυπώθηκε από τον Maxwell, σύμφωνα με την οποία το φως είναι ηλεκτρομαγνητικό κύμα το οποίο εκπέμπεται από φωτεινές πηγές και διαδίδεται στο χώρο με ταχύτητα που για το κενό έχει την τιμή

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s} (\approx 3.00 \times 10^8 \text{ m/s})$$

Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα αποτελούνται από δύο χωροχρονικά μεταβαλλόμενα πεδία, ενός ηλεκτρικού πεδίου με ένταση E και ενός μαγνητικού πεδίου με ένταση B τα οποία είναι κάθετα μεταξύ τους. Τα δύο αυτά κύματα, στην περίπτωση διάδοσης του φωτός στο κενό, έχουν την ίδια φάση και διαδίδονται με την ίδια ταχύτητα c . Εντός της ύλης, η ταχύτητα διάδοσης του φωτός (και κατ' επέκταση όλων των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων) είναι μικρότερη του c και εξαρτάται από το μήκος κύματος λ (διασκεδασμός).

Το πηλίκο της ταχύτητας c του φωτός στο κενό δια της ταχύτητας v εντός υλικού ονομάζεται δείκτης διάθλασης του υλικού

$$n = \frac{c}{v} \quad (9.53)$$

Η Γεωμετρική Οπτική αποτελεί κλάδο της Οπτικής, βάσει της οποίας η περιγραφή πολλών κυματικών φαινομένων μπορεί να απλοποιηθεί πάρα πολύ με την παραδοχή ότι το φως διαδίδεται υπό μορφή φωτεινών ακτίνων. Ο ισχυρισμός αυτός είναι εφαρμόσιμος όταν οι χρησιμοποιούμενες γεωμετρικές διαστάσεις σε ένα πείραμα είναι κατά πολύ μεγαλύτερες από το μήκος κύματος του φωτός. Οι φωτεινές αυτές ακτίνες ακολουθούν ευθύγραμμους δρόμους σε οπτικώς ισότροπα μέσα, όπου η ταχύτητα διάδοσης του κύματος παραμένει σταθερή σε ολόκληρη την περιοχή του υλικού. Ισότροπο χαρακτηρίζεται ένα υλικό μέσο του οποίου οι ιδιότητες είναι ανεξάρτητες από την κατεύθυνση. Έτσι, τα φαινόμενα της ανάκλασης και της διάθλασης εξετάζονται από τη γεωμετρική οπτική, χωρίς να λαμβάνονται υπόψη τα φαινόμενα της περίθλασης και της συμβολής του φωτός που ερμηνεύονται από την κυματική οπτική.

9.5.1.2. Ανάκλαση και διάθλαση του φωτός

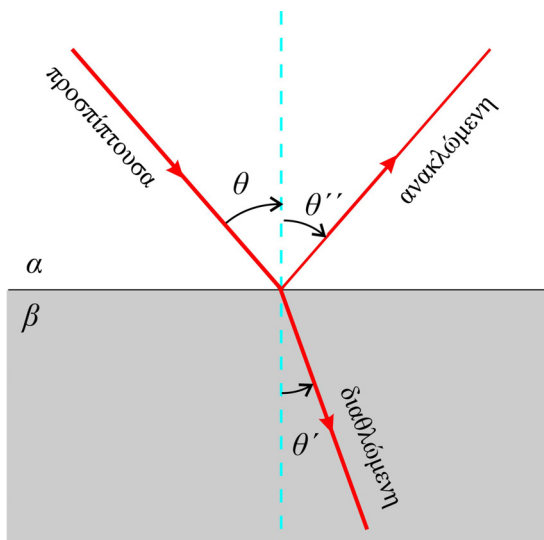
Όταν μια φωτεινή ακτίνα προσπίπτει σε μια ομαλή επιφάνεια η οποία διαχωρίζει δύο διαφανή υλικά (π.χ. αέρα και γυαλί ή νερό και γυαλί), η ακτίνα αφού διαδοθεί διαμέσου του πρώτου υλικού, εν μέρει θα ανακλαστεί και εν μέρει θα διαδοθεί (διαθλαστεί) στο δεύτερο υλικό (Σχήμα 9.18). Αν θ , θ'' και θ' είναι οι γωνίες που σχηματίζουν η προσπίπτουσα, η ανακλώμενη και η διαθλώμενη ακτίνα αντίστοιχα, ως προς την κάθετη στη διαχωριστική επιφάνεια των δύο υλικών, ισχύουν οι ακόλουθοι νόμοι.

(α). Οι ευθείες που αντιστοιχούν στην προσπίπτουσα, την ανακλώμενη και τη διαθλώμενη ακτίνα κείτονται όλες στο ίδιο επίπεδο στο οποίο βρίσκεται και η κάθετος στην επιφάνεια.

(β). Η γωνία ανάκλασης θ'' είναι ίση με τη γωνία πρόσπτωσης θ , για όλα τα μήκη κύματος και για οποιοδήποτε ζεύγος υλικών με κοινή διαχωριστική επιφάνεια

$$\theta = \theta'' \quad (9.54)$$

Η παραπάνω σχέση σε συνδυασμό με το γεγονός ότι η προσπίπτουσα, η ανακλώμενη και η κάθετος στη διαχωριστική επιφάνεια βρίσκονται όλες στο ίδιο επίπεδο, αποτελούν το νόμο της ανάκλασης.



Σχήμα 9.18 Η προσπίπτουσα φωτεινή δέσμη στη διαχωριστική επιφάνεια δύο υλικών α και β , εν μέρει θα ανακλαστεί υπό γωνία θ'' ίδια με τη γωνία πρόσπτωσης και εν μέρει θα διέλθει στο δεύτερο υλικό σχηματίζοντας ως προς την κάθετο μικρότερη γωνία από τη γωνία πρόσπτωσης.

(γ). Για συγκεκριμένο ζεύγος υλικών και μονοχρωματικό φως (συγκεκριμένο μήκος κύματος), έχει βρεθεί πειραματικά ότι ο λόγος των ημιτόνων των γωνιών θ και θ' ισούται με το αντίστροφο του λόγου των δύο δεικτών διάθλασης των υλικών, δηλαδή

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta'} = \frac{n_\beta}{n_\alpha}$$

ή

$$n_\alpha \sin\theta = n_\beta \sin\theta' \quad (9.55)$$

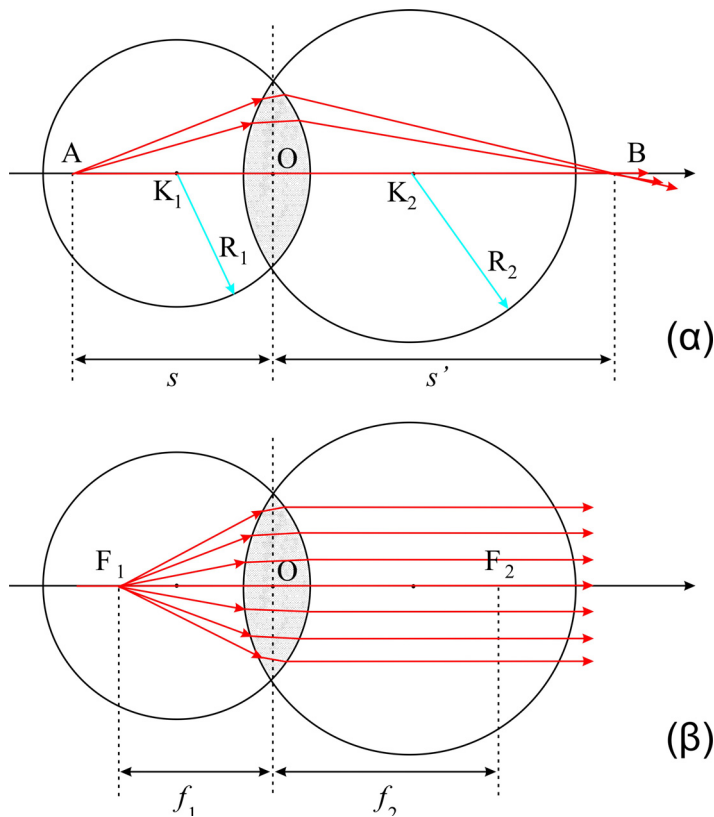
Η παραπάνω σχέση συνδυαζόμενη με το γεγονός ότι η προσπίπτουσα, η διαθλώμενη και η κάθετος στη διαχωριστική επιφάνεια βρίσκονται όλες στο ίδιο επίπεδο, ονομάζεται νόμος διάθλασης ή νόμος του Snell, προς τιμή του W. Snell που τον ανακάλυψε.

9.5.1.3. Λεπτοί Φακοί

Κάθε διαφανές υλικό που περικλείεται από δύο καμπύλες επιφάνειες (κοίλες ή κυρτές), μπορεί να ονομαστεί φακός. Οι επιφάνειες αυτές είναι σφαιρικές αν και μερικές φορές μπορεί να είναι κυλινδρικές ή μία από αυτές να είναι επίπεδη. Αν ο φακός βρίσκεται βυθισμένος σε ένα οπτικό μέσο (π.χ. αέρας), τότε κάθε διαχωριστική επιφάνεια θα έχει ως αποτέλεσμα τη διάθλαση της φωτεινής δέσμης που διέρχεται από το σύστημα αυτό και τη δημιουργία ενός πραγματικού ή φανταστικού ειδώλου για το φωτεινό αντικείμενο. Κατάλληλος συνδυασμός διαφορετικών σφαιρικών επιφανειών οδηγεί στην κατασκευή μιας μεγάλης ποικιλίας χρήσιμων οπτικών οργάνων, όπως η φωτογραφική μηχανή, το μικροσκόπιο, το τηλεσκόπιο, κ.ά. (Χριστοδουλίδης, 1995).

Στο Σχήμα 9.19 απεικονίζονται τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά ενός αμφίκυρτου (συγκεντρωτικού), μη συμμετρικού ($R_1 \neq R_2$) φακού. Τα κέντρα καμπυλότητας K_1 και K_2 των δύο διαθλαστικών σφαιρικών επιφανειών του φακού με ακτίνες καμπυλότητας R_1 και R_2 αντίστοιχα, ορίζουν μια νοητή γραμμή γνωστή ως κύριος άξονας του φακού. Το σημείο τομής O του κύριου άξονα με το κάθετο προς αυτόν επίπεδο, το διερχόμενο από το μέσο του φακού, ονομάζεται οπτικό κέντρο. Κάθε ακτίνα που περνά από το οπτικό κέντρο του φακού δεν παθαίνει διάθλαση, με αποτέλεσμα να συνεχίζει την ευθύγραμμη αρχική της πορεία. Ως πρώτη

εστία F_1 ενός φακού ορίζεται το σημείο εκείνο στο οποίο αν θέσουμε μια σημειακή φωτεινή πηγή, τότε όλες οι φωτεινές ακτίνες ύστερα από τη διέλευσή τους από το φακό θα διαδοθούν ως μία παράλληλη φωτεινή δέσμη. Το διάστημα μεταξύ της εστίας F_1 και του οπτικού κέντρου O του φακού ονομάζεται εστιακή απόσταση f_1 του φακού. Αντίστοιχα, η δεύτερη εστία F_2 είναι το κοινό σημείο στο οποίο συγκλίνει μια παράλληλη φωτεινή δέσμη που προσπίπτει στο φακό και η εστιακή απόσταση f_2 το διάστημα OF_2 .



Σχήμα 9.19 (α) Γεωμετρικά χαρακτηριστικά ενός συγκεντρωτικού φακού (κέντρα και ακτίνες καμπυλότητας, οπτικό κέντρο). Φωτεινές ακτίνες που φεύγουν από το σημείο A που βρίσκεται σε απόσταση s από το οπτικό κέντρο O , διαθλώνται από το φακό και συγκλίνουν σε απόσταση s' από την άλλη πλευρά του φακού. (β) Σημειακή φωτεινή πηγή στην εστία F_1 του φακού δημιουργεί δέσμη παράλληλων ακτίνων όταν διέλθει από αυτόν.

Ανάλογα με το σχήμα της εγκάρσιας διατομής ενός φακού και το μέγεθός της περί το οπτικό κέντρο σε σχέση με τα άκρα της, διακρίνουμε δύο βασικές κατηγορίες φακών:

(α) τους συγκλίνοντες ή συγκεντρωτικούς φακούς και

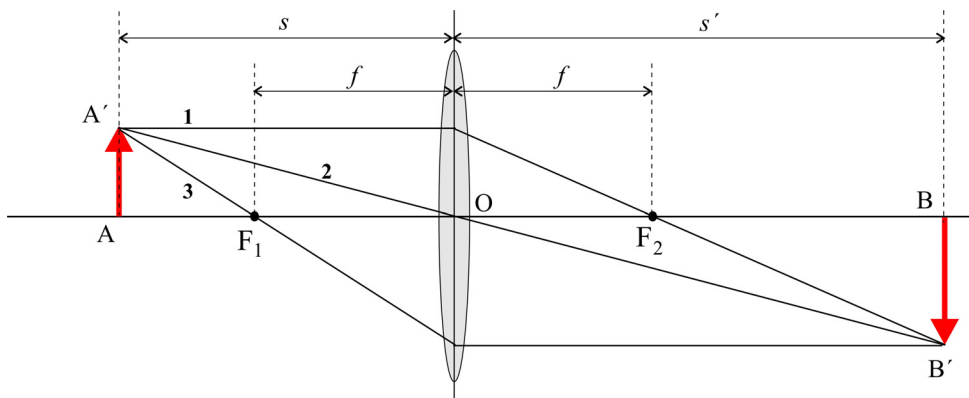
(β) τους αποκλίνοντες ή αποκεντρωτικούς φακούς.

Ο συγκεντρωτικός φακός είναι παχύτερος στη μέση απ' ό,τι στα άκρα, προκαλώντας έτσι την εστίαση μιας παράλληλης φωτεινής δέσμης στην εστία F_2 στην άλλη πλευρά του φακού. Αντίθετα, ένας αποκεντρωτικός φακός είναι λεπτότερος στο κέντρο απ' ό,τι στα άκρα και προκαλεί την απόκλιση προσπίπτουσας φωτεινής δέσμης. Το πάχος ενός φακού συγκρινόμενο με τις ακτίνες καμπυλότητάς του παίζει προσδιοριστικό ρόλο στο πότε ένας φακός μπορεί να θεωρηθεί λεπτός και πότε παχύς, διαφοροποιώντας αντίστοιχα τις διάφορες σχέσεις – εξισώσεις που αναφέρονται στους φακούς. Στη συνέχεια θα περιοριστούμε μόνο στους λεπτούς φακούς, δηλαδή σε αυτούς που έχουν μικρό πάχος σε σχέση με την ακτίνα καμπυλότητας, απλουστεύοντας αρκετά τις χρησιμοποιούμενες μαθηματικές σχέσεις. Στην περίπτωση των λεπτών φακών οι εστιακές αποστάσεις f_1 και f_2 είναι ίσες.

9.5.1.4. Γεωμετρική κατασκευή ειδώλου αμφίκυρτου λεπτού φακού

Θεωρούμε ένα λεπτό και συμμετρικό συγκεντρωτικό φακό και ένα φωτεινό αντικείμενο AA' . Η θέση και το μέγεθος του ειδώλου BB' μπορούν να καθοριστούν πλήρως, σχεδιάζοντας μερικές χαρακτηριστικές ακτίνες προερχόμενες από σημείο του αντικειμένου που δε βρίσκεται πάνω στον οπτικό άξονα και βρίσκοντας στη συνέχεια την κοινή τομή τους, αφού αυτές διέλθουν από το φακό. Σύμφωνα με τη γραφική αυτή μέθοδο (Σχήμα 9.20):

(α) Κάθε ακτίνα παράλληλη προς τον κύριο άξονα του φακού (ακτίνα 1) μετά τη διάθλαση της από το φακό, διέρχεται από τη δεύτερη κύρια εστία F_2 του φακού.



Σχήμα 9.20 Γραφική μέθοδος κατασκευής ειδώλου αμφίκυρτου λεπτού φακού.

(β) Κάθε ακτίνα διερχόμενη από το οπτικό κέντρο O (ακτίνα 2) δε θα υποστεί διάθλαση αλλά θα συνεχίσει την ευθύγραμμη πορεία της.

(γ) Κάθε ακτίνα που περνά από την πρώτη κύρια εστία του φακού (ακτίνα 3), μετά τη διάθλασή της θα ακολουθήσει παράλληλη πορεία προς τον κύριο άξονα του φακού.

9.5.1.5. Βασικές εξισώσεις λεπτών φακών

Η εστιακή απόσταση f ενός λεπτού φακού μπορεί να προσδιοριστεί από τον τύπο των φακών (ή τύπο του Gauss)

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} \quad (9.56)$$

όπου s είναι η απόσταση φακού – αντικειμένου και s' η απόσταση φακού – ειδώλου. Το αντίστροφο της εστιακής απόστασης του φακού ορίζεται ως η ισχύς του φακού ($I = 1/f$) και η μονάδα μέτρησης της είναι η διοπτρία που ισούται με 1m^{-1} .

Για να κατασκευαστεί ένας φακός με κάποια συγκεκριμένη τιμή της f , θα πρέπει να είναι γνωστός ο δείκτης διάθλασης n του υλικού του φακού και να γίνει λείανση του φακού για συγκεκριμένες τιμές των ακτίνων καμπυλότητας του, R_1 και R_2 . Η συσχέτιση των παραμέτρων αυτών εκφράζεται μέσω του τύπου των κατασκευαστών των φακών

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (9.57)$$

Κατά σύμβαση, όλες οι κυρτές επιφάνειες θεωρούνται ότι έχουν θετική ακτίνα καμπυλότητας, ενώ αντίθετα, όλες οι κοίλες επιφάνειες έχουν αρνητική ακτίνα καμπυλότητας. Ως γραμμική μεγέθυνση M ενός φακού ορίζουμε το λόγο

$$M = \frac{BB'}{AA'} \quad (9.58)$$

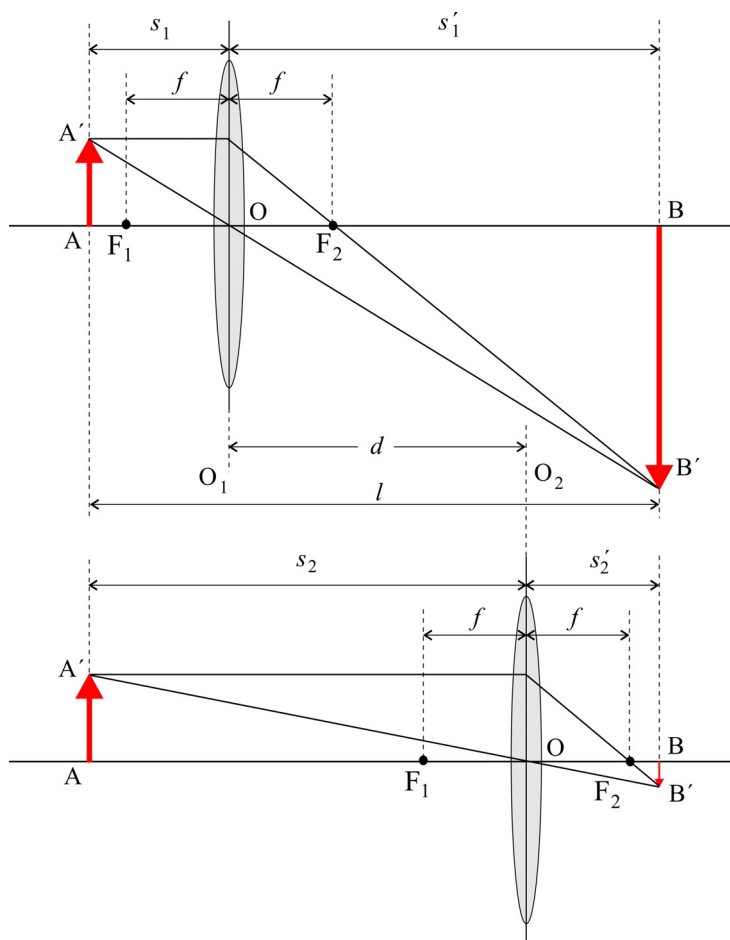
όπου AA' και BB' το μέγεθος του αντικειμένου και του ειδώλου αντίστοιχα (βλ. Σχήμα 9.20). Ισοδύναμες μορφές της παραπάνω σχέσης, όπως προκύπτουν από τη γεωμετρία του σχήματος 9.20, είναι

$$M = \frac{s'}{s} = \frac{s' - f}{f} = \frac{f}{s - f} \quad (9.59)$$

9.5.2. Σκοπός του πειράματος

Σκοπός του πειράματος είναι ο πειραματικός προσδιορισμός (α) της εστιακής απόστασης ενός συγκλίνοντος φακού με τη μέθοδο Bessel και (β) της εστιακής απόστασης και της θέσης ενός συγκλίνοντα φακού που βρίσκεται στο εσωτερικό ενός σωλήνα, τα άκρα του οποίου είναι φραγμένα με διαφανές υλικό.

Η μέθοδος Bessel βασίζεται στο γεγονός ότι, όταν η απόσταση αντικειμένου οθόνης (πάνω στην οποία σχηματίζεται το είδωλο) είναι μεγαλύτερη από το τετραπλάσιο της εστιακής απόστασης f του φακού, τότε, όπως δείχνει το Σχήμα 9.21, υπάρχουν δύο διαφορετικές θέσεις O_1 και O_2 του φακού για τις οποίες θα σχηματίζεται στην οθόνη ευκρινές το είδωλο BB' του αντικειμένου AA' . Όταν ο φακός τοποθετηθεί στη θέση O_1 , τότε πάνω στην οθόνη σχηματίζεται μεγεθυμένο είδωλο, ενώ όταν ο φακός τοποθετηθεί στη θέση O_2 το είδωλο που σχηματίζεται στην οθόνη είναι μικρότερο και αντεστραμμένο του αντικειμένου. Αν d είναι η απόσταση μεταξύ των δύο θέσεων του φακού, τότε αποδεικνύεται ότι η εστιακή απόσταση f του φακού θα δίνεται από τη σχέση



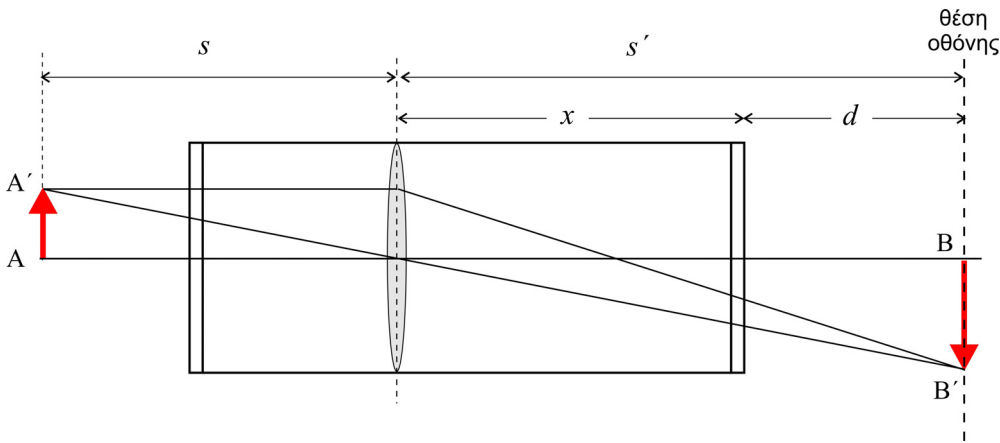
Σχήμα 9.21 Μέθοδος Bessel για τον προσδιορισμό εστιακής απόστασης λεπτού αμφίκυρτου φακού.

$$f = \frac{l^2 - d^2}{4l} \quad (9.60)$$

η οποία είναι γνωστή ως σχέση Bessel και ισχύει υπό την προϋπόθεση ότι $l > 4f$.

Μεταβάλλοντας επομένως την απόσταση l μεταξύ φωτεινού αντικείμενου και οθόνης και μετρώντας κάθε φορά την απόσταση μεταξύ των δύο θέσεων O_1 και O_2 του φακού, μπορούμε από την κλίση κ της γραφικής παράστασης της σχέσης $l^2 - d^2 = g(l)$, να προσδιορίσουμε την εστιακή απόσταση f του φακού ($\kappa = 4f$). Η παραπάνω μέθοδος υπολογισμού της εστιακής απόστασης είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην περίπτωση φακών με μεγάλο πάχος, επειδή στη σχέση 9.60 δεν υπεισέρχεται η θέση του οπτικού κέντρου O του φακού, του οποίου ο προσδιορισμός παρουσιάζει δυσκολίες.

Για τον υπολογισμό της θέσης και της εστιακής απόστασης φακού ο οποίος βρίσκεται στο εσωτερικό σωλήνα, τοποθετούμε ένα φωτεινό αντικείμενο (π.χ. το αναμμένο νήμα μιας λάμπας) στην αριστερή πλευρά του σωλήνα και μία οθόνη στη δεξιά πλευρά και σε κατάλληλη απόσταση d , έτσι ώστε να σχηματιστεί ευκρινώς το είδωλο του νήματος πάνω σε αυτήν. Η γεωμετρία της διάταξης δίνεται στο Σχήμα 9.22.



Σχήμα 9.22 Οπτικός σωλήνας που φέρει συγκλίνοντα φακό στο εσωτερικό του και σε απόσταση x από το δεξί του άκρο.

Όπως προκύπτει από το σχήμα 9.22, η απόσταση φακού – οθόνης θα ισούται με

$$s' = x + d \quad (9.61)$$

όπου x είναι η άγνωστη απόσταση του φακού από το δεξί άκρο του σωλήνα. Αν στον τύπο των φακών 9.56 πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη με s' , θα έχουμε

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{s'}{s} + 1 = \frac{s'}{f}$$

και σύμφωνα με τη σχέση 9.59 που δίνει τη μεγέθυνση του φακού προκύπτει

$$M = \frac{s'}{f} - 1$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση 9.61 στην παραπάνω σχέση προκύπτει τελικά

$$M = \frac{x + d}{f} - 1 = \frac{x + d - f}{f} \Rightarrow$$

$$M = \frac{1}{f}d + \frac{x-f}{f} \quad (9.62)$$

Η γραφική παράσταση επομένως της σχέσης $M = M(d)$ θα είναι ευθεία της μορφής

$$M = \kappa \cdot d + \beta, \text{ με κλίση}$$

$$\kappa = \frac{1}{f} \quad (9.63)$$

και τεταγμένη

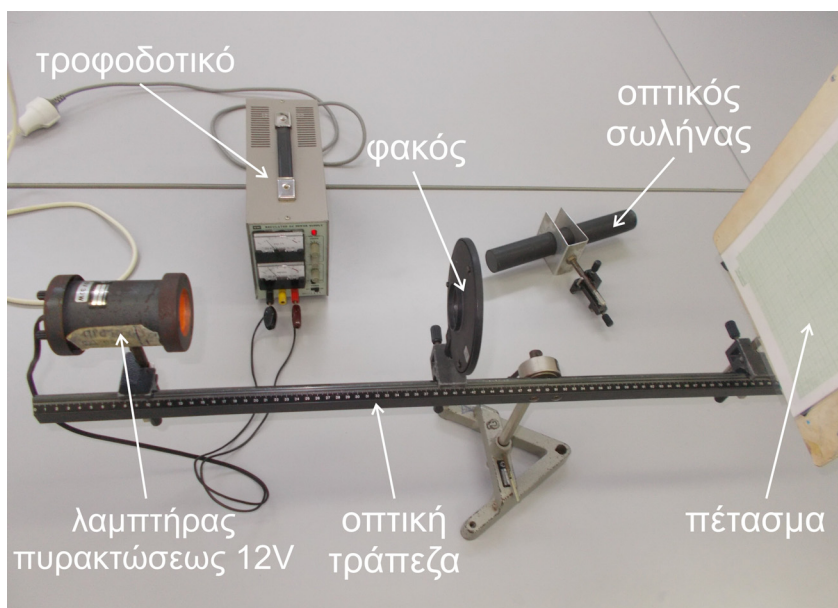
$$\beta = \frac{x-f}{f} \quad (9.64)$$

9.5.3. Πειραματικό μέρος

9.5.3.1. Χρησιμοποιούμενα όργανα

1. Οπτική τράπεζα μήκους 1m.
2. Λάμπα πυρακτώσεως 12 V, το νήμα της οποίας παίζει το ρόλο του φωτεινού αντικειμένου και κατάλληλο τροφοδοτικό για την τροφοδοσία της.
3. Δύο συγκεντρωτικοί φακοί διαφορετικών εστιακών αποστάσεων.
4. Πέτασμα (οθόνη) που στην επιφάνεια του έχει χιλιοστομετρικό χαρτί για τη μέτρηση των διαστάσεων του ειδώλου.
5. Οπτικός σωλήνας που φέρει συγκεντρωτικό φακό στο εσωτερικό του.
6. Κατάλληλα στηρίγματα των φακών, του λαμπτήρα και του πετάσματος για την τοποθέτησή τους πάνω στην οπτική τράπεζα.
7. Βαθμονομημένος χάρακας για τη μέτρηση των αποστάσεων.

Η πειραματική διάταξη απεικονίζεται στο Σχήμα 9.23.



Σχήμα 9.23 Πειραματική διάταξη για πειράματα με λεπτούς φακούς.

9.5.3.2. Μετρήσεις

1^ο πείραμα

1. Τοποθετήστε τη λάμπα πυρακτώσεως και τη βαθμονομημένη οθόνη, με τη χρησιμοποίηση των στηριγμάτων, στην οπτική τράπεζα και σε απόσταση $l = 80$ cm μεταξύ τους.
ΠΡΟΣΟΧΗ: Λάβετε υπόψη ότι η απόσταση μεταξύ νήματος και εμπρόσθιου ανοίγματος της λάμπας είναι 2 cm.
2. Τοποθετήστε το συγκεντρωτικό φακό ($f = 5$ cm) προς το μέρος της λάμπας, μέχρι που το είδωλο του νήματος να σχηματιστεί με ευκρίνεια πάνω στην οθόνη (Σχήμα 9.21, θέση O_1). Μετρήστε την απόσταση φακού – οθόνης s_1' και καταχωρήστε την τιμή στον Πίνακα μετρήσεων 9.6.
3. Μετακινήστε το φακό προς το μέρος της οθόνης και προσδιορίστε τη δεύτερη θέση O_2 για την οποία το είδωλο του νήματος το οποίο είναι μικρό και αντεστραμμένο, σχηματίζεται με αρκετή ευκρίνεια στην οθόνη. Μετρήστε τη νέα απόσταση s_2' φακού – οθόνης και καταχωρήστε τη στον Πίνακα μετρήσεων 9.6.
4. Επαναλάβετε τα βήματα 1 έως 3 για τις υπόλοιπες τιμές της απόστασης l νήματος – οθόνης και γράψτε όλα τα αποτελέσματα στον Πίνακα μετρήσεων 9.6. Υπολογίστε στις δύο τελευταίες στήλες την απόσταση d μεταξύ των δύο θέσεων O_1 και O_2 , καθώς και την ποσότητα $l^2 - d^2$.
5. Σχεδιάστε σε χιλιοστομετρικό χαρτί τη γραφική παράσταση της σχέσης $l^2 - d^2 = g(l)$. Υπολογίστε την κλίση της ευθείας και στη συνέχεια την εστιακή απόσταση του φακού, με τη βοήθεια της σχέσης Bessel 9.60.
6. Συγκρίνετε την τιμή που βρήκατε με την τιμή της εστιακής απόστασης που αναγράφεται στη βάση του φακού ($f = 5$ cm), υπολογίζοντας την επί τοις εκατό διαφορά των δύο τιμών.

a/a	l (cm)	s_1' (cm)	s_2' (cm)	$d = s_1' - s_2'$ (cm)	$l^2 - d^2$ (cm ²)
1	80				
2	70				
3	60				
4	50				
5	40				

Πίνακας 9.6 Πίνακας μετρήσεων για τον υπολογισμό της εστιακής απόστασης φακού με τη μέθοδο Bessel.

2^ο πείραμα

7. Τοποθετήστε το δεύτερο συγκεντρωτικό φακό εστιακής απόστασης $f = 15$ cm σε απόσταση $s = 20$ cm από το νήμα του λαμπτήρα και μετακινήστε την οθόνη, έτσι ώστε να σχηματιστεί ευκρινές το είδωλο του νήματος πάνω της. Μετρήστε την απόσταση s' μεταξύ φακού – οθόνης, καθώς και το μήκος του φωτεινού ειδώλου BB' που σχηματίζεται πάνω στην οθόνη και καταχωρήστε τα αποτελέσματα στον Πίνακα μετρήσεων 9.7.
8. Υπολογίστε από τον τύπο της μεγέθυνσης (σχέση 9.59)

$$\frac{AA'}{BB'} = \frac{s}{s'}$$

το μήκος του αντικειμένου AA' και καταχωρήστε το αποτέλεσμα στην τελευταία στήλη του Πίνακα μετρήσεων 9.7.

9. Επαναλάβετε τα βήματα 7, 8 για τις υπόλοιπες τιμές της απόστασης s μεταξύ νήματος – φακού που αναγράφονται στον Πίνακα μετρήσεων 9.7.
10. Υπολογίστε τη μέση τιμή $\overline{AA'}$ του μήκους του φωτεινού αντικειμένου

$$\overline{AA'} = \dots \dots \dots \text{ cm}$$

καθώς και την τυπική απόκλιση της μέσης τιμής. Εκτιμήστε το μήκος του φωτεινού αντικειμένου. Είναι λογική η τιμή που υπολογίσατε;

a/a	s (cm)	s' (cm)	BB' (cm)	AA' (cm)
1	20			
2	25			
3	30			
4	35			
5	40			

Πίνακας 9.7 Πίνακας μετρήσεων για τον υπολογισμό του μήκους φωτεινού νήματος.

11. Μετρήστε το μήκος του σωλήνα και εκτιμήστε σε ποια περίπου απόσταση βρίσκεται ο φακός από το δεξιό άκρο του σωλήνα.
12. Αντικαταστήστε το φακό με τον οπτικό σωλήνα και μετακινήστε τον πάνω στην οπτική τράπεζα μέχρι να σχηματιστεί ευκρινές είδωλο στην οθόνη. Μετρήστε την απόσταση d μεταξύ του δεξιού άκρου του σωλήνα και της οθόνης, καθώς και το μήκος BB' του φωτεινού ειδώλου πάνω στην οθόνη. Καταχωρίστε τις μετρήσεις σας στον Πίνακα μετρήσεων 9.8.

a/a	d (cm)	BB' (cm)	M
1			
2			
3			
4			
5			

Πίνακας 9.8 Πίνακας μετρήσεων για τον υπολογισμό της εστιακής απόστασης και της θέσης συγκλίνοντος φακού στο εσωτερικό οπτικού σωλήνα.

13. Επαναλάβετε το προηγούμενο βήμα για άλλες 4 τιμές της απόστασης d , μετακινώντας κάθε φορά την οθόνη και βρίσκοντας τη θέση του σωλήνα που δημιουργεί ευκρινές είδωλο στην οθόνη.
14. Υπολογίστε τη μεγέθυνση M από τη σχέση

$$M = \frac{BB'}{AA'}$$

και καταχωρίστε τα αποτελέσματα στην τελευταία στήλη του Πίνακα μετρήσεων 9.8. Στον παραπάνω υπολογισμό, $\overline{AA'}$ είναι η μέση τιμή του μεγέθους του νήματος που υπολογίσατε στο βήμα 10.

15. Χαράξτε τη γραφική παράσταση $M = f(d)$ σε χιλιοστομετρικό χαρτί και από την κλίση της ευθείας υπολογίστε την εστιακή απόσταση του φακού

$$f = \frac{1}{\kappa} \dots \dots \dots \text{cm}$$

16. Προσδιορίστε την τεταγμένη β της ευθείας και από τη σχέση 9.64 υπολογίστε την άγνωστη θέση x του φακού στον οπτικό σωλήνα. Είναι λογική η τιμή που βρήκατε, βάσει της εκτίμησης που κάνατε στο βήμα 11;
17. Με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων υπολογίστε εκ νέου την κλίση κ και την τεταγμένη β της ευθείας $M = \kappa \cdot d + \beta$. Από τις τιμές αυτές των κ και β υπολογίστε ξανά την εστιακή απόσταση f του φακού και την απόσταση x του φακού από το δεξί άκρο του σωλήνα.

9.5.4. Ερωτήσεις-Ασκήσεις

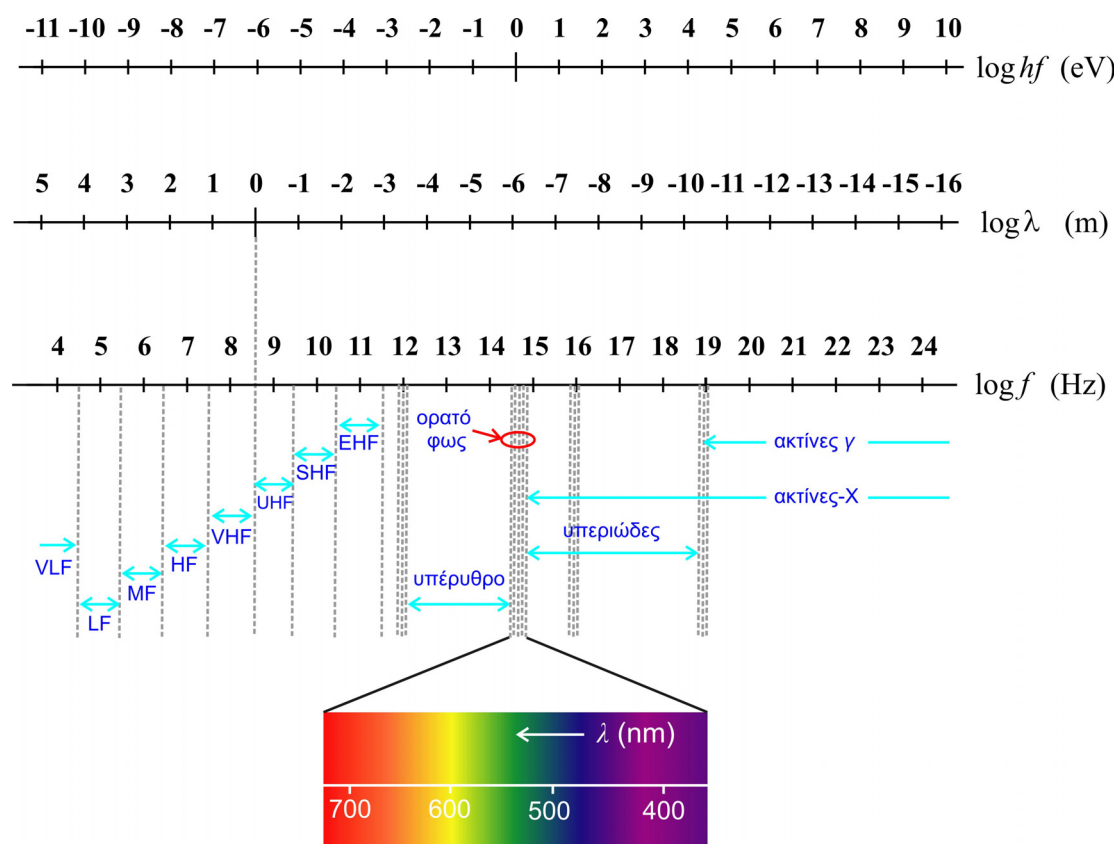
1. Σε ποια στάδια της πειραματικής διαδικασίας μπορεί να υπεισέρχονται σφάλματα;
2. Ξεκινώντας από τον τύπο των φακών $\frac{1}{f} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s'}$ και αντικαθιστώντας το s' από τη σχέση $l = s + s'$ (Σχήμα 9.21), αποδείξτε τη σχέση Bessel (9.60).
Υπόδειξη: στη δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς s που θα προκύψει, οι δύο ρίζες s_1 και s_2 αντιστοιχούν στις δύο θέσεις του φακού όπου σχηματίζεται ευκρινές είδωλο και σύμφωνα με το Σχήμα 9.21, $d = s_2 - s_1$.

9.6. Οπτικό φασματοσκόπιο

9.6.1. Συνοπτική ανασκόπηση της θεωρίας

9.6.1.1. Το ηλεκτρομαγνητικό φάσμα

Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα καλύπτουν ένα ευρύτατο φάσμα μηκών κύματος και συχνοτήτων. Τα ραδιοφωνικά και τηλεοπτικά κύματα, το ορατό φως, η υπέρυθη και υπεριώδης ακτινοβολία, τα μικροκύματα, οι ακτίνες X και γ αποτελούν τμήματα του ηλεκτρομαγνητικού (H/M) φάσματος (Σχήμα 9.24). Λόγω του τεράστιου εύρους συχνοτήτων, η πειραματική μελέτη της κάθε φασματικής περιοχής απαιτεί τη χρησιμοποίηση μιας πολύ μεγάλης ποικιλίας οργάνων, τα οποία είναι γνωστά ως φασματοσκόπια, φασματόμετρα, φασματογράφοι, φασματοφωτόμετρα, κ.λ.π. Όλες ωστόσο οι ακτινοβολίες έχουν τα γενικά χαρακτηριστικά των κυμάτων που διαδίδονται με την ταχύτητα του φωτός c (στο κενό), αλλά διαφέρουν στη συχνότητα f και στο μήκος κύματος λ .



Σχήμα 9.24 Φάσμα ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας σε δυνάμεις της συχνότητας f , του μήκους κύματος λ και της ενέργειας. Η τελευταία κλίμακα συνδέεται με την κλίμακα της συχνότητας μέσω της σχέσης $E = hf$, όπου $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ η σταθερά του Planck. Γενικά, τα όρια μεταξύ των ζωνών δεν είναι απολύτως καθορισμένα, διότι υπάρχει αλληλοεπικάλυψη μεταξύ διάφορων περιοχών του φάσματος. Για συχνότητες μικρότερες του υπέρυθρου έχουν χρησιμοποιηθεί συντομογραφίες, π.χ. F: συχνότητα, H: υψηλή, M: μεσαία, L: χαμηλή (βλ. Πίνακα Συντομούσεων).

Τα ραδιοκύματα εκτείνονται από μερικά Hz μέχρι περίπου 10^9 Hz. Σ' αυτά περιλαμβάνονται τα κύματα ραδιοφώνου AM, FM και τηλεόρασης. Η περιοχή των μικροκυμάτων η οποία εκτείνεται από 10^9 Hz έως 3×10^{11} Hz έχει ενδιαφέρον για τις τηλεπικοινωνίες, τα ραντάρ και τη ραδιοαστρονομία. Το ορατό φως, το οποίο μπορούμε και ανιχνεύουμε με γυμνό οφθαλμό, αποτελεί μια πολύ μικρή περιοχή του H/M φάσματος, η οποία όπως δείχνει ο Πίνακας 9.9, εκτείνεται από 390 nm έως 780 nm (Πίνακας 9.9).

Μια συνηθισμένη ταξινόμηση των φασμάτων στην περιοχή του ορατού φωτός, περιλαμβάνει τα φάσματα εκπομπής και τα φάσματα απορρόφησης. Κάθε μια από αυτές τις δύο κατηγορίες υποδιαιρείται σε συνεχή, γραμμικά και ταινιωτά φάσματα.

χρώμα	λ (nm) στο κενό	Συχνότητα, f (THz)
Κόκκινο	780-622	384-482
Πορτοκαλί	622-597	482-503
Κίτρινο	597-577	503-520
Πράσινο	577-492	520-610
Μπλε	492-455	610-659
ιώδες	455-390	659-769

Πίνακας 9.9 Οι περιοχές συχνοτήτων και μηκών κύματος του ορατού φωτός.

9.6.1.2. Φάσματα εκπομπής και απορρόφησης

Τα φάσματα εκπομπής οφείλονται σε εκπομπή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας από διαφορετικού τύπου θερμές και ψυχρές φωτεινές πηγές. Διακρίνονται σε :

(α) Συνεχή φάσματα εκπομπής

Προέρχονται από ακτινοβολούντα στερεά και υγρά σώματα που βρίσκονται σε υψηλή θερμοκρασία, όπως π.χ. η λυχνία πυρακτώσεως βολφραμίου, ή και από ακτινοβολούντα αέρια σε πολύ μεγάλη πίεση και θερμοκρασία, όπως π.χ. ο ήλιος.

(β) Γραμμικά φάσματα εκπομπής

Προέρχονται από διεγερμένα αέρια ή ατμούς στοιχείων, όπως π.χ. He, Ne, Hg, Na, με τη βοήθεια ηλεκτρικής εκκένωσης ή θέρμανσης. Ένα τέτοιο φάσμα αποτελείται από διακριτές έγχρωμες φωτεινές γραμμές οι οποίες αντιστοιχούν σε φως από συγκεκριμένα μήκη κύματος, ενώ ταυτόχρονα στο φάσμα εμφανίζονται και σκοτεινά μεσοδιαστήματα. Ο αριθμός, η σχετική λαμπρότητα και η σχετική θέση των φασματικών αυτών γραμμών εξαρτάται από το χρησιμοποιούμενο στοιχείο και τη μέθοδο διέγερσης. Από τη μορφή του γραμμικού φάσματος μπορούμε να προσδιορίσουμε τη χημική σύσταση του εκπέμποντος αερίου ή ατμού. Στον Πίνακα 9.10 δίνονται τα μήκη κύματος των γραμμικών φασμάτων εκπομπής μερικών φωτεινών πηγών αερίων ή ατμών.

(γ) Ταινιωτά φάσματα εκπομπής

Προέρχονται από ακτινοβολούντα μόρια σε διεγερμένη κατάσταση και αποτελούνται από έναν αριθμό φωτεινών ταινιών. Στην πραγματικότητα, κάθε ταινία αποτελείται από μεγάλο αριθμό λεπτών φωτεινών γραμμών οι οποίες βρίσκονται πολύ κοντά, ώστε να μη διακρίνονται μεταξύ τους.

Πηγή Hg	Πηγή Cd	Πηγή Na	Πηγή He
λ (nm)	λ (nm)	λ (nm)	λ (nm)
690.7 (E)	643.8 (E)	617.2 (E)	667.8 (K)
579.1 (K)	515.5 (Π)	589.6 (K)	587.6 (K)
577.0 (K)	508.6 (Π)	589.0(K)	501.6 (Π)
546.1 (Π)	480.0 (M)	567.7 (K)	492.2 (Π)
435.8 (M)	466.2 (M)	514.1 (Π)	471.3 (M)
404.6 (I)	441.6 (I)	498.7 (Π)	447.1 (I)

Πίνακας 9.10 Μήκη κύματος των γραμμικών φασμάτων εκπομπής πηγών Hg, Cd, Na και He (E=ερυθρό, K=κίτρινο, Π=πράσινο, M=μπλε, I=ιώδες).

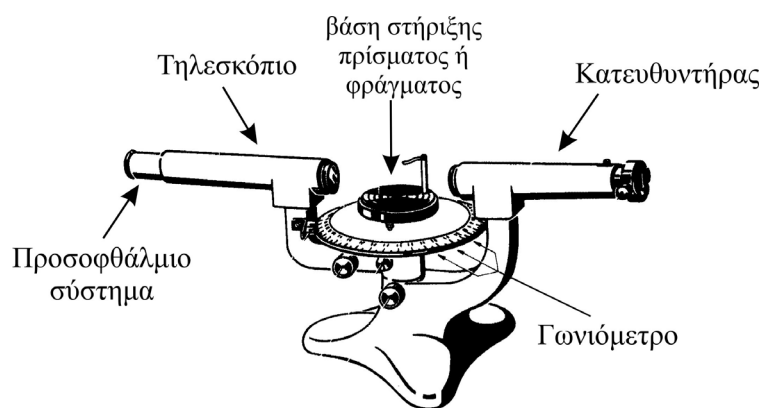
Τα φάσματα απορρόφησης παράγονται όταν φως προερχόμενο από πηγή με συνεχές φάσμα εκπομπής (λευκό φως) αναγκαστεί να περάσει μέσα από ένα στερεό, υγρό ή αέριο, το οποίο βρίσκεται σε χαμηλότερη θερμοκρασία από τη φωτεινή πηγή. Το προκύπτον φάσμα παρουσιάζει σκοτεινές ταινίες ή σκοτεινές γραμμές, ως αποτέλεσμα της απορρόφησης ορισμένων μηκών κύματος από το υλικό. Όπως και στην περίπτωση των φασμάτων εκπομπής, έτσι και τα φάσματα απορρόφησης διακρίνονται σε συνεχή, γραμμικά ή ταινιωτά φάσματα.

9.6.1.3. Οπτικό φασματοσκόπιο

Το οπτικό φασματοσκόπιο είναι όργανο που χρησιμοποιείται για την παρατήρηση φασμάτων. Στην περίπτωση κατά την οποία το όργανο είναι εφοδιασμένο με γωνιόμετρο για μέτρηση γωνιών ανάκλασης, διάθλασης ή περίθλασης, όπως είναι η περίπτωση του οργάνου που υπάρχει στο φοιτητικό εργαστήριο, τότε ονομάζεται φασματομέτρο. Στη βιβλιογραφία έχει επικρατήσει να ονομάζεται συνήθως ως φασματοσκόπιο και με την έννοια αυτή θα το χρησιμοποιήσουμε στην παρούσα εργαστηριακή άσκηση (Χριστοδουλίδης, 1995). Ένα οπτικό φασματοσκόπιο (Σχήμα 9.25) αποτελείται από τα εξής μέρη:

- (α) κατευθυντήρα
- (β) τηλεσκόπιο
- (γ) γωνιόμετρο και
- (δ) στοιχείο οπτικού διασκεδασμού (πρίσμα ή οπτικό φράγμα).

Ο κατευθυντήρας φέρει στο ένα του άκρο ένα σύστημα λεπτής σχισμής, της οποίας το πλάτος είναι ρυθμιζόμενο και μπορεί να μετακινείται κατά μικρή απόσταση παράλληλα με το γεωμετρικό άξονα του κατευθυντήρα. Στο άλλο του άκρο, υπάρχει ένας συγκεντρωτικός φακός του οποίου η απόσταση από τη σχισμή είναι ίση με την εστιακή του απόσταση. Κατ' αυτόν τον τρόπο, μια φωτεινή δέσμη που διέρχεται από τη σχισμή εξέρχεται παράλληλα από το φακό. Το τηλεσκόπιο έχει τη δυνατότητα περιστροφής του γύρω από τον κεντρικό κατακόρυφο άξονα του οργάνου και μπορεί να σταθεροποιηθεί σε κάποια επιθυμητή θέση. Φέρει στο πλησιέστερο άκρο προς το οπτικό στοιχείο ένα συγκεντρωτικό φακό με εστιακή απόσταση f_2 . Στο άλλο του άκρο είναι προσαρμοσμένο ένα προσοφθάλμιο σύστημα, αποτελούμενο από ένα συγκεντρωτικό φακό Φ_3 με εστιακή απόσταση f_3 και από ένα σταυρόνημα. Οι εστιακές αποστάσεις έχουν τέτοια τιμή, ώστε οι φακοί να έχουν κοινή εστία. Με τον τρόπο αυτό, όταν μια φωτεινή δέσμη προσπέσει παράλληλα προς τον οπτικό άξονα του Φ_2 , κατά την έξοδο του από το φακό Φ_3 θα είναι επίσης παράλληλη.



Σχήμα 9.25 Οπτικό φασματοσκόπιο όπου αναγράφονται τα κύρια μέρη του.

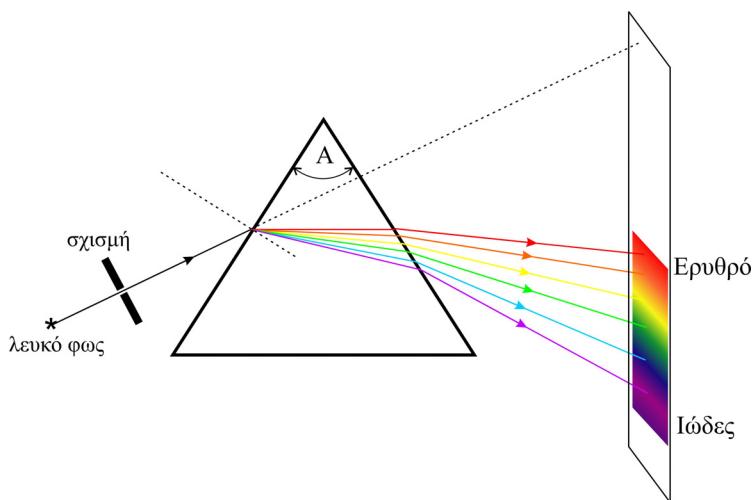
Το γωνιόμετρο, στο οποίο είναι προσαρμοσμένος ο κυκλικός δίσκος στήριξης του οπτικού στοιχείου και ο κυκλικός βερνιέρος, είναι υποδιαιρεμένο σε 360° σε διαστήματα της 1° . Για αύξηση της τιμής ανάγνωσης της γωνίας κατά ένα σημαντικό ψηφίο χρησιμοποιείται ο κυκλικός βερνιέρος με σταθερά 0.1° . Το στοιχείο οπτικού διασκεδασμού μπορεί να είναι ένα διαφανές πρίσμα ή ένα φράγμα περίθλασης, στερεωμένο κατάλληλα στον κυκλικό δίσκο στερέωσης του γωνιομέτρου. Το χρησιμοποιούμενο πρίσμα για την ανάλυση του φωτός με το οπτικό φασματοσκόπιο είναι συνήθως ισόπλευρο και γυάλινο, με διάφορες διαστάσεις ύψους και βάσης. Ο δείκτης διάθλασης n του πρίσματος, για δεδομένο μήκος κύματος εξαρτάται από το υλικό

κατασκευής του. Επίσης, το χρησιμοποιούμενο οπτικό φράγμα περίθλασης είναι ένα διαφανές πλακίδιο πάνω στο οποίο έχουν χαραχτεί με μηχανήμα ακριβείας παράλληλα και ισαπέχοντα ευθύγραμμα αυλάκια. Ένα τυπικό φράγμα περίθλασης, όπως αυτό που χρησιμοποιείται στην παρούσα εργαστηριακή άσκηση, έχει 300 χαραγές ανά mm. Γενικά, τα φράγματα περίθλασης χρησιμοποιούνται για τη μέτρηση μηκών κύματος και τη μελέτη της δομής και της εντάσεως φασματικών γραμμών.

9.6.1.4. Ανάλυση του φωτός από πρίσμα

Όταν το φως αλλάξει μέσο διάδοσης, τότε αλλάζει και η ταχύτητα του και επομένως μεταβάλλεται ο δείκτης διάθλασης του υλικού, που δίνεται ως γνωστό από τη σχέση $n = c/v$, όπου c η ταχύτητα διάδοσης του φωτός στο κενό και v η ταχύτητα διάδοσης του εντός του υλικού. Στην ουσία, ο δείκτης διάθλασης ενός υλικού εκφράζει τον παράγοντα κατά τον οποίο η ταχύτητα διάδοσης του φωτός, $v = c/n$ και το μήκος κύματος, $\lambda = \lambda_0/n$ μιας μονοχρωματικής ακτινοβολίας, ελαττώνονται σε σχέση με τις τιμές c και λ_0 που έχουν αντίστοιχα στο κενό. Σημειωτέον ότι η συχνότητα f της μονοχρωματικής ακτινοβολίας δεν αλλάζει όταν αλλάζει το μέσο διάδοσής της.

Αποτέλεσμα του διαφορετικού δείκτη διάθλασης, και άρα και της γωνίας διάθλασης για διαφορετικά μήκη κύματος (βλ. σχέση 9.55), είναι η ανάλυση μιας φωτεινής δέσμης στα επί μέρους μήκη κύματος που την αποτελούν. Αν μονοχρωματική δέσμη φωτός (ένα συγκεκριμένο μήκος κύματος) προσπέσει υπό γωνία θ πάνω σε μια έδρα ενός πρίσματος, θα υποστεί κάποια εκτροπή κατά την έξοδό της από την άλλη έδρα. Το μέγεθος της εκτροπής εξαρτάται από το μήκος κύματος λ . Αν επομένως πολυχρωματική φωτεινή παράλληλη δέσμη (λευκό φως) προσπέσει πάνω σε πρίσμα, τότε η δέσμη, εκτός από την εκτροπή της, θα υποστεί και ανάλυση σε διάφορα χρώματα. Ως αποτέλεσμα, κατά την έξοδο της από το πρίσμα, θα δώσει πάνω σε μια οθόνη ένα συνεχές έγχρωμο φάσμα. Αν η φωτεινή πηγή εκπέμπει γραμμικό φάσμα (διακριτά μήκη κύματος), τότε στην οθόνη θα εμφανιστεί το γραμμικό φάσμα εκπομπής της πηγής με τα αντίστοιχα μήκη κύματος (χρώματα) σε διαφορετικές θέσεις παρατήρησης.



Σχήμα 9.26 Ανάλυση του λευκού φωτός κατά τη διέλευση του από διαφανές ισόπλευρο πρίσμα.

9.6.1.5. Ανάλυση του φωτός από οπτικό φράγμα

Η ανάλυση του φωτός από οπτικό φράγμα στηρίζεται στα φαινόμενα της συμβολής και της περίθλασης του φωτός. Η περίθλαση είναι φαινόμενο που αφορά όλων των τύπων τα κύματα. Η κάμψη του φωτός πάνω σε ένα εμπόδιο, όπως το άκρο μιας σχισμής, αποτελεί παράδειγμα περίθλασης φωτεινών κυμάτων. Ως αποτέλεσμα της περίθλασης ενός φωτεινού κύματος μήκους κύματος λ , το οποίο προσπίπτει πάνω σε σχισμή πλάτους a , όπου $a \approx \lambda$, είναι η εμφάνιση φωτός εκτός της γεωμετρικής σκιάς της σχισμής. Το φαινόμενο είναι εντονότερο όταν $a/\lambda \rightarrow 0$. Στην περίπτωση που το μήκος της διάστασης της σχισμής ή του εμποδίου είναι πολύ μεγαλύτερο από το μήκος κύματος, η περίθλαση μπορεί να αγνοηθεί και το φως φαίνεται να διαδίδεται ευθύγραμμα, ακολουθώντας τους νόμους της ανάκλασης και της διάθλασης. Αν η παραπάνω απαίτηση της

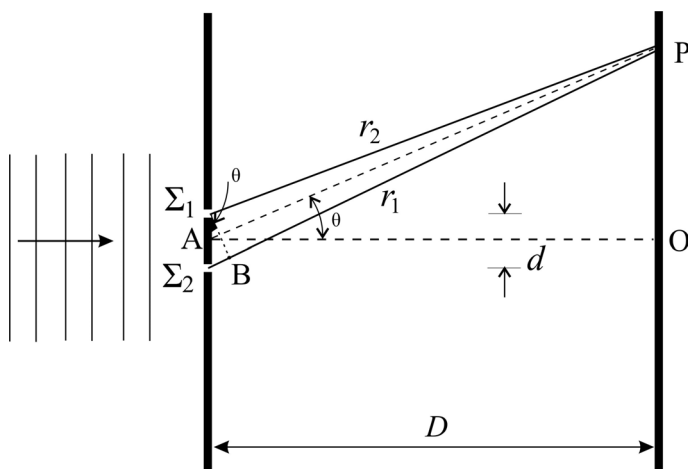
γεωμετρικής οπτικής, δηλαδή $a \gg \lambda$, δεν ικανοποιείται, δε μπορούμε να περιγράψουμε το φως με ακτίνες, αλλά πρέπει να λάβουμε υπόψη την κυματική φύση του φωτός.

Η κατανόηση της λειτουργίας ενός οπτικού φράγματος είναι ευκολότερη, αν θεωρήσουμε την απλή περίπτωση της συμβολής φωτεινών κυμάτων από μια διπλή σχισμή, την οποία περιγράφει το περίφημο πείραμα Young. Αν μονοχρωματικό φως (ένα συγκεκριμένο μήκος κύματος) προερχόμενο από σημειακή φωτεινή πηγή προσπέσει πάνω σε δύο παράλληλες σχισμές ενός πετάσματος, το φως που θα εξέλθει από κάθε σχισμή περιθλάται και δύο κύματα που αλληλεπικαλύπτονται, συμβάλλουν στο χώρο κατά τέτοιο τρόπο, ώστε η φωτεινή τους ένταση να μη μοιράζεται ομοιόμορφα στο χώρο, αλλά να έχει μέγιστο σε ορισμένα σημεία και ελάχιστο (ή και μηδέν) σε άλλα (κροσσοί συμβολής).

Μια σχηματική απεικόνιση της συμβολής φωτεινών κυμάτων από μια διπλή σχισμή φαίνεται στο Σχήμα 9.27. Αν στο σχήμα αυτό, η απόσταση d μεταξύ των σχισμών είναι πολύ μικρότερη της απόστασης D μεταξύ των πετασμάτων, η $\Sigma_1 B$ είναι περίπου κάθετη και στις δύο διευθύνσεις r_1 και r_2 . Η γωνία $\Sigma_2 \Sigma_1 B$ δηλαδή θα είναι ίση με τη γωνία PAO . Οι δύο ακτίνες που φτάνουν στο σημείο P από τις σχισμές Σ_1 και Σ_2 βρίσκονται αρχικά σε φάση, γιατί και οι δύο προέρχονται από την ίδια ισοφασική επιφάνεια του επίπεδου κύματος που προσπίπτει πάνω σε αυτές. Επειδή όμως οι ακτίνες ακολουθούν διαφορετικούς οπτικούς δρόμους, θα φτάσουν στο σημείο P της οθόνης με διαφορά φάσης. Ο αριθμός των μηκών κύματος που περιέχονται στην απόσταση $\Sigma_2 B (=d \sin \theta)$ η οποία είναι η διαφορά των οπτικών δρόμων, καθορίζει τη φύση της συμβολής στο σημείο P. Για να έχουμε μέγιστο στο P (συμφασικά τα δύο κύματα που συμβάλλουν), θα πρέπει η απόσταση $\Sigma_2 B$ να περιέχει ακέραιο αριθμό κυμάτων, δηλαδή να ισχύει

$$d \sin \theta = m \lambda, \quad \text{όπου } m = 0, 1, 2, \dots \quad (9.65)$$

Για κάθε μέγιστο πάνω από το O στο πέτασμα, θα υπάρχει και ένα συμμετρικό μέγιστο κάτω από το O, ενώ για $m = 0$, θα υπάρχει ένα κεντρικό μέγιστο ακριβώς στο σημείο O.



Σχήμα 9.27 Περίθλαση και συμβολή κυμάτων από διπλή σχισμή.

9.6.2. Σκοπός του πειράματος

Σκοπός του πειράματος είναι ο πειραματικός προσδιορισμός του γραμμικού φάσματος εκπομπής φωτεινής πηγής ατμών υδραργύρου. Φως προερχόμενο από τα διεγερόμενα άτομα ατμών υδραργύρου, προσπίπτει μέσω του κατευθυντήρα του οπτικού φασματοσκοπίου στο φράγμα περίθλασης. Ως αποτέλεσμα, κάθε φασματική γραμμή η οποία αντιστοιχεί σε ένα συγκεκριμένο μήκος κύματος λ , θα δημιουργεί φωτεινό κροσσοί συμβολής πρώτης τάξης ($m = 1$) σε διαφορετική γωνία παρατήρησης. Μετρώντας επομένως με τη βοήθεια του γωνιομέτρου τις γωνίες που αντιστοιχούν σε κάθε φωτεινή φασματική γραμμή, μπορούμε από τη σχέση 9.65, να υπολογίσουμε το αντίστοιχο μήκος κύματος.

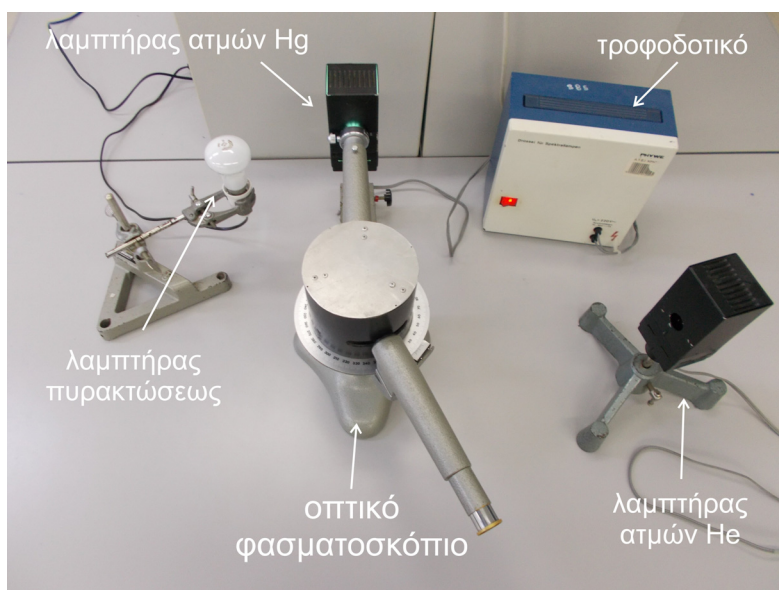
9.6.3. Πειραματικό μέρος

9.6.3.1. Χρησιμοποιούμενα όργανα

1. Οπτικό φασματοσκόπιο του οίκου LEYBOLD–HERAEUS.
2. Οπτικό φράγμα περίθλασης με 300 χαραγές ανά mm.
3. Λάμπα ατμών υδραργύρου με κατάλληλο τροφοδοτικό.
4. Λαμπτήρας πυρακτώσεως και τροφοδοτικό 12 V.

Η πειραματική διάταξη απεικονίζεται στο Σχήμα 9.28.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Μην αγγίζετε ΠΟΤΕ την επιφάνεια του ακριβού οπτικού φράγματος περίθλασης γιατί υπάρχει κίνδυνος άμεσης καταστροφής του.



Σχήμα 9.28 Πειραματική διάταξη για τον προσδιορισμό του γραμμικού φάσματος εκπομπής πηγής ατμών Hg.

9.6.3.2. Μετρήσεις

1. Το φασματοσκόπιο έχει ρυθμιστεί εκ των προτέρων ως προς την οριζοντιότητα του κατευθυντήρα, του τηλεσκοπίου, του γωνιομέτρου και του κυκλικού δίσκου. Μια επιπλέον ρύθμιση στην οποία πρέπει να δίνεται μεγάλη σημασία, αναφέρεται στο πλάτος της σχισμής. Όταν το πλάτος αυξάνεται, τότε η φωτεινότητα του οργάνου μεγαλώνει αλλά μικραίνει η διακριτική ικανότητά του. Όπου επομένως απαιτείται μεγάλη διακριτική ικανότητα του οργάνου, ελαττώνουμε το πλάτος της σχισμής στο ελάχιστο δυνατό, ούτως ώστε η παρατήρηση του φάσματος να γίνεται με άνεση, αλλά ταυτόχρονα να υπάρχει καλύτερος διαχωρισμός λεπτών φασματικών γραμμών που συνορεύουν μεταξύ τους και αντιστοιχούν σε παραπλήσια μήκη κύματος.
2. Τοποθετήστε τη λάμπα ατμών υδραργύρου μπροστά από τη σχισμή του κατευθυντήρα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 9.28 και θέστε τη σε λειτουργία. **ΠΡΟΣΟΧΗ:** μην την αναβοσβήνετε γιατί υπάρχει κίνδυνος καταστροφής της.
3. Τοποθετήστε το τηλεσκόπιο σε γωνία 0° και κοιτάξτε μέσα από τη διόπτρα. Τι παρατηρείτε;
4. Στο σημείο αυτό βεβαιωθείτε ότι το σταυρόνημα του προσοφθάλμιου συστήματος φαίνεται με ευκρίνεια πάνω στην εικόνα παρατήρησης. Αυτό μπορείτε να το επιτύχετε ρυθμίζοντας τη θέση του προσοφθάλμιου φακού.

5. Στρέψτε τη δίοπτρα προς τα δεξιά και παρατηρείστε τις φωτεινές γραμμές του φάσματος. Οι φασματικές γραμμές που παρατηρείτε θα πρέπει να είναι, με τη σειρά που εμφανίζονται, αυτές που αναγράφονται στον Πίνακα 9.10 για το γραμμικό φάσμα εκπομπής του Hg.
6. Τοποθετήστε το σταυρόνημα πάνω σε κάθε μία φωτεινή γραμμή και μετρήστε με τη βοήθεια του γωνιομέτρου τη γωνία παρατήρησης κάθε φασματικής γραμμής. Καταχωρίστε τις μετρήσεις σας στην αντίστοιχη στήλη του Πίνακα μετρήσεων 9.11. Ποια είναι η σταθερά του βερνιέρου του γωνιομέτρου και ποια είναι η ακρίβεια στις μετρήσεις σας; Επειδή οι δύο κίτρινες γραμμές του φάσματος βρίσκονται πολύ κοντά μεταξύ τους, μπορείτε να τις διαχωρίσετε ρυθμίζοντας το πλάτος της σχισμής του τηλεσκοπίου.
7. Παρατηρείτε άλλες γραμμές στο φάσμα εκτός από αυτές που αναφέρονται στον πίνακα; Που οφείλονται;
8. Για κάθε μία φασματική γραμμή, να υπολογίσετε από τη σχέση 9.65 για τον πρώτο κροσσό συμβολής ($m = 1$) το αντίστοιχο μήκος κύματος. Καταχωρίστε τα αποτελέσματα στον πίνακα μετρήσεων. Η σταθερά του φράγματος d ισούται με $d = (1/300) \text{ mm}$.

χρώμα	θ (°)	λ (nm)	$\Delta\lambda$ (nm)
ιώδες			
Μπλε			
Πράσινο			
Κίτρινο 1			
Κίτρινο 2			
Κόκκινο			

Πίνακας 9.11 Πίνακας μετρήσεων για τον προσδιορισμό των μηκών κύματος του γραμμικού φάσματος εκπομπής πηγής ατμών Hg.

9. Συγκρίνετε τα μήκη κύματος που υπολογίσατε με τις αντίστοιχες τιμές του Πίνακα 9.10, υπολογίζοντας την επί τοις εκατό διαφορά των τιμών.
10. Το σφάλμα μέτρησης $\Delta\theta$ της γωνίας παρατήρησης της κάθε φασματικής γραμμής, επιφέρει σφάλμα στον υπολογισμό του αντίστοιχου μήκους κύματος, το οποίο αποδεικνύεται ότι δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta\lambda = d \cdot \cos\varphi \cdot \Delta\theta$$

όπου το $\Delta\theta$ είναι το σφάλμα σε rad (ακτίνια). Υπολογίστε το $\Delta\lambda$ για κάθε μία φασματική γραμμή του πίνακα και καταχωρίστε τις τιμές στην αντίστοιχη στήλη του Πίνακα 9.11.

11. Σβήστε τη λάμπα ατμών υδραργύρου και τοποθετείστε στη θέση της τη λάμπα πυρακτώσεως. Παρατηρήστε το φάσμα της. Ποια η διαφορά του από το φάσμα της λάμπας υδραργύρου; Μετρήστε τις γωνίες που αντιστοιχούν στην αρχή και στο τέλος του παρατηρούμενου φάσματος.

$$\theta_{\text{αρχ}} = \dots\dots^\circ, \quad \theta_{\text{τελ}} = \dots\dots^\circ$$

12. Χαράξτε τη γραφική παράσταση $\lambda = f(\sin\theta)$ σε χιλιοστομετρικό χαρτί, για τις πειραματικές τιμές του λ και της γωνίας θ που μετρήσατε (Πίνακας 9.11). Από την κλίση της ευθείας της γραφικής παράστασης, υπολογίστε τη σταθερά d του φράγματος.
13. Συγκρίνετε την τιμή του d που βρήκατε με την πραγματική του τιμή, υπολογίζοντας την επί τοις εκατό διαφορά των δύο τιμών.

14. Υπολογίστε με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης τα μήκη κύματος που αντιστοιχούν στις μετρούμενες γωνίες $\theta_{αρχ}$ και $\theta_{τελ}$ του βήματος 11.

$$\lambda_{αρχ} = \dots \text{ nm}, \quad \lambda_{τελ} = \dots \text{ nm}$$

15. Επαναλάβετε τον προσδιορισμό της σταθεράς d του φράγματος με τη θεωρία ελαχίστων τετραγώνων.
16. Αντικαταστήστε τη λάμπα ατμών Hg με τη λάμπα ατμών He και παρατηρήστε το φάσμα της πηγής αυτής.
17. ΠΡΟΕΡΑΙΤΙΚΑ: Επαναλάβετε τα βήματα 8-10 και 12-13. Τα μήκη κύματος του φάσματος εκπομπής της φωτεινής πηγής ατμών He δίνονται στον Πίνακα 9.10.

9.6.4. Ερωτήσεις-Ασκήσεις

1. Αναφέρετε μια διαφορά μεταξύ οπτικού φράγματος και πρίσματος.
2. Υπολογίστε τη συχνότητα της μπλε και της πράσινης φασματικής γραμμής πηγής Hg, για τα αντίστοιχα μήκη κύματος που δίνονται στον Πίνακα 9.10 (θεωρείστε ότι η ταχύτητα του φωτός είναι $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$).
3. Ποιες είναι οι ομοιότητες και ποιες οι διαφορές μεταξύ των δύο λαμπτήρων Hg και He, σε ότι αφορά τα φάσματα τους;

Βιβλιογραφία/Αναφορές

- Αλεξόπουλος, Κ. Δ. (1986). *Γενική Φυσική, Τόμος 5^{ος}, Οπτική*. Αθήνα: Εκδόσεις Ολυμπία.
- Αλεξόπουλος, Κ. Δ. (1986). *Γενική Φυσική, Τόμος 1^{ος}, Μηχανική – Ακουστική*. Αθήνα: Εκδόσεις Ολυμπία.
- Ζαχαριουδάκης, Δ. (2002). *Ασκήσεις Εργαστηρίου Φυσικής (σημειώσεις)*. Ηράκλειο: ΤΕΙ Κρήτης.
- Καμαράτος, Μ. (2002). *Εισαγωγή στην ανάλυση πειραματικών μετρήσεων. Απλά πειράματα μηχανικής-θερμότητας*. Ιωάννινα: Πανεπιστημιακό Τυπογραφείο.
- Παπαγεωργόπουλος, Χ. (1998). *Εισαγωγή στα Πειράματα Φυσικής (Μηχανικής-Θερμότητας)*. Ιωάννινα: Πανεπιστημιακό Τυπογραφείο.
- Σιδεράς, Ε. (1995). *Εργαστηριακές Ασκήσεις Φυσικής (σημειώσεις)*. Χανιά: ΤΕΙ Κρήτης.
- Χριστοδουλίδης, Α. Α. (1995). *Εργαστηριακά Πειράματα Φυσικής III*. Ιωάννινα: Πανεπιστημιακό Τυπογραφείο.
- Alonso, E. & Finn, E. (1975). *Θεμελιώδης Πανεπιστημιακή Φυσική, τόμος II-2, Κυματική*. Αθήνα: Ε.Μ.Π.
- Halliday, D. & Resnick, R. (1976). *Πανεπιστημιακή Φυσική, Μέρος Α*. Αθήνα: Εκδόσεις Πνευματικός.

Σύνδεσμοι στο διαδίκτυο που αναφέρονται εντός του κειμένου

1. http://www.pasco.com/file_downloads/product_manuals/Motion-Sensor-II-Manual-CI-6742A.pdf
2. http://www.pasco.com/prodCatalog/CI/CI-6400_scienceworkshop-500-interface/
3. <http://www.pasco.com/datastudio/>

Κεφάλαιο 10 – Πειράματα σύγχρονης φυσικής

Σύνοψη

Το κεφάλαιο αυτό περιλαμβάνει πειράματα σύγχρονης φυσικής και συγκεκριμένα τη μελέτη των νόμων θερμικής ακτινοβολίας σωμάτων (Νόμος Stefan-Boltzmann και νόμος αντιστρόφου τετραγώνου), το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο και πειράματα σχετιζόμενα με τη ραδιενέργεια, όπως ο υπολογισμός του νεκρού χρόνου του απαριθμητή Geiger-Muller, η μέτρηση της ακτινοβολίας υποβάθρου, η απορρόφηση ακτινοβολίας γ από την ύλη, ο νόμος αντιστρόφου τετραγώνου και διάφορα στατιστικά φαινόμενα.

Προαπαιτούμενη γνώση

Μέση τιμή και τυπική απόκλιση μέσης τιμής (κεφ. 3.1), γραφικές παραστάσεις σε λογαριθμικό χαρτί (κεφ. 3.4), στοιχεία άλγεβρας και λογισμού, κατανομή Gauss (κεφ 4.3).

10.1. Θερμική ακτινοβολία σωμάτων

10.1.1. Σύντομη ανασκόπηση της θεωρίας

Θερμότητα ονομάζεται η ενέργεια που μεταφέρεται από ένα σώμα ή σύστημα σε ένα άλλο με το οποίο βρίσκεται σε επαφή, εξαιτίας της διαφορετικής θερμοκρασίας τους. Ο όρος θερμότητα αναφέρεται πάντα στη μεταφορά ενέργειας και ποτέ στο ποσό ενέργειας που περιέχεται σε ένα συγκεκριμένο σύστημα (εσωτερική ενέργεια).

Υπάρχουν τρεις μηχανισμοί διάδοσης της θερμότητας:

(α) Η διάδοση με αγωγή (conduction) που πραγματοποιείται μέσα σε ένα σώμα, λόγω ύπαρξης θερμοβαθμίδας (διαφοράς θερμοκρασίας κατά μήκος του σώματος) ή μεταξύ δύο σωμάτων που βρίσκονται σε επαφή, λόγω της διαφορετικής θερμοκρασίας που μπορεί να έχουν αυτά. Η διάδοση της θερμικής ενέργειας με αγωγή στα στερεά γίνεται μέσω της κίνησης των ελευθέρων ηλεκτρονίων και των ταλαντώσεων των ατόμων στις πλεγματικές τους θέσεις, ταλαντώσεις που είναι γνωστές ως φωνόνια. Ειδικά, για την περίπτωση των φωνονίων έχουμε την δημιουργία ελαστικών κυμάτων που μεταφέρουν ενέργεια από το ένα άτομο του στερεού στα γειτονικά του.

(β) Η διάδοση με συναγωγή (convection) η οποία πραγματοποιείται μεταξύ της επιφάνειας ενός σώματος και ενός κινούμενου ή ακίνητου ρευστού (υγρό ή αέριο) το οποίο βρίσκεται σε επαφή με την επιφάνεια και σε διαφορετική θερμοκρασία με αυτό. Στην περίπτωση αυτή, η θερμότητα διαδίδεται λόγω της μακροσκοπικής κίνησης του ρευστού καθώς και με αγωγή που συνεισφέρει ούτως ή άλλως στη συνολική μεταφορά.

(γ) Η διάδοση με εκπομπή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, δηλαδή με εκπομπή και απορρόφηση φωτονίων. Ο τρόπος αυτός δεν προϋποθέτει την παρουσία ύλης στο χώρο μεταξύ των δύο σωμάτων, αλλά μπορεί να επιτευχθεί και στο κενό, σε αντίθεση με τους άλλους δύο τρόπους μεταφοράς θερμότητας. Με τον τρόπο αυτό, η Γη απορροφά θερμότητα από τον Ήλιο.

Στην παρούσα εργαστηριακή άσκηση θα επικεντρωθούμε στους νόμους που διέπουν τη μεταφορά θερμότητας με ακτινοβολία (Αργυρίου και Γιαννούλη, 2008).

Όλα ανεξαιρέτως τα σώματα σε οποιαδήποτε θερμοκρασία εκπέμπουν ενέργεια με τη μορφή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, η οποία ονομάζεται θερμική ακτινοβολία. Για σώματα που βρίσκονται σε θερμοκρασία δωματίου ($\approx 20^\circ\text{C}$) όλη σχεδόν η ενέργεια εκπέμπεται με υπέρυθρα κύματα (μήκη κύματος μεγαλύτερα από του ορατού φωτός), ενώ καθώς αυξάνεται η θερμοκρασία, στο φάσμα εκπομπής κυριαρχούν τα μικρότερα μήκη κύματος. Σε θερμοκρασίες μεγαλύτερες των 600°C , μέρος της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας βρίσκεται στην ορατή περιοχή του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος, γι αυτό και τα σώματα σε αυτές τις θερμοκρασίες εμφανίζονται ερυθροπωρωμένα. Σε αρκετά υψηλότερες θερμοκρασίες, όπως αυτή της λειτουργίας του νήματος βολφραμίου μιας λάμπας πυρακτώσεως ($\approx 3000^\circ\text{C}$), το σώμα εμφανίζεται ως λευκοπωρωμένο, εκπέμποντας το μεγαλύτερο μέρος της ενέργειας του στην περιοχή της ορατής ακτινοβολίας.

Χρησιμοποιώντας ένα φασματομέτρο μπορούμε να πάρουμε πληροφορίες για την κατανομή της έντασης του εκπεμπόμενου φωτός μιας πηγής στα διάφορα μήκη κύματος. Μια τυπική μορφή του φάσματος εκπομπής ιδανικού σώματος (μέλαν σώμα) σε διάφορες θερμοκρασίες, απεικονίζεται στο Σχήμα 10.1. Η

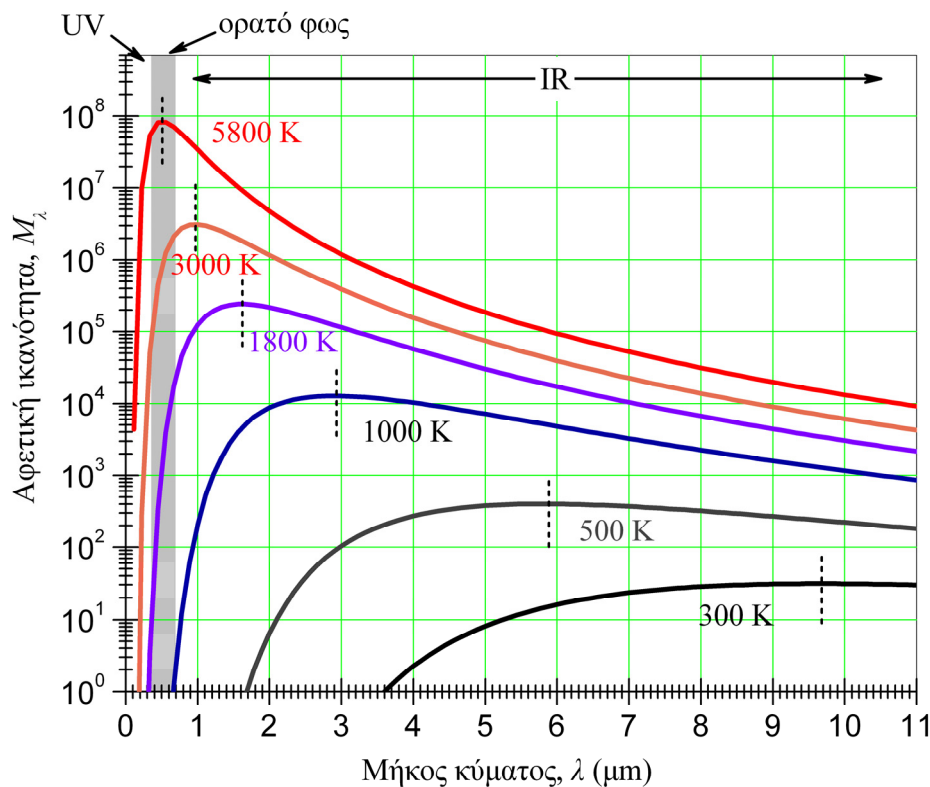
ποσότητα στον κατακόρυφο άξονα ονομάζεται φασματική αφετική ικανότητα και ορίζεται έτσι ώστε η ποσότητα $M_\lambda d\lambda$ να ισούται με το ρυθμό με τον οποίο ακτινοβολείται ενέργεια, ανά μονάδα εμβαδού από την επιφάνεια της πηγής, για μήκη κύματος στο διάστημα $[\lambda, \lambda+d\lambda]$. Το εμβαδόν επομένως κάτω από μία καμπύλη, με άλλα λόγια το ολοκλήρωμα του M_λ σε όλο το εύρος μηκών κύματος, θα εκφράζει την ολική εκπεμπόμενη ενέργεια ανά μονάδα επιφάνειας σε όλα τα μήκη κύματος.

$$M = \int_0^\infty M_\lambda d\lambda \quad (10.1)$$

Η παραπάνω ποσότητα M ονομάζεται ολοφασματική αφετική ικανότητα και εξαρτάται από τη θερμοκρασία, σύμφωνα με την παρακάτω σχέση:

$$M = \sigma e T^4 \quad (10.2)$$

όπου σ είναι η σταθερά των Stefan – Boltzmann που ισούται με $\sigma = (5.670 \pm 0.003) \times 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$.



Σχήμα 10.1 Η αφετική ικανότητα θερμαινόμενου ιδανικού σώματος συναρτήσει του μήκους κύματος λ , για διαφορετικές θερμοκρασίες. Με την αύξηση της θερμοκρασίας, η κορυφή της κατανομής της ακτινοβολούμενης ενέργειας μετατοπίζεται σε μικρότερα μήκη κύματος σύμφωνα με το νόμο του Wien. Προσέξτε ότι η κλίμακα της αφετικής ικανότητας στον κατακόρυφο άξονα είναι λογαριθμική.

Η σχέση αυτή που είναι γνωστή ως νόμος των Stefan – Boltzmann, μας λέει ότι ο ρυθμός με τον οποίο εκπέμπεται ενέργεια (ανά μονάδα επιφάνειας) από την επιφάνεια ενός σώματος θερμοκρασίας T , αυξάνει ταχύτατα με τη θερμοκρασία και συγκεκριμένα είναι ανάλογος της $4^{\text{ης}}$ δύναμης της θερμοκρασίας. Η ποσότητα e στη σχέση 10.2 ονομάζεται συντελεστής εκπομπής και εξαρτάται από τη φύση του σώματος. Παίρνει τιμές μεταξύ 0 και 1 και εκφράζει το λόγο του ρυθμού εκπομπής θερμικής ακτινοβολίας από τη συγκεκριμένη επιφάνεια, προς το ρυθμό εκπομπής μιας ιδανικής επιφάνειας ίδιου εμβαδού και θερμοκρασίας.

Οι σκουρόχρωμες επιφάνειες έχουν μεγαλύτερο συντελεστή εκπομπής, σε σχέση με τις ανοιχτόχρωμες επιφάνειες. Ένα σώμα που απορροφά εύκολα την ακτινοβολία, ακτινοβολεί επίσης εύκολα. Μια ιδανική επιφάνεια με συντελεστή εκπομπής $e=1$, απορροφά όλη την ακτινοβολία που προσπίπτει πάνω της. Μια τέτοια ιδανική, τελείως απορροφητική επιφάνεια, ονομάζεται μέλαν σώμα και η εκπεμπόμενη από αυτή ακτινοβολία, ονομάζεται ακτινοβολία μελανού σώματος. Μια καλή προσέγγιση μελανού σώματος είναι η εσωτερική κοιλότητα ενός κοίλου αντικειμένου που έχει ένα μικρό άνοιγμα. Το εισερχόμενο στην οπή φως, ύστερα από διαδοχικές ανακλάσεις, θα απορροφηθεί πλήρως και δε θα εξέλθει καθόλου από την οπή.

Στο Σχήμα 10.1 παρατηρούμε ότι καθώς αυξάνεται η θερμοκρασία του σώματος, αυξάνεται και η ολική ενέργεια που εκπέμπεται από αυτό (δηλαδή το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη). Με την αύξηση της θερμοκρασίας ωστόσο, η κορυφή της κατανομής της ακτινοβολούμενης ενέργειας μετατοπίζεται σε μικρότερα μήκη κύματος (ή μεγαλύτερες συχνότητες). Η μετατόπιση αυτή περιγράφεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\lambda_{max}T = 2897.8 \mu\text{m} \cdot \text{K} \quad (10.3)$$

που είναι γνωστή ως νόμος μετατόπισης του Wien. Στην παραπάνω σχέση, λ_{max} είναι το μήκος κύματος που αντιστοιχεί στην κορυφή της κατανομής και T είναι η απόλυτη θερμοκρασία του ακτινοβολούντος σώματος.

Η ερμηνεία των πειραματικών δεδομένων για την ακτινοβολία του μελανού σώματος, δόθηκε το 1900 από τον Planck, ο οποίος κάνοντας μια ριζοσπαστική για την εποχή του υπόθεση, σχετικά με τη φύση των ταλαντευόμενων μορίων των τοιχωμάτων της κοιλότητας του μέλανος σώματος, έθεσε τα θεμέλια της κβαντικής θεωρίας.

10.1.2. Σκοπός του πειράματος

Σκοπός της άσκησης είναι ο πειραματικός προσδιορισμός της σχέσης εξάρτησης της ακτινοβολούμενης ενέργειας (ολοφασματική αφετική ικανότητα) ανά μονάδα επιφάνειας και ανά μονάδα χρόνου, με την απόλυτη θερμοκρασία του ακτινοβολούντος σώματος (Ασημακόπουλος, 1993). Η εξάρτηση αυτή, όπως προαναφέρθηκε, δίνεται από το νόμο Stefan – Boltzmann (σχέση 10.2), που για ένα μέλαν σώμα παίρνει τη μορφή $M = \sigma T^4$ ($e=1$).

Για να επαληθεύσουμε ότι το M μεταβάλλεται ανάλογα προς την 4^η δύναμη της απόλυτης θερμοκρασίας T , υποθέτουμε ότι ισχύει γενικά ο ακόλουθος νόμος δυνάμεως μεταξύ των δύο αυτών μεγεθών:

$$M = \sigma T^a \quad (10.4)$$

Λογαριθμίζοντας την παραπάνω σχέση, προκύπτει:

$$\log M = \log \sigma + a \cdot \log T \quad (10.5)$$

Κάνοντας λοιπόν σε λογαριθμικό χαρτί τη γραφική παράσταση $M=f(T)$ για τα δύο μετρούμενα μεγέθη M και T , θα πρέπει να προκύψει ότι η τιμή της κλίσης της ευθείας είναι $a = 4$.

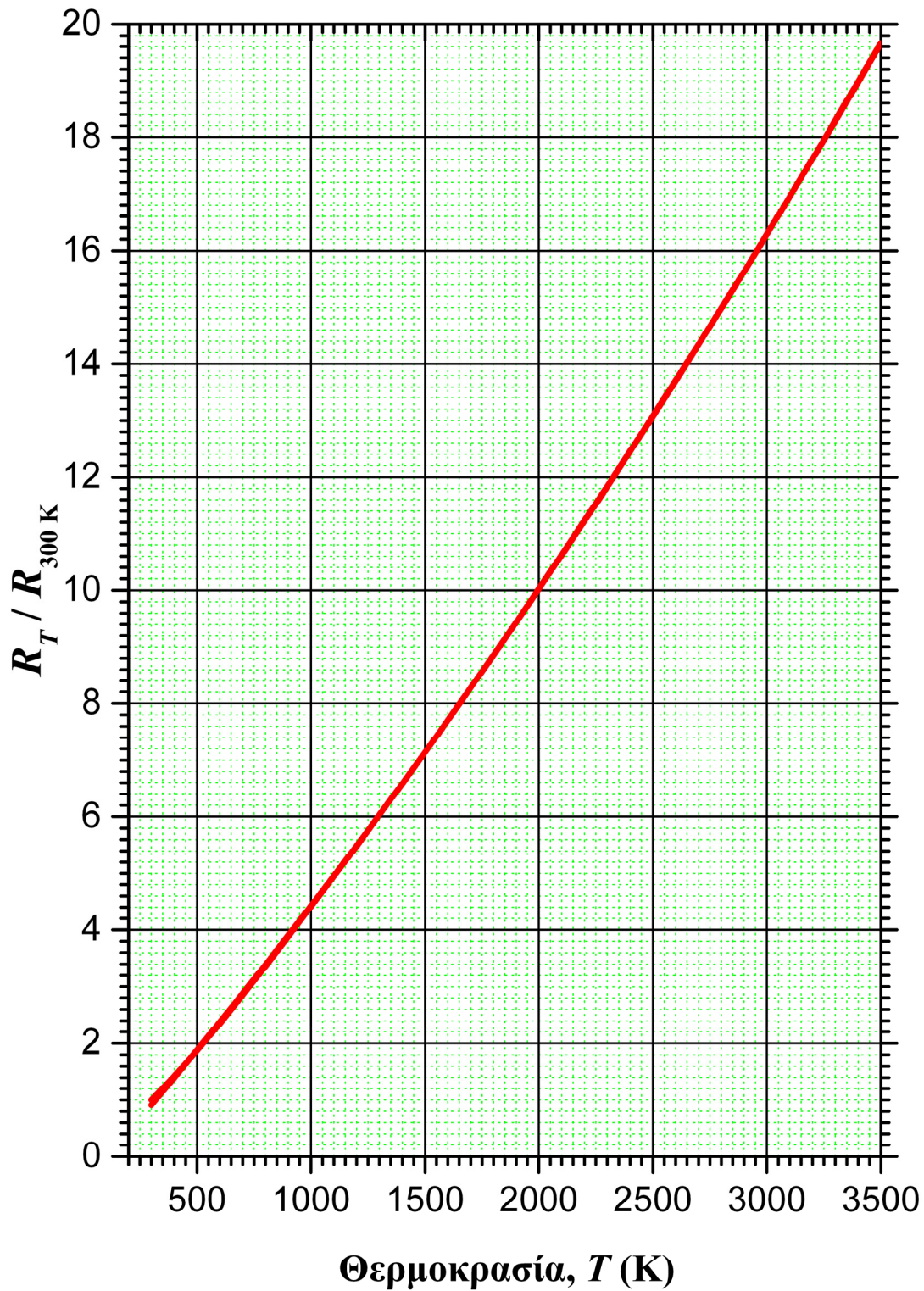
Ως μέλαν σώμα χρησιμοποιούμε το νήμα βολφραμίου μιας λάμπας πυρακτώσεως. Για τον υπολογισμό της θερμοκρασίας T του νήματος, εκμεταλλευόμαστε το γεγονός ότι η ηλεκτρική αντίσταση R του νήματος δεν παραμένει σταθερή, αλλά μεταβάλλεται με τη θερμοκρασία.

Η μεταβολή της σχετικής αντίστασης του νήματος R_T/R_{300} (ο λόγος της αντίστασης του νήματος σε θερμοκρασία T προς την αντίσταση R_{300} σε θερμοκρασία δωματίου, δηλ. 300K) ως προς τη θερμοκρασία, απεικονίζεται στη γραφική παράσταση του Σχήματος 10.2. Η μεταβολή αυτή εκφράζεται από μία εξίσωση 2^{ου} βαθμού, ως εξής:

$$\frac{R_T}{R_{300}} = A + BT + CT^2 \quad (10.6)$$

όπου T είναι η θερμοκρασία (σε K) και οι συντελεστές A , B και C έχουν αριθμητικές τιμές: $A = -0.4935$, $B = 0.00459$ και $C = 3.355 \times 10^{-7}$.

Η αντίσταση του νήματος μπορεί να υπολογιστεί εύκολα μέσω του νόμου του Ohm, μετρώντας την τάση V στα άκρα του νήματος, καθώς και το ρεύμα I που το διαρρέει.



Σχήμα 10.2 Μεταβολή της σχετικής αντίστασης R_T/R_{300} του νήματος της λάμπας πυρακτώσεως σε συνάρτηση της θερμοκρασίας της T .

Η παραπάνω επαλήθευση του νόμου Stefan – Boltzmann μπορεί να γίνει όχι μόνον για υψηλές θερμοκρασίες (όπως αυτές του νήματος του λαμπτήρα πυρακτώσεως δηλ., 1000-3000 °C), αλλά και για χαμηλές (έως 100 °C) χρησιμοποιώντας τον κύβο Leslie. Πρόκειται για κύβο αλουμινίου όπου οι παράπλευρες επιφάνειες του λόγω διαφορετικού χρώματος (μαύρη, άσπρη, μεταλλική και ματ) έχουν διαφορετικό συντελεστή εκπομπής, ενώ το εσωτερικό του γεμίζει με ζεστό νερό, ώστε να μεταβάλλεται η θερμοκρασία των ακτινοβολούμενων επιφανειών. Στην περίπτωση των χαμηλών θερμοκρασιών θα πρέπει να λάβουμε βέβαια υπόψη τη θερμοκρασία περιβάλλοντος που είναι συγκρίσιμη με αυτή του κύβου, ώστε η ανταλλαγή θερμότητας που πραγματοποιείται να εκφράζεται στην περίπτωση αυτή από την ακόλουθη σχέση:

$$M = \sigma T^4 - \sigma T_{\pi}^4 \quad (10.7)$$

όπου T_{π} η θερμοκρασία του περιβάλλοντος χώρου (θερμοκρασία δωματίου).

Επιπλέον, στο παρόν πείραμα θα επαληθευτεί ο νόμος του αντιστρόφου τετραγώνου. Σύμφωνα με το νόμο αυτό, η ακτινοβολούμενη ενέργεια M ανά μονάδα επιφάνειας που εκπέμπεται από μία σημειακή πηγή, μειώνεται αντιστρόφως ανάλογα με το τετράγωνο της απόστασης D της πηγής από το σημείο ανίχνευσης. Έτσι, στη σχέση της μορφής:

$$M \propto D^{\beta} \quad (10.8)$$

η σταθερά β που προκύπτει ως η κλίση της ευθείας $M=f(D)$ σε λογαριθμικό χαρτί, θα πρέπει να βρεθεί ίση με -2 ώστε να επιβεβαιωθεί η θεωρία.

10.1.3. Πειραματικό μέρος

10.1.3.1. Χρησιμοποιούμενα όργανα

1. Λαμπτήρας πυρακτώσεως και τροφοδοτικό χαμηλής τάσης για την τροφοδοσία του.
2. Αισθητήρας ακτινοβολίας συνδεδεμένος με βολτόμετρο (Σύνδεσμος 1, Βιβλιογραφία).
3. Ένα αμπερόμετρο και ένα βολτόμετρο.
4. Καλώδια για τις απαραίτητες συνδέσεις.
5. Βαθμονομημένη βάση στήριξης ή μεταλλικός χάρακας 1 m και ακρίβειας 1 mm.
6. Κύβος αλουμινίου (κύβος Leslie) με πλαστικό αναδευτήρα νερού και οπή για την τοποθέτηση θερμομέτρου.
7. Θερμόμετρο με ψηφιακό σύστημα ενδείξεων, ακρίβειας 0.1 °C.
8. Βραστήρας νερού.

Η πειραματική διάταξη απεικονίζεται στο Σχήμα 10.3.

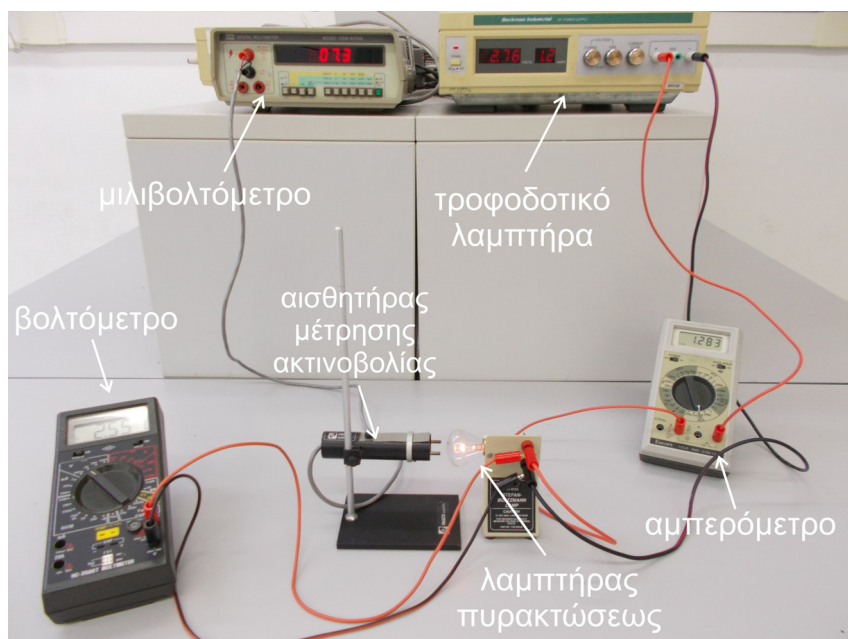
10.1.3.2. Μετρήσεις

1^ο πείραμα

1. Μετρήστε την αντίσταση R_{300} του νήματος του λαμπτήρα σε θερμοκρασία δωματίου (300K). **ΠΡΟΣΟΧΗ:** η ακρίβεια της μέτρησης αυτής είναι σημαντική γιατί μικρό σφάλμα στη μέτρηση, μπορεί να οδηγήσει σε μεγάλο σφάλμα στον μετέπειτα υπολογισμό της θερμοκρασίας του νήματος.

$$R_{300} = \dots \dots \dots \Omega$$

2. Πραγματοποιήστε το κύκλωμα του σχήματος 10.3. Προσέξτε έτσι ώστε ο αισθητήρας ακτινοβολίας να βρίσκεται στο ίδιο ύψος με το νήμα του λαμπτήρα και σε σταθερή απόσταση από αυτόν. Πριν ανάψετε το τροφοδοτικό του λαμπτήρα, βεβαιωθείτε ότι τα ποτενσιόμετρα ρεύματος και τάσης είναι μηδενισμένα. **ΠΡΟΣΟΧΗ:** το ρεύμα του νήματος δε θα πρέπει να υπερβεί τα 3 A, γιατί υπάρχει κίνδυνος να καεί.



Σχήμα 10.3 Πειραματική διάταξη για τη μελέτη του νόμου των Stefan – Boltzmann.

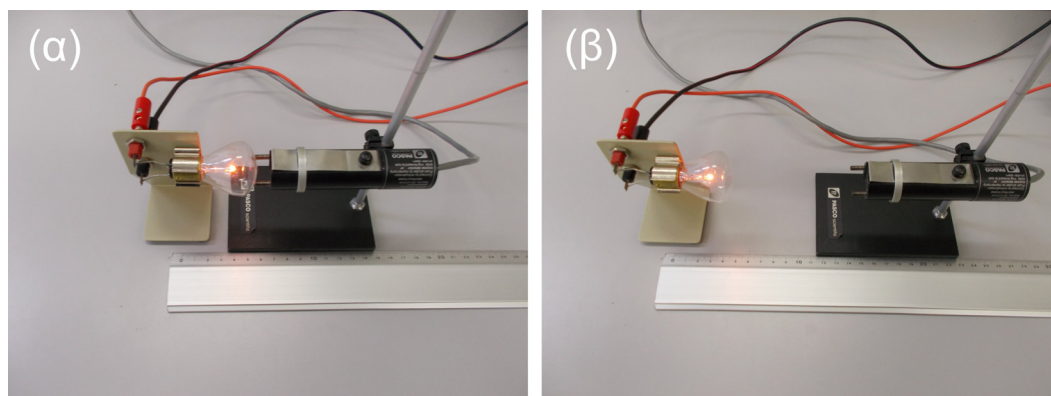
τάση, V (V)	ρεύμα, I (A)	M (mV)	Αντίσταση R (Ω)	σχετική αντίσταση R_T/R_{300}	Θερμοκρασία T (K)
0.6					
0.8					
1.0					
1.2					
1.4					
1.6					
1.8					
2.0					
2.2					
2.4					
2.6					
2.8					
3.0					

Πίνακας 10.1 $1^{ος}$ Πίνακας Μετρήσεων για την επαλήθευση του νόμου των Stefan-Boltzmann.

3. Για τις τιμές της τάσης V του νήματος από τον πίνακα μετρήσεων, μετρήστε το ρεύμα I και την ένδειξη M του μιλιβολτόμετρου του αισθητήρα ακτινοβολίας και καταχωρίστε τις τιμές στις αντίστοιχες στήλες του Πίνακα Μετρήσεων 10.1. Οι τιμές των V και I μετρώνται με το βολτόμετρο και το αμπερόμετρο και δεν λαμβάνονται από τις ενδείξεις του τροφοδοτικού.
4. Υπολογίστε από το νόμο του Ohm $R = \frac{V}{I}$, την αντίσταση του νήματος του λαμπτήρα για κάθε ένα από τα ζεύγη των τιμών (V, I) και καταχωρίστε τα αποτελέσματα στην αντίστοιχη στήλη του Πίνακα μετρήσεων 10.1.
5. Υπολογίστε τη σχετική αντίσταση R_T/R_{300} και στη συνέχεια από τη γραφική παράσταση του Σχήματος 10.2, υπολογίστε τις αντίστοιχες τιμές των θερμοκρασιών T . Καταχωρίστε ανάλογα τα αποτελέσματα στον Πίνακα Μετρήσεων.
6. Κάντε τη γραφική παράσταση $M = f(T)$ σε λογαριθμικό χαρτί και από την κλίση της ευθείας, υπολογίστε την τιμή του εκθέτη α .
7. Επαναλάβετε τον υπολογισμό της σταθεράς α με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Ποιος από τους δύο τρόπους δίνει καλύτερο αποτέλεσμα;

2^ο πείραμα

8. Για την επαλήθευση του νόμου του αντιστρόφου τετραγώνου, τοποθετήστε τον λαμπτήρα πυρακτώσεως και τον αισθητήρα ακτινοβολίας δίπλα στο μεταλλικό χάρακα που φέρει αριθμημένη κλίμακα (Σχήμα 10.4). Βεβαιωθείτε ότι ο αισθητήρας με το νήμα βρίσκονται στο ίδιο ύψος και προσαρμόστε το μεταλλικό χάρακα στη βάση στήριξης του αισθητήρα ώστε η ένδειξη 3 cm να συμπίπτει με τη μπροστινή γωνία της βάσης.
9. Τοποθετήστε το λαμπτήρα έτσι ώστε να εφάπτεται με τις μεταλλικές προεξοχές του αισθητήρα (Σχήμα 10.4α). Κατά αυτόν τον τρόπο, η ελάχιστη απόσταση που βρίσκεται ο αισθητήρας ακτινοβολίας είναι 3 cm. Θέστε το ρεύμα λειτουργίας του λαμπτήρα στα $I = 2.5$ A. Η τιμή αυτή του ρεύματος θα παραμείνει σταθερή καθ' όλη τη διάρκεια του πειράματος. Καταγράψτε την ένδειξη του αισθητήρα στο 2^ο Πίνακα μετρήσεων.



Σχήμα 10.4 Πειραματική διάταξη για τη μελέτη του νόμου του αντιστρόφου τετραγώνου.

10. Μεταβάλλεται την απόσταση D μεταξύ του αισθητήρα και του νήματος (Σχήμα 10.4β), απομακρύνοντας τον αισθητήρα από την λάμπα και για τις τιμές του D που αναγράφονται στον Πίνακα μετρήσεων 10.2, καταγράψτε την αντίστοιχη ένδειξη του αισθητήρα ακτινοβολίας.
11. Κάντε τη γραφική παράσταση $M=f(D)$ πρώτα σε χιλιοστομετρικό και ύστερα σε λογαριθμικό χαρτί.

12. Από την κλίση της ευθείας που προέκυψε στο λογαριθμικό χαρτί, υπολογίστε τη σταθερά β της σχέσης 10.8.
13. Επαληθεύεται ο νόμος του αντιστρόφου τετραγώνου;

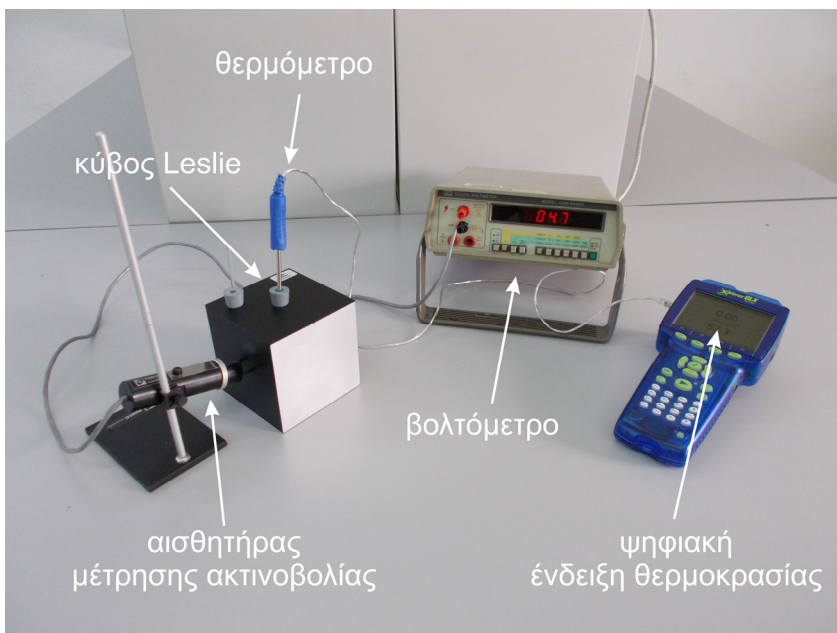
D (cm)	M (mV)	D (cm)	M (mV)
3.0		10.0	
3.5		15.0	
4.0		20.0	
4.5		25.0	
5.0		30.0	
6.0		35.0	
7.0		40	
8.0		45.0	

Πίνακας 10.2 2^{ος} Πίνακας Μετρήσεων για την επαλήθευση του νόμου αντιστρόφου τετραγώνου.

3^ο πείραμα

14. Πραγματοποιήστε τη συνδεσμολογία που απεικονίζεται στο Σχήμα 10.5. Θέστε το ψηφιακό θερμόμετρο και το μιλιβολτόμετρο σε λειτουργία, ώστε να απεικονίζονται οι ενδείξεις της θερμοκρασίας και του αισθητήρα θερμικής ακτινοβολίας. Καταγράψτε την ένδειξη της θερμοκρασίας δωματίου.

$$T_{\pi} = \dots\dots\dots \text{ }^{\circ}\text{C}$$



Σχήμα 10.5 Πειραματική διάταξη για τη μελέτη του νόμου των Stefan-Boltzmann σε χαμηλές θερμοκρασίες.

15. Αφού βράσετε νερό στο βραστήρα, αδειάστε το προσεκτικά στον κύβο Leslie, αφαιρώντας το καπάκι του. Κλείστε το καπάκι και τοποθετήστε το θερμομέτρο και τον αναδευτήρα στις δύο ειδικές οπές που διαθέτει και αναδεύστε το περιεχόμενο, ώστε να επέλθει θερμική ισορροπία. Καταγράψτε την ένδειξη του θερμομέτρου (θερμοκρασία κύβου-νερού) στον Πίνακα Μετρήσεων 10.3.

Θερμοκρασία κύβου	επιφάνεια	μαύρη	άσπρη	ματ	γυαλιστερή
... °C	συντελεστής εκπομπής (κανονικοποιημένο ποσοστό, %)	100	96.9 ± 1.2	20.2 ± 2.2	7.4 ± 1.8
...	M (mV)				

Πίνακας 10.3 Πίνακας μετρήσεων για εκπομπή θερμικής ακτινοβολίας σε χαμηλές θερμοκρασίες.

16. Τοποθετήστε τον αισθητήρα ακτινοβολίας μπροστά από κάθε μία από τις παράπλευρες επιφάνειες του κύβου και καταγράψτε τις αντίστοιχες ενδείξεις στον 3^ο Πίνακα μετρήσεων. Τι παρατηρείτε για τις τιμές αυτές, σε σύγκριση με το συντελεστή εκπομπής της κάθε επιφάνειας; Είναι οι μετρήσεις σύμφωνες με τον κανόνα ότι οι καλές ανακλαστικές επιφάνειες (κακοί απορροφητές) είναι κακοί εκπομποί;
17. Η ακόλουθη διαδικασία μπορεί να γίνει εφόσον υπάρχει αρκετός διαθέσιμος χρόνος: Αφήστε τον κύβο να κρυώσει και ανά 10 περίπου βαθμούς από την αρχική του θερμοκρασία καταγράψτε την εκπεμπόμενη ακτινοβολία M από τη μαύρη επιφάνεια. Καταχωρίστε τις μετρήσεις στον Πίνακα Μετρήσεων 10.4.
18. Υπολογίστε στις δύο τελευταίες στήλες του Πίνακα 10.4 τις ποσότητες T_K^4 και $T_K^4 - T_\pi^4$, όπου T_π η θερμοκρασία του δωματίου που μετρήσατε αρχικά. Χαράξτε τη γραφική παράσταση $M=f(T_K^4 - T_\pi^4)$ σε χιλιοστομετρικό χαρτί. Τι μορφή έχει και γιατί; Επαληθεύεται ο νόμος Stefan-Boltzmann σε χαμηλές θερμοκρασίες;

μετρήσεις		υπολογισμοί	
Θερμοκρασία κύβου, T_K (°C)	M (mV)	T_K^4 (K ⁴)	$T_K^4 - T_\pi^4$ (K ⁴)

Πίνακας 10.4 ^{4ος} Πίνακας μετρήσεων για την επαλήθευση του νόμου των Stefan-Boltzmann σε χαμηλές θερμοκρασίες.

10.1.4. Ασκήσεις

1. Εφαρμόζοντας το νόμο του Wien, υπολογίστε το μήκος κύματος (σε μm) που αντιστοιχεί στο μέγιστο της θερμικής ακτινοβολίας του ανθρώπινου σώματος (η θερμοκρασία του ανθρώπινου σώματος είναι περίπου 37°C).
2. Εφαρμόζοντας το νόμο του Wien, υπολογίστε το μήκος κύματος (σε μm) που αντιστοιχεί στο μέγιστο της εκπεμπόμενης θερμικής ακτινοβολίας από την επιφάνεια της γης, χρησιμοποιώντας τη μέση θερμοκρασία της, $T=15^\circ\text{C}$. Σε ποια περιοχή του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος αντιστοιχεί αυτό το μήκος κύματος;
3. Αν η ολική επιφάνεια του ανθρώπινου σώματος είναι 1.2 m^2 , να υπολογίσετε από το νόμο Stefan – Boltzmann, την ακτινοβολούμενη ενέργεια σε θερμίδες ($1\text{ cal} = 4.2\text{ J}$). Πως αντισταθμίζεται αυτή η απώλεια ενέργειας; Θεωρείστε το συντελεστή εκπομπής ίσο με τη μονάδα.
4. Υπολογίστε από το νόμο Stefan – Boltzmann, την ακτινοβολούμενη ενέργεια ανά μονάδα επιφάνειας ενός σύννεφου που η κάτω επιφάνεια του έχει θερμοκρασία -10°C . Θεωρείστε το συντελεστή εκπομπής ίσο με τη μονάδα. Σε ποιο μήκος κύματος εκπέμπεται η ενέργεια αυτή;

10.2. Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο

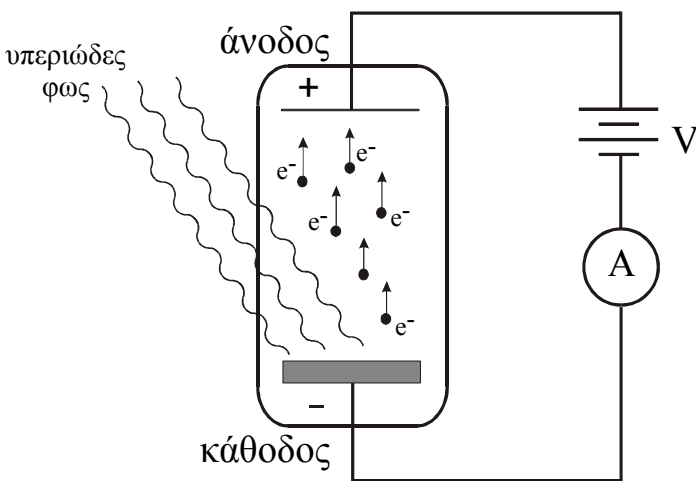
10.2.1. Σύντομη ανασκόπηση της θεωρίας

Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο ονομάζεται η εκπομπή ηλεκτρονίων από την επιφάνεια ενός αγωγού, όταν πάνω της προσπίπτει φως. Το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο παρατηρήθηκε για πρώτη φορά εντελώς τυχαία το 1887 από τον Hertz και μελετήθηκε λεπτομερώς από τους Hallwachs και Lenard στην περίοδο 1886 – 1900. Η σωστή ερμηνεία ωστόσο δόθηκε το 1905 από τον Einstein με τη βοήθεια της κβαντικής θεωρίας, αφού η κλασική κυματική θεωρία του Maxwell δε μπορούσε να το ερμηνεύσει. Για την εξήγηση αυτή ο Einstein πήρε το βραβείο Nobel Φυσικής το 1920.

Η πειραματική διάταξη που χρησιμοποιήθηκε για τη μελέτη του φωτοηλεκτρικού φαινομένου, απεικονίζεται στο Σχήμα 10.6 (Thornton & Rex, 2013). Δύο αγωγικά ηλεκτρόδια (άνοδος και κάθοδος) βρίσκονται στο εσωτερικό ενός γυάλινου σωλήνα υπό συνθήκες υψηλού κενού. Τα ηλεκτρόδια συνδέονται με τους πόλους μιας πηγής δυναμικού V , έτσι ώστε να δημιουργείται ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ ανόδου και καθόδου. Όταν φως πέσει πάνω στην επιφάνεια της καθόδου, τα εκπεμπόμενα ηλεκτρόνια (φωτοηλεκτρόνια) δημιουργούν ένα ρεύμα στο κύκλωμα το οποίο μπορεί να μετρηθεί με ένα αμπερόμετρο A. Οι Hallwachs και Lenard μελέτησαν την εξάρτηση αυτού του ρεύματος (φωτόρευμα) από τη διαφορά δυναμικού μεταξύ των ηλεκτροδίων, καθώς και από την ένταση του φωτός και τη συχνότητά του. Αν η συχνότητα του προσπίπτοντος φωτός είναι μικρότερη από μια ελάχιστη τιμή, τότε δεν εκπέμπεται κανένα φωτοηλεκτρόνιο από την κάθοδο. Η κρίσιμη αυτή ελάχιστη τιμή της συχνότητας που ονομάζεται συχνότητα κατωφλίου εξαρτάται από το υλικό της καθόδου. Στα αλκάλια, η συχνότητα κατωφλίου βρίσκεται στην ορατή περιοχή του ηλεκτρομαγνητικού (H/M) φάσματος, ενώ για τα περισσότερα μέταλλα βρίσκεται στην περιοχή του υπεριώδους (μήκη κύματος μεταξύ 200 και 300 nm). Αν η συχνότητα του προσπίπτοντος φωτός είναι μεγαλύτερη από τη συχνότητα κατωφλίου, ηλεκτρόνια εκπέμπονται από την κάθοδο με μεγάλη ταχύτητα και φτάνοντας στην άνοδο, προκαλούν ένα μετρήσιμο ρεύμα στο κύκλωμα. Ακόμα και αν αλλάξει η πολικότητα της πηγής στο Σχήμα 10.6, κάποια ηλεκτρόνια θα φθάνουν στην άνοδο, και μόνο αν η αντίστροφη αυτή διαφορά δυναμικού ξεπεράσει μια τιμή, θα σταματήσει η ροή των ηλεκτρονίων προς την άνοδο. Η τάση αυτή ονομάζεται δυναμικό αποκοπής V_0 και η πειραματική της μέτρηση μας δίνει έναν άμεσο τρόπο υπολογισμού της μέγιστης κινητικής ενέργειας με την οποία τα ηλεκτρόνια φεύγουν από την κάθοδο. Θα ισχύει δηλαδή:

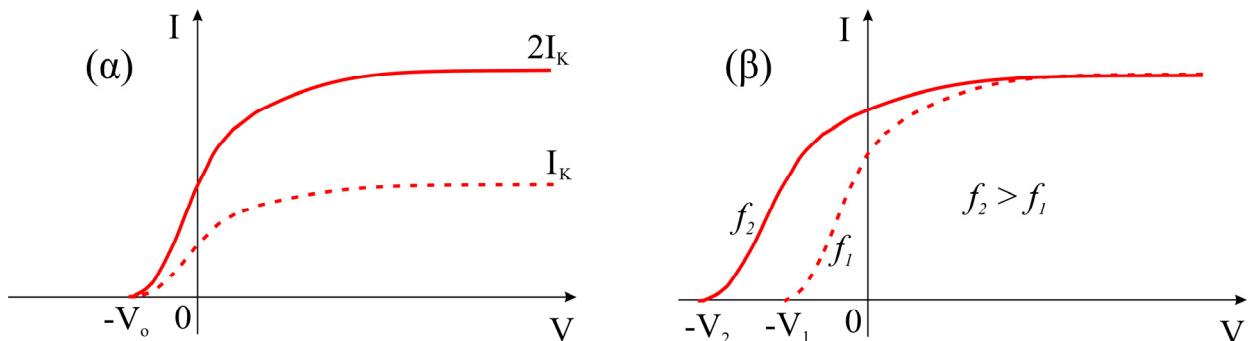
$$K_{max} = \frac{1}{2} m v_{max}^2 = e V_0 \quad (10.9)$$

όπου $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C είναι το φορτίο του ηλεκτρονίου.



Σχήμα 10.6 Σχηματική πειραματική διάταξη για τη μελέτη του φωτοηλεκτρικού φαινομένου.

Η εξάρτηση του φωτορεύματος από την τάση V της πηγής για σταθερή συχνότητα του προσπίπτοντος φωτός, απεικονίζεται στο σχήμα 10.7α. Παρατηρούμε ότι για μεγάλες τιμές της τάσης V το φωτόρευμα παραμένει σταθερό, αφού όλα τα ηλεκτρόνια συλλέγονται από την άνοδο. Αν η ένταση του προσπίπτοντος φωτός αυξηθεί, το ρεύμα θα σταθεροποιηθεί σε μια μεγαλύτερη τιμή. Ωστόσο, το δυναμικό αποκοπής θα παραμείνει το ίδιο. Αν όμως, αυξηθεί η συχνότητα του προσπίπτοντος μονοχρωματικού φωτός, θα αυξηθεί και το δυναμικό αποκοπής V_o .



Σχήμα 10.7 (α) Το φωτόρευμα I ως συνάρτηση της διαφοράς δυναμικού V μεταξύ ανόδου και καθόδου σε ένα φωτοκύτταρο. Για σταθερή συχνότητα του προσπίπτοντος φωτός, το δυναμικό αποκοπής V_o είναι ανεξάρτητο της έντασης του φωτός, ενώ το ρεύμα κόρου I_k είναι ανάλογο αυτής. (β) Το δυναμικό αποκοπής και επομένως και η μέγιστη κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων, αυξάνεται ανάλογα με την αύξηση της συχνότητας. Η ένταση του φωτός στην περίπτωση αυτή, παραμένει σταθερή.

Η ερμηνεία των παραπάνω πειραματικών αποτελεσμάτων έγινε από τον Einstein, ο οποίος πρότεινε αξιωματικά ότι μια δέσμη φωτός αποτελείται από μικρά πακέτα ενέργειας που ονομάζονται κβάντα φωτός ή φωτόνια. Η ενέργεια E ενός φωτονίου συχνότητας f θα ισούται με:

$$E = h \cdot f \quad (10.10)$$

όπου $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ είναι η σταθερά του Plank.

Όταν ένα φωτόνιο προσπίπτει στην επιφάνεια ενός αγωγού, υπάρχει πιθανότητα ένα ηλεκτρόνιο να απορροφήσει την ενέργεια αυτή και να διαφύγει από την επιφάνεια. Η ελάχιστη ενέργεια που πρέπει να αποκτήσει το ηλεκτρόνιο για να διαφύγει από την επιφάνεια ονομάζεται έργο εξαγωγής ή αλλιώς έργο εξόδου Φ της επιφάνειας. Το εκπεμπόμενο ηλεκτρόνιο επομένως θα έχει μέγιστη κινητική ενέργεια K_{max} , η οποία θα ισούται με την ενέργεια $h \cdot f$ που απέκτησε από το φωτόνιο μείον το έργο εξαγωγής. Δηλ. ισχύει

$$K_{max} = \frac{1}{2} m v_{max}^2 = h \cdot f - \Phi \quad (10.11)$$

Στον Πίνακα 10.5, δίνονται τα έργα εξαγωγής για τις καθαρές επιφάνειες διαφόρων μετάλλων, καθώς και οι αντίστοιχες συχνότητες κατωφλίου. Τα έργα εξαγωγής εκφράζονται συνήθως σε ηλεκτρονιο-βόλτ (eV) όπου $1 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$

μέταλλο	Συχνότητα κατωφλίου (Hz)	Έργο εξαγωγής Φ (eV)
Καίσιο (Cs)	4.6×10^{14}	1.9
Βηρύλλιο (Be)	9.4×10^{14}	3.9
Τιτάνιο (Ti)	9.9×10^{14}	4.1
Υδράργυρος (Hg)	1.09×10^{15}	4.5
Χρυσός (Pt)	1.16×10^{15}	4.8
Παλλάδιο (Pd)	1.21×10^{15}	5.0

Πίνακας 10.5 Συχνότητες κατωφλίου και έργο εξαγωγής διαφόρων μετάλλων

10.2.2. Σκοπός του πειράματος

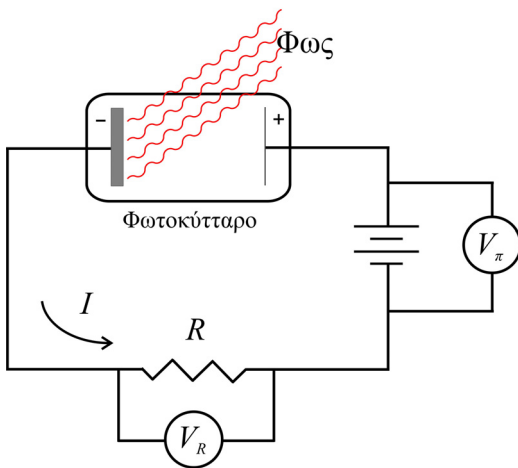
Σκοπός του πειράματος είναι ο πειραματικός προσδιορισμός της καμπύλης του φωτορεύματος, ως συνάρτηση της διαφοράς δυναμικού μεταξύ ανόδου και καθόδου ενός φωτοκύτταρου. Αυτό επιτυγχάνεται εύκολα μεταβάλλοντας τη διαφορά δυναμικού μεταξύ των ηλεκτροδίων στο φωτοκύτταρο και μετρώντας με ένα αμπερόμετρο το ρεύμα που διαρρέει το εξωτερικό κύκλωμα. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται για δύο διαφορετικές τιμές της έντασης του φωτός, ώστε να διαπιστωθεί η εξάρτηση του δυναμικού αποκοπής και του ρεύματος κόρου (μέγιστη τιμή του φωτορεύματος) από την ένταση του προσπίπτοντος φωτός.

10.2.3. Πειραματικό μέρος

10.2.3.1. Χρησιμοποιούμενα όργανα

1. Ένα φωτοκύτταρο
2. Ένα φωτόμετρο για τη μέτρηση της έντασης του φωτός που προσπίπτει στο φωτοκύτταρο.
3. Ένα τροφοδοτικό συνεχούς τάσης 0 – 60 V για την τροφοδοσία του φωτοκύτταρου.
4. Μία λάμπα πυρακτώσεως τάσεως 12 V με το τροφοδοτικό της για το φωτισμό του φωτοκύτταρου.
5. Δύο βολτόμετρα για τη μέτρηση της τάσης της πηγής V_{π} και της τάσης V_R στα άκρα της αντίστασης.
6. Καλώδια και μία πλακέτα πάνω στην οποία γίνονται οι συνδέσεις του κυκλώματος.

Η πειραματική διάταξη απεικονίζεται στα Σχήματα 10.8 και 10.9.



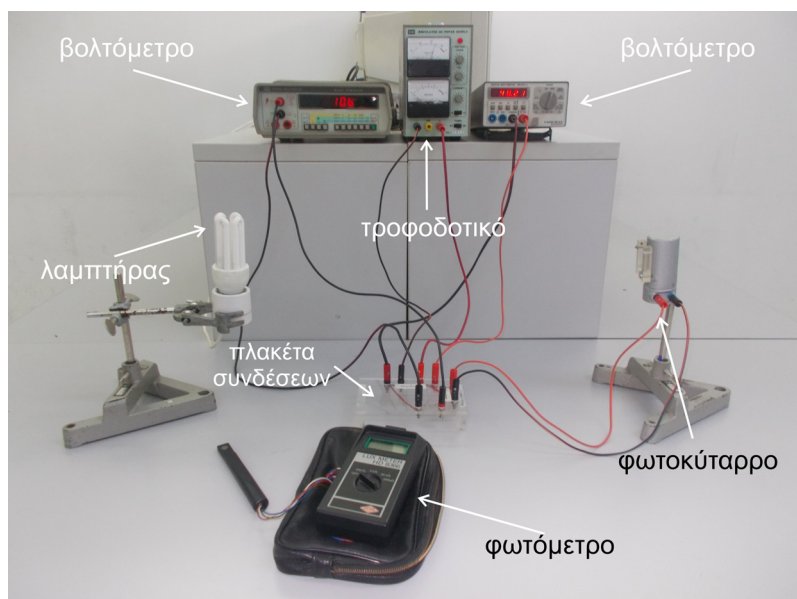
Σχήμα 10.8 Σχηματική απεικόνιση της πειραματικής διάταξης, για τη μέτρηση του φωτορεύματος ενός φωτοκύτταρου συναρτήσει της διαφοράς δυναμικού στα άκρα του.

10.2.3.2. Μετρήσεις

1. Πριν πραγματοποιήσετε το κύκλωμα του σχήματος 10.8 (δες Σχήμα 10.9), μετρήστε με ένα ωμόμετρο την αντίσταση R του κυκλώματος.

$$R = \dots \dots \dots \Omega$$

2. Ανάψτε τη λάμπα πυρακτώσεως και ρυθμίστε τη θέση της ή την τάση λειτουργίας της, έτσι ώστε ο φωτισμός στο φωτοκύτταρο να είναι 1000 Lux. Η φωτεινή ένταση μετράται με το φωτόμετρο, τοποθετώντας το στην ειδική εσοχή μπροστά από το κάλυμμα του φωτοκύτταρου.
3. Το ρεύμα των φωτοηλεκτρονίων που εκπέμπονται από την κάθοδο και κατά συνέπεια το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα, μπορεί να υπολογιστεί από το νόμο του Ohm, μετρώντας με ένα βολτόμετρο τη διαφορά δυναμικού V_R στα άκρα της αντίστασης R :



Σχήμα 10.9 Απεικόνιση της οργάνολογίας του πειράματος για την μέτρηση του φωτορεύματος ενός φωτοκυττάρου λόγω του φωτοηλεκτρικού φαινομένου.

V_{π} (V)	1000 Lux			2000 Lux		
	V_R (V)	V (V)	I (μ A)	V_R (V)	V (V)	I (μ A)
0.0						
1.0						
2.0						
4.0						
6.0						
8.0						
10.0						
15.0						
20.0						
25.0						
30.0						
35.0						
40.0						
45.0						
50.0						
55.0						
60.0						

Πίνακας 10.6 Πίνακας Μετρήσεων τάσεων για δύο διαφορετικούς φωτισμούς του φωτοκυττάρου.

$$I = \frac{V_R}{R} \quad (10.12)$$

4. Για τις τιμές της τάσης V_π του Πίνακα μετρήσεων 10.6, όπως αυτές μετρώνται με ένα βολτόμετρο συνδεδεμένο στα άκρα της πηγής, μετρήστε την τάση V_R στα άκρα της αντίστασης. Καταχωρίστε τις αντίστοιχες τιμές στη 2^η στήλη του Πίνακα μετρήσεων 10.6.
5. Η τάση V στα άκρα του φωτοκύτταρου μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση: $V = V_\pi - V_R$, ενώ το ρεύμα I από τη σχέση 10.12. Καταχωρίστε τα αποτελέσματα στις αντίστοιχες στήλες του Πίνακα μετρήσεων 10.6.
6. Επαναλάβετε τα βήματα 2-5 για διπλάσιο φωτισμό του φωτοκύτταρου (2000 Lux) και καταχωρίστε τα αποτελέσματα στον πίνακα μετρήσεων.
7. Χαράξτε στο ίδιο χιλιοστομετρικό χαρτί τις γραφικές παραστάσεις $I=f(V)$ για τις δύο εντάσεις φωτός (1000 και 2000 Lux).
8. Υπολογίστε για κάθε μία από τις παραπάνω καμπύλες, το ρεύμα κόρου και το δυναμικό αποκοπής. Τι συμπέρασμα βγάζετε για τη σχέση των δύο ρευμάτων, σύμφωνα με τη θεωρία;

10.2.4. Ασκήσεις

1. Ακτινοβολία μήκους κύματος $\lambda = 250 \text{ nm}$ απορροφάται από την κάθοδο ενός φωτοκύτταρου που είναι κατασκευασμένη από πλατίνα (Pt). Να υπολογίσετε τη μέγιστη κινητική ενέργεια των εκπεμπόμενων ηλεκτρονίων.
2. Υπολογίστε την ενέργεια των φωτονίων (σε eV) μήκους κύματος 100 nm και 400 nm (υπεριώδης ακτινοβολία, UV).
3. Υπολογίστε τη σταθερά h του Planck σε $eV \cdot s$.

10.3. Ραδιενέργεια

10.3.1. Σύντομη ανασκόπηση της θεωρίας

Ιστορικά, η ραδιενέργεια παρατηρήθηκε πρώτα από τον Becquerel το 1896, ο οποίος ανακάλυψε ότι ορισμένα ουρανιούχα ορυκτά είχαν την ιδιότητα να μαυρίζουν φωτογραφικές πλάκες, όπως οι ακτίνες X που εκείνη την εποχή είχαν μόλις ανακαλυφθεί. Διαδοχικές εντατικές έρευνες των Becquerel, Marie και Pierre Curie, Rutherford και άλλων, έδειξαν ότι η ακτινοβολία που ήταν υπεύθυνη για το μαύρισμα των φωτογραφικών πλακών αποτελείται από τρεις συνιστώσες. Κατά τη διέλευση της δέσμης ακτινοβολίας μέσα από ένα μαγνητικό πεδίο, η πρώτη συνιστώσα απέκλινε όπως ένα θετικά φορτισμένο σωματίδιο, η δεύτερη όπως ένα ελαφρό αρνητικά φορτισμένο σωματίδιο, ενώ η τρίτη συνιστώσα παρέμεινε ανεπηρέαστη από το μαγνητικό πεδίο. Τα τρία αυτά είδη ακτινοβολίας ονομάστηκαν ακτινοβολίες α , β και γ , αντίστοιχα. Η ιδιότητα διαφόρων στοιχείων να εκπέμπουν τις ακτινοβολίες αυτές, ονομάστηκε ραδιενέργεια από την M. Curie. Σήμερα γνωρίζουμε ότι η ακτινοβολία α είναι πυρήνες ${}^4\text{He}$ (2 πρωτόνια και 2 νετρόνια) που εκπέμπονται αυθόρμητα από διάφορους βαρείς πυρήνες, η ακτινοβολία β είναι ηλεκτρόνια και η ακτινοβολία γ είναι φωτόνια, δηλ. ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία προερχόμενη από την αποδιέγερση διεγερμένων καταστάσεων του πυρήνα.

10.3.1.1. Δομή του πυρήνα – πυρηνική αποδιέγερση

Ως γνωστό, οι βασικοί δομικοί λίθοι του πυρήνα είναι το πρωτόνιο (με φορτίο $+e$) και το νετρόνιο (με φορτίο μηδέν). Εκτός του πυρήνα και γύρω από αυτόν κινούνται τα ηλεκτρόνια που φέρουν αρνητικό φορτίο $-e$. Σε ένα ουδέτερο άτομο, ο ολικός αριθμός των πρωτονίων ονομάζεται ατομικός αριθμός Z και είναι ίσος με τον αριθμό των ηλεκτρονίων. Ο συνολικός αριθμός των νετρονίων N ονομάζεται νετρονικός αριθμός N , και το άθροισμα του με τον ατομικό αριθμό Z ονομάζεται μαζικός αριθμός A , δηλαδή ισχύει

$$A = Z + N$$

Κάθε ξεχωριστό είδος πυρήνα ονομάζεται νουκλίδιο. Άτομα ενός στοιχείου με τον ίδιο ατομικό αριθμό Z αλλά διαφορετικό νετρονικό αριθμό N , ονομάζονται ισότοπα του στοιχείου. Δηλαδή, τα ισότοπα ενός στοιχείου είναι παραλλαγές του στοιχείου με διαφορετικό αριθμό νετρονίων στον πυρήνα τους (και κατά συνέπεια διαφορετική μάζα). Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι το Cl (χλώριο) με $Z = 17$, όπου το 75% των πυρήνων έχει $N = 18$ και το υπόλοιπο 25% έχει $N = 20$. Αν σε ένα στοιχείο αλλάξει ο ατομικός αριθμός Z , τότε αλλάζει και το ίδιο το στοιχείο (μεταστοιχείωση). Συμβολικά, το κάθε νουκλίδιο παριστάνεται από το σύμβολο του αντίστοιχου στοιχείου X με ένα δείκτη κάτω αριστερά ίσο με Z (συνήθως παραλείπεται) και ένα δείκτη πάνω αριστερά που εκφράζει το μαζικό αριθμό A (${}^A_Z\text{X}$).

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι μάζες πρωτονίου και νετρονίου είναι σχεδόν ίσες, ενώ η μάζα του ηλεκτρονίου είναι 1840 φορές περίπου μικρότερη από τη μάζα ενός νουκλεονίου (p ή n). Σε ένα άτομο δηλαδή, όλη η μάζα του είναι συγκεντρωμένη στον πυρήνα που έχει διάμετρο 100000 φορές περίπου μικρότερη από τη διάμετρο ολόκληρου του ατόμου.

Οι δυνάμεις που συγκρατούν τα πρωτόνια και τα νετρόνια σε στενή σύνδεση στον πυρήνα, παρά τις ηλεκτρικές απώσεις των πρωτονίων (ομώνυμα φορτισμένα σωματίδια), είναι οι λεγόμενες πυρηνικές δυνάμεις. Πρόκειται για ισχυρές δυνάμεις μικρής εμβέλειας (της τάξης μεγέθους των διαστάσεων του πυρήνα), η επίδραση των οποίων είναι η ίδια, τόσο για τα πρωτόνια όσο και για τα νετρόνια. Αν ωστόσο, ο πυρήνας ενός στοιχείου είναι υπερβολικά μεγάλος ($A > 209$ ή $Z > 83$), οι απωστικές ηλεκτρικές δυνάμεις υπερεισχύουν των ελκτικών πυρηνικών δυνάμεων και ο πυρήνας διασπάται. Ο ασταθής πυρήνας που διασπάται ονομάζεται μητρικός ενώ ο πυρήνας που προκύπτει ονομάζεται θυγατρικός πυρήνας. Ένα ραδιενεργό στοιχείο μεταστοιχείωνεται με εκπομπή α ή β ακτινοβολίας που σχεδόν πάντα συνοδεύεται και από εκπομπή ακτινοβολίας γ . Στην α -διάσπαση, ο θυγατρικός πυρήνας έχει μαζικό αριθμό κατά 4 μονάδες μικρότερο και ατομικό αριθμό κατά 2 μονάδες μικρότερο. Στη β ακτινοβολία ο ατομικός αριθμός στο θυγατρικό πυρήνα αλλάζει κατά 1 μονάδα σε σχέση με το μητρικό, ενώ ο μαζικός αριθμός παραμένει αμετάβλητος. Στη γ ακτινοβολία μαζικός και ατομικός αριθμός δε μεταβάλλονται.

Όταν ένας ραδιενεργός πυρήνας διασπάται, ο θυγατρικός πυρήνας μπορεί να είναι και αυτός ασταθής, οπότε συμβαίνει μια σειρά διαδοχικών πυρηνικών διασπάσεων μέχρις ότου επιτευχθεί ένας σταθερός

πυρήνας. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί το ραδιενεργό στοιχείο ουράνιο ^{238}U που βρίσκεται στη Γη στη μεγαλύτερη αφθονία και το οποίο υπόκειται σε μια σειρά 14 διασπάσεων (8 εκπομπές α και 6 β) καταλήγοντας στο σταθερό ισότοπο του μολύβδου ^{206}Pb .

10.3.1.2. Ρυθμοί διάσπασης

Ένας ραδιενεργός πυρήνας δε διασπάται αμέσως μόλις σχηματιστεί, αλλά υπάρχει μια πεπερασμένη πιθανότητα να διασπαστεί μέσα σε ένα ορισμένο χρονικό διάστημα. Όσο ο συγκεκριμένος πυρήνας δε διασπάται, η πιθανότητα να διασπαστεί σε μια μετέπειτα χρονική στιγμή παραμένει σταθερή. Αν για παράδειγμα, η πιθανότητα να διασπαστεί σε 1 δευτερόλεπτο είναι 1%, αν μετά από μία ώρα ο πυρήνας δεν έχει διασπαστεί, πάλι θα έχει πιθανότητα 1% να διασπαστεί στο επόμενο δευτερόλεπτο. Πρόκειται για μια στατιστική διαδικασία η οποία ερμηνεύεται στα πλαίσια της κβαντικής θεωρίας. Μεταβολές στο φυσικό ή χημικό περιβάλλον ενός δείγματος ραδιενεργού στοιχείου όπως είναι η μεταβολή θερμοκρασίας, πίεσης, χημικές αντιδράσεις, κ.λ.π., δεν μπορούν να επηρεάσουν σημαντικά το ρυθμό διάσπασης, ενώ τα όρια των τιμών του ρυθμού αυτού για διαφορετικά νουκλίδια είναι εξαιρετικά ευρέα.

Ας υποθέσουμε ότι σε ένα δείγμα ραδιενεργού στοιχείου υπάρχουν N ραδιενεργοί πυρήνες τη χρονική στιγμή t και ότι ο αριθμός των πυρήνων που θα διασπαστεί στο επόμενο χρονικό διάστημα dt ισούται με dN . Όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός των πυρήνων στο δείγμα, τόσο περισσότεροι πυρήνες διασπώνται κατά τη διάρκεια ενός συγκεκριμένου χρονικού διαστήματος. Η μεταβολή dN στον αριθμό των πυρήνων θα είναι δηλαδή ανάλογη του N και του dt :

$$dN = -\lambda \cdot N \cdot dt \quad (10.13)$$

ή

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda \cdot N \quad (10.14)$$

όπου η σταθερά λ ονομάζεται σταθερά διάσπασης και εξαρτάται από το είδος των νουκλιδίων. Το αρνητικό πρόσημο στις παραπάνω σχέσεις υποδηλώνει ότι ο αριθμός των πυρήνων ελαττώνεται με το χρόνο (αρνητική μεταβολή).

Η απόλυτη τιμή του ρυθμού μεταβολής dN/dt στη σχέση 10.14, ονομάζεται ρυθμός διάσπασης ή αλλιώς ενεργότητα του δείγματος. Από τη σχέση 10.14 με ολοκλήρωση προκύπτει:

$$N = N_0 e^{-\lambda \cdot t} \quad (10.15)$$

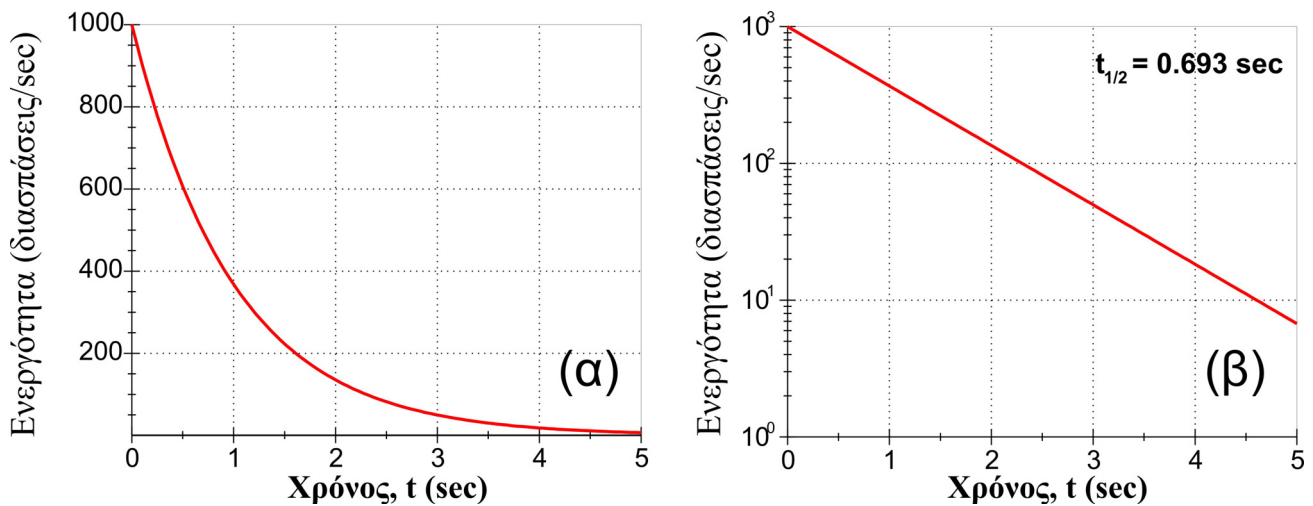
όπου N_0 ο αριθμός των ραδιενεργών πυρήνων τη χρονική στιγμή $t=0$.

Η παραπάνω μαθηματική έκφραση υποδηλώνει ότι ο αριθμός των πυρήνων σε ένα δείγμα ραδιενεργού υλικού ελαττώνεται εκθετικά με το χρόνο (Σχήμα 10.10α).

Ο χρόνος υποδιπλασιασμού $t_{1/2}$ (ή χρόνος ημιζωής) ορίζεται ως ο χρόνος που απαιτείται για να ελαττωθεί ο αριθμός των ραδιενεργών πυρήνων στο μισό του αρχικού αριθμού N_0 . Ο χρόνος υποδιπλασιασμού συναρτήσει της σταθεράς διάσπασης λ μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση 10.15, αν θέσουμε $N(t = t_{1/2}) = N_0/2$, οπότε θα προκύψει:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda \cdot t_{1/2}} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\lambda \cdot t_{1/2}} \Rightarrow \ln 2^{-1} = -\lambda \cdot t_{1/2} \Rightarrow$$

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693}{\lambda} \quad (10.16)$$



Σχήμα 10.10 (α) Μεταβολή της ενεργότητας ενός δείγματος ραδιενεργού υλικού ως προς το χρόνο ($N_0=1000$ πυρήνες και $\lambda=1\text{ s}^{-1}$) (β) Η ίδια μεταβολή σε ημιλογαριθμικό χαρτί είναι ευθεία με κλίση $\kappa=-\lambda \log e$.

Η κατά μέσο όρο διάρκεια ζωής ενός πυρήνα εκφράζεται από το μέσο χρόνο ζωής που ορίζεται ως εξής:

$$\tau = \frac{\int_0^{\infty} tN(t)dt}{\int_0^{\infty} N(t)dt} \quad (10.17)$$

Με αντικατάσταση της 10.15 στην παραπάνω σχέση προκύπτει τελικά ότι:

$$\tau = \frac{1}{\lambda}$$

και από την 10.16:

$$\tau = \frac{t_{1/2}}{\ln 2} = \frac{t_{1/2}}{0.693} \quad (10.18)$$

Η σταθερά της διάσπασης λ και κατά συνέπεια ο χρόνος υποδιπλασιασμού και ο μέσος χρόνος ζωής ενός πυρήνα, μπορούν εύκολα να υπολογιστούν από τη γραφική παράσταση της σχέσης 10.15 σε ημιλογαριθμικό χαρτί (Σχήμα 10.10β). Λογαριθμίζοντας τη 10.15, προκύπτει ότι:

$$\log N = \log N_0 + \log e^{-\lambda \cdot t} \Rightarrow$$

$$\log N = \log N_0 - \lambda \cdot \log e \cdot t$$

Η γραφική παράσταση δηλαδή της ενεργότητας ως προς το χρόνο, σε ημιλογαριθμικό χαρτί, θα είναι ευθεία της μορφής $y = \kappa x + \beta$, όπου η κλίση κ θα ισούται με:

$$\kappa = -\lambda \cdot \log e \quad (10.19)$$

Η χρησιμότητα της παραπάνω μεθόδου περιορίζεται σε ραδιενεργούς πυρήνες με μέσο χρόνο ζωής μερικών ημερών. Για ραδιενεργά ισότοπα με μεγαλύτερους χρόνους ζωής υπολογίζεται κατευθείαν η σταθερά διάσπασης λ , μετρώντας την ενεργότητα λN και υπολογίζοντας τον αριθμό των ραδιενεργών πυρήνων από τη γνωστή μάζα και σύνθεση του δείγματος. Γενικά, για να είναι παρατηρήσιμος ένας μέσος χρόνος ζωής θα

πρέπει να είναι από 10^{-6} sec μέχρι 10^4 χρόνια. Με ραδιενεργές μεθόδους έχει υπολογιστεί ότι η ηλικία της γης είναι περίπου 4.5×10^9 χρόνια. Στη φύση έχουν βρεθεί περίπου 340 ραδιενεργά ισότοπα από τα οποία τα 25, επειδή έχουν πολύ μεγάλο χρόνο υποδιπλασιασμού, εξακολουθούν να υπάρχουν μέχρι σήμερα από το σχηματισμό της Γης.

10.3.1.3. Μέτρηση Ραδιενέργειας – Μονάδες

Η βασική μονάδα μέτρησης της ενεργότητας είναι το Curie (Ci) που είναι ίσο με τη ραδιενέργεια που εκπέμπεται από ένα καθαρό ραδιενεργό δείγμα με μέσο ρυθμό αποδιέγερσης 3.7×10^{10} διασπάσεις ανά δευτερόλεπτο (Ασημακόπουλος, 1986). Ο ορισμός αυτός προέρχεται ιστορικά από το γεγονός ότι ο προηγούμενος ρυθμός αντιστοιχεί περίπου στο ρυθμό αποδιεγέρσεων που εμφανίζει 1 g του ^{226}Ra . Ακίνδυνες πηγές ραδιενέργειας σαν κι αυτές που χρησιμοποιούνται στο φοιτητικό εργαστήριο ή για τη βαθμονόμηση ανιχνευτών ακτινοβολίας είναι της τάξης των μCi . Αντίθετα, πηγές ακτινοβολίας γ της τάξης των kCi χρησιμοποιούνται εκτεταμένα σήμερα στη ραδιοθεραπεία, ενώ ακόμα μεγαλύτερες πηγές, της τάξης των MCi , σε βιομηχανικές εφαρμογές.

Το Ci είναι σχετικά μεγάλη μονάδα, οπότε εναλλακτικά χρησιμοποιείται ως μονάδα ραδιενέργειας το becquerel (Bq) που ισούται με μία διάσπαση ανά sec. Επομένως

$$1 \text{ Ci} = 3.7 \times 10^{10} \text{ Bq}$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι οι φυσικές διαστάσεις μιας πηγής ορισμένης ενεργότητας, εξαρτώνται από το μέσο χρόνο ζωής της μετάπτωσης που την προκαλεί. Η ειδική ραδιενέργεια (ειδική ενεργότητα) μιας πηγής, δηλαδή η ραδιενέργεια ανά γραμμάριο υλικού της πηγής, δίνεται από την έκφραση:

$$r = \frac{\lambda N}{m} = \frac{1}{\tau} \cdot \frac{A_0}{A} \quad (10.20)$$

όπου m είναι η μάζα της πηγής, A_0 ο αριθμός του Avogadro και A το ατομικό βάρος του υλικού. Η μάζα επομένως μιας πηγής με ενεργότητα 1 Ci θα δίνεται από την έκφραση:

$$m = \frac{\lambda N}{A_0} A \tau = 6.14 \times 10^{-14} A \tau = 8.86 \times 10^{-14} A \cdot t_{1/2} \quad (10.21)$$

Έτσι μια πηγή καθαρού ουρανίου ^{235}U ($T_{1/2}=7.07 \times 10^8$ y) με ραδιενέργεια 1 Ci έχει μάζα περίπου 500 kg, ενώ πηγή ^{11}C ($T_{1/2}=20$ min) με την ίδια ενεργότητα έχει μάζα μόνο 1.2×10^{-9} g.

10.3.1.4. Βιολογικές επιπτώσεις της ραδιενέργειας

Ο άνθρωπος βρίσκεται συνεχώς εκτεθειμένος σε ραδιενέργεια που προέρχεται από την κοσμική ακτινοβολία και σε μικρότερο ποσοστό από τα ραδιοϊσότοπα που απαντώνται στη φύση (Ασημακόπουλος, 1986). Η ραγδαία ανάπτυξη της πυρηνικής τεχνολογίας τον περασμένο αιώνα, τόσο στην παραγωγή ενέργειας όσο και στην πολεμική βιομηχανία, έχει αυξήσει αισθητά το επίπεδο ραδιενέργειας που δέχεται ο πληθυσμός της γης. Οι βιολογικές επιπτώσεις της ραδιενέργειας μετρώνται από την ισχύ της να προκαλεί ιονισμό στον αέρα και στο βιολογικό ιστό. Καθώς σωματίδια α , β ή γ διέρχονται μέσα από την ύλη, χάνουν ενέργεια προκαλώντας τη διάσπαση των μοριακών δεσμών και τη δημιουργία ιόντων (ιονίζουσα ή ιοντίζουσα ακτινοβολία). Το αποτέλεσμα της δράσης της ραδιενέργειας στους βιολογικούς ιστούς εξαρτάται από το είδος της ακτινοβολίας, καθώς και το χρόνο έκθεσης και μπορεί να προκαλέσει σοβαρές ασθένειες ή και το θάνατο με μια ποικιλία μηχανισμών, μεταξύ των οποίων είναι η μαζική καταστροφή των κυττάρων, μεταβολές του γενετικού υλικού και καταστροφή των συστατικών του μυελού των οστών που παράγουν ερυθρά αιμοσφαίρια.

Βασική μονάδα μετρήσεως του ιονισμού που προκαλεί η ραδιενέργεια είναι το Roentgen που ορίζεται ως η ποσότητα των ακτίνων $-X$ ή ακτινοβολίας $-\gamma$ που παράγει θετικά ή αρνητικά ιόντα με φορτίο 1 esu μέσα σε 1 cm^3 ατμοσφαιρικού αέρα, σε κανονική θερμοκρασία και πίεση. Επειδή το roentgen αναφέρεται μόνο

στην ισχύ ιονισμού της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας (ακτίνες $-X$ ή $-\gamma$), για την απόδοση των επιπτώσεων ακτινοβολίας από σωματίδια α ή β , ορίζεται ως μονάδα το φυσικό ισοδύναμο του roentgen ή *rer* (roentgen equivalent, physically). Το 1 *rer* εκφράζει ιονισμό σε μαλακό βιολογικό ιστό, ισοδύναμο με τον ιονισμό που προκαλεί 1 roentgen στον αέρα. Η απορρόφηση ακτινοβολίας σε ένα υλικό εξαρτάται από την πυκνότητα του υλικού και από την ενέργεια και το είδος της ακτινοβολίας. Όσο πιο πυκνό είναι ένα υλικό, τόσο μεγαλύτερος είναι ο ιονισμός και επομένως τόσο μεγαλύτερη είναι η απορρόφηση ενέργειας. Η μέση ενέργεια ιονισμού που μεταφέρεται στο μαλακό βιολογικό ιστό από πηγή ραδιενέργειας γ με ισχύ 1 roentgen είναι περίπου 93 erg/g και η τιμή αυτή λαμβάνεται ως ο ορισμός του *rer* για ένταση ακτινοβολίας οποιασδήποτε φύσης.

Για να αντισταθμιστεί η αβεβαιότητα στη χρησιμοποίηση του *rer*, ως προς την απόδοση της απορροφήσεως ενέργειας από τα διάφορα μέρη του ανθρώπινου σώματος, εισήχθη ως μονάδα μέτρησης της απορροφηθείσας δόσης το rad (radiation absorbed dose) που εκφράζει τη μεταφορά ενέργειας από ακτινοβολία οποιασδήποτε φύσης σε οποιοδήποτε μέσο. Το rad ορίζεται ως η ακτινοβολία που προκαλεί μεταφορά ενέργειας 100 erg/g σε ένα ορισμένο υλικό και είναι περίπου ισοδύναμο με 1 roentgen στη μέση σύσταση βιολογικού ιστού (μαλακού και σκληρού) του ανθρώπινου σώματος.

Ειδικότερα, για την απόδοση των βιολογικών επιπτώσεων της ακτινοβολίας στον άνθρωπο χρησιμοποιείται το rem (roentgen equivalent man) που αντιστοιχεί σε ποσότητα ακτινοβολίας οποιασδήποτε φύσης, με τις ίδιες βιολογικές επιπτώσεις στον ανθρώπινο οργανισμό, όσο 1 roentgen ακτινοβολίας $-X$ ή $-\gamma$.

Αν και η επενέργεια της ακτινοβολίας στον άνθρωπο εξαρτάται από πολλούς παράγοντες, όπως η ενέργεια και η φύση της ακτινοβολίας αλλά και η ηλικία και το φύλλο του ατόμου που ακτινοβολείται, είναι δυνατή η απόδοσή της με την εισαγωγή ενός συντελεστή ποιότητας (*QF*, Quality Factor) που διαφοροποιεί τα βιολογικά αποτελέσματα διαφορετικών ειδών ακτινοβολίας. Έτσι, η βιολογική επίδραση περιγράφεται από το γινόμενο της απορροφηθείσας δόσης και του παράγοντα ποιότητας της ακτινοβολίας:

$$ED = D \cdot QF \quad (10.22)$$

όπου *D* είναι η δόση σε rad και ο αντίστοιχος συντελεστής ποιότητας *QF* για τα διάφορα είδη ακτινοβολίας δίνεται στον Πίνακα 10.7. Η παραπάνω ποσότητα ονομάζεται βιολογικά ισοδύναμη δόση ή απλά ισοδύναμη δόση.

Στο διεθνές σύστημα μονάδων (SI), η μονάδα της απορροφηθείσας δόσης είναι το gray (Gy) που ισοδυναμεί με μεταφορά ενός Joule σε 1 kg υλικού. Για τη μέτρηση της βιολογικώς απορροφούμενης δόσης ορίζεται το sievert (Sv), επίσης ίσο με 1 J/kg.

ακτινοβολία	συντελεστής ποιότητας, <i>QF</i>
Ακτίνες X, γ και β με ενέργεια > 30 keV	1.0
Ακτίνες X, γ και β με ενέργεια < 30 keV	1.7
Ταχεία ουδετερόνια και πρωτόνια μέχρι 10MeV	10
Σωματίδια α από φυσική ραδιενέργεια	10
Βαρέα ιόντα	20

Πίνακας 10.7 Συντελεστές ποιότητας για διαφορετικά είδη ακτινοβολίας

Οι σχέσεις μετατροπής μονάδων μέτρησης του συστήματος SI με τις παλαιότερες μονάδες είναι:

$$1 \text{ Ci} = 3.7 \times 10^{10} \text{ Bq}$$

$$1 \text{ rad} = 10^{-2} \text{ Gy}$$

$$1 \text{ rem} = 10^{-2} \text{ Sv}$$

$$1 \text{ roentgen} = 2.58 \times 10^{-4} \text{ C/kg}$$

10.3.1.5. Αλληλεπίδραση ακτινοβολίας α , β και γ με την ύλη

Όταν φορτισμένα σωμάτια (α ή β) διέρχονται από την ύλη, χάνουν ενέργεια λόγω διέγερσης και κυρίως λόγω ιονισμού που προκαλούν στα άτομα του απορροφητή. Η απώλεια αυτή της ενέργειας οφείλεται στην αλληλεπίδραση λόγω δυνάμεων Coulomb του φορτισμένου σωματίου και των δέσμιων ηλεκτρονίων του ατόμου. Αν τα φορτισμένα σωμάτια είναι σωμάτια α , η απόκλιση τους από την αρχική κατεύθυνση θα είναι αμελητέα, επειδή η μάζα τους είναι πολύ μεγαλύτερη της μάζας του ηλεκτρονίου. Αν ωστόσο πρόκειται για σωμάτια β που έχουν μάζα ίδια με αυτή των ηλεκτρονίων που αλληλεπιδρούν, η απόκλιση που υφίστανται είναι μεγάλη.

Στην περίπτωση των σωματίων β , αποδεικνύεται πειραματικά ότι η ένταση της δέσμης μεταβάλλεται εκθετικά με το βάθος x μέσα στον απορροφητή, σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση:

$$I = I_0 e^{-\mu \cdot x} \quad (10.23)$$

όπου I_0 είναι η ένταση της αρχικής δέσμης των σωματίων β και μ είναι ο συντελεστής απορρόφησης του υλικού. Επειδή συνήθως το πάχος δίνεται σε cm, ο συντελεστής απορρόφησης μ εκφράζεται σε cm^{-1} ώστε το γινόμενο τους που είναι ο εκθέτης στη σχέση 10.23 να είναι αδιάστατος αριθμός.

Η διείσδυση των σωματίων α στην ύλη είναι πολύ μικρή και ένα φύλλο χαρτί μπορεί να τα ανακόψει. Κατά συνέπεια δεν διεισδύει στο ανθρώπινο σώμα, αλλά αν ωστόσο βρεθεί ραδιενεργή ποσότητα που εκπέμπει σωμάτια α στο εσωτερικό του σώματος, η ενέργεια που απορροφήθηκε εκλύεται σε μικρή περιοχή προκαλώντας μεγάλη ζημιά στα κύτταρα. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η δηλητηρίαση του πρώην πράκτορα της KGB [Alexander Litvinenko](#) ο οποίος πέθανε εντός τριών εβδομάδων από ραδιενεργό πολώνιο ^{210}Po που εισήλθε στον οργανισμό του πίνοντας τσάι. Για την ακτινοβολία β , μια πλάκα Al πάχους μερικών mm είναι αρκετή για να την απορροφήσει πλήρως. Σε αντίθεση, η ακτινοβολία γ είναι εξαιρετικά διεισδυτική και χρειάζεται θωράκιση από μόλυβδο για να μειωθεί αισθητά η αρχική της ένταση.

Όπως και στην περίπτωση της ακτινοβολίας β , ο αριθμός N των σωματίων γ (φωτόνια) που καταγράφονται από ένα μετρητή ραδιενέργειας, μειώνεται εκθετικά με την αύξηση του πάχους του απορροφητή, σύμφωνα με τη σχέση:

$$N = N_0 e^{-\mu_m \cdot \rho_A} \quad (10.24)$$

όπου ρ_A είναι η επιφανειακή πυκνότητα του απορροφητή σε g/cm^2 και μ_m ο μαζικός συντελεστής απορρόφησης που δίνεται από τη σχέση:

$$\mu_m = \frac{\mu}{\rho} \quad (10.25)$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα του απορροφητή, οπότε το μ_m εκφράζεται σε μονάδες cm^2/g .

Το πάχος $x_{1/2}$ του απορροφητή όπου η ένταση της δέσμης πέφτει στο μισό της αρχικής της τιμής, ονομάζεται πάχος υποδιπλασιασμού και βρίσκεται (κατ' αναλογία με τον υπολογισμό του χρόνου υποδιπλασιασμού) ότι ισούται με:

$$x_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu} = \frac{0.693}{\mu} \quad (10.26)$$

10.3.1.6. Ανίχνευση και μέτρηση της ραδιενέργειας

Η ανίχνευση και μέτρηση της ραδιενέργειας γίνεται με διαφόρων τύπων ανιχνευτές οι οποίοι λειτουργούν με βάση τον ιονισμό που προκαλούν οι ακτινοβολίες α , β ή γ , όταν εισέρχονται στο εσωτερικό τους. Ανιχνευτής ραδιενέργειας είναι ο θάλαμος ιονισμού, ο αναλογικός απαριθμητής, ο απαριθμητής Geiger–Muller, οι ανιχνευτές ημιαγωγών, ή με βάση τη διέγερση των ατόμων του ανιχνευτή, οι ανιχνευτές σπινθηρισμών. Από τους παραπάνω ανιχνευτές, ο μετρητής Geiger–Muller είναι ευρέως διαδεδομένος εξαιτίας του μικρού του μεγέθους και της αξιοπιστίας, αλλά και του χαμηλού του κόστους, μειονεκτώντας ωστόσο στη μικρή

ευαισθησία ανίχνευσης ακτίνων- γ και την αδυναμία διαχωρισμού των διαφορετικών ενεργειών των ραδιενεργών ακτινοβολιών.

Ο απαριθμητής Geiger-Muller, αποτελείται από ένα κυλινδρικό μεταλλικό σωλήνα με λεπτά τοιχώματα και ένα σύρμα κατά μήκος του κυρίου άξονα, ηλεκτρικά μονωμένου από τα τοιχώματα του σωλήνα. Εφαρμόζοντας υψηλή διαφορά δυναμικού μεταξύ ανόδου και καθόδου, ισχυρό ηλεκτρικό πεδίο δημιουργείται στο εσωτερικό του σωλήνα. Σωματίδια που εκπέμπονται από ραδιενεργά υλικά εισέρχονται στον απαριθμητή από ένα μεταλλικό παράθυρο το οποίο είναι πολύ λεπτό (και συνεπώς εύθραυστο), έτσι ώστε να μην απορροφάται μεγάλο μέρος της ραδιενέργειας. Ο σωλήνας περιέχει ένα ευγενές αέριο, συνήθως Ar (αργό), σε πίεση μικρότερης της ατμοσφαιρικής. Όταν φορτισμένα σωματίδια, όπως σωματίδια άλφα ή βήτα εισέρχονται στο σωλήνα, προκαλούν τον ιονισμό των ατόμων του ευγενούς αερίου διώχνοντας σε καθένα από αυτά 1-2 εξωτερικά ηλεκτρόνια. Τα ηλεκτρόνια που ελευθερώνονται, επιταχύνονται προς τη θετικά φορτισμένη άνοδο προκαλώντας επιπρόσθετους ιονισμούς. Αυτή η αλυσιδωτή αντίδραση (φαινόμενο χιονοστιβάδας) έχει ως αποτέλεσμα ένας μεγάλος αριθμός ηλεκτρονίων να φτάνει στο συλλέκτη για κάθε σωματίδιο που εισέρχεται στο σωλήνα, δίνοντας ένα παλμό ρεύματος μετρήσιμο από το εξωτερικό κύκλωμα. Η ανίχνευση ωστόσο ενός παλμού ρεύματος προκαλεί την ελάττωση της εφαρμοζόμενης στο σωλήνα τάσης. Μετά από κάθε παλμό, η τάση στο σωλήνα πρέπει να αποκατασταθεί, γεγονός που απαιτεί χρονικό διάστημα μερικών εκατοντάδων μsec , δηλαδή έναν “νεκρό χρόνο”, κατά τη διάρκεια του οποίου κάθε σωματίδιο που εισέρχεται στο σωλήνα δε θα καταγραφεί.

Αν t_d είναι ο νεκρός χρόνος ενός απαριθμητή ο οποίος καταγράφει R' παλμούς στη μονάδα του χρόνου (counts per sec, cps), τότε κατά τη διάρκεια ενός δευτερολέπτου, θα καταγράψει παλμούς για χρονικό διάστημα $1-t_d R'$ γιατί θα παραμείνει ανενεργός για χρόνο $t_d R'$. Επομένως, ο πραγματικός αριθμός των σωματίων που εισέρχονται στον απαριθμητή στη μονάδα του χρόνου είναι:

$$R = \frac{R'}{1 - t_d \cdot R'} \quad (10.27)$$

Βάσει της παραπάνω σχέσης, γνωρίζοντας το νεκρό χρόνο του απαριθμητή και τον αριθμό των σωματίων που καταγράφει, μπορούμε να κάνουμε διόρθωση υπολογίζοντας τον πραγματικό αριθμό των σωματίων που εισέρχονται στον απαριθμητή.

Ο νεκρός χρόνος ενός απαριθμητή Geiger-Muller μπορεί να υπολογιστεί πειραματικά χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των δύο πηγών. Αρχικά μετράμε τον αριθμό των παλμών R_1 που καταγράφει ο απαριθμητής από μια πηγή. Μετά, προσθέτουμε συμμετρικά ως προς την πρώτη, δεύτερη όμοια πηγή και μετράμε τον αριθμό των παλμών R_{12} με τις δύο πηγές ταυτόχρονα. Τέλος, αφαιρούμε την πρώτη πηγή, χωρίς να μετακινήσουμε τη δεύτερη και μετράμε τον αριθμό των παλμών R_2 . Ο νεκρός χρόνος του απαριθμητή υπολογίζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$t_d = \frac{R_1 + R_2 - R_{12}}{2R_1 R_2} \quad (10.28)$$

10.3.1.7. Στατιστικά φαινόμενα στη ραδιενέργεια

Η εκπομπή σωματιδίων κατά τη διάσπαση ραδιενεργών πυρήνων αποτελεί ένα τυχαίο φαινόμενο, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως. Υπό τις ίδιες δηλαδή συνθήκες μέτρησης, ο αριθμός των σωματιδίων n που ανιχνεύεται και καταμετρείται από τον απαριθμητή είναι κάθε φορά διαφορετικός από την επικρατέστερη τιμή (μέση τιμή) και ακολουθεί την κατανομή Poisson

$$P(\mu, n) = e^{-\mu} \frac{\mu^n}{n!} \quad (10.29)$$

όπου μ είναι η μέση τιμή των μετρούμενων παλμών. Η κατανομή Poisson αποτελεί προσέγγιση μιας άλλης κατανομής, γνωστής ως διωνυμικής κατανομής, στο όριο που η πιθανότητα πραγματοποίησης ενός γεγονότος (ραδιενεργού διάσπασης) είναι πολύ μικρή (συνθήκη που ικανοποιείται στις ραδιενεργές διασπάσεις). Το ποσό της απόκλισης της κάθε μέτρησης από τη μέση τιμή εκφράζεται από την τυπική απόκλιση σ_n , που

ορίζεται ως η τετραγωνική ρίζα της μέσης τιμής των τετραγώνων των αποκλίσεων των τιμών. Στην περίπτωση της κατανομής Poisson που περιγράφει όλες τις πυρηνικές διαδικασίες, η τυπική απόκλιση ισούται με

$$\sigma_n = \pm\sqrt{\mu} \quad (10.30)$$

Όταν $\mu \rightarrow \infty$ (πρακτικά για $\mu > 30$), δηλαδή για μεγάλο αριθμό καταγραφόμενων παλμών, η κατανομή Poisson γίνεται περισσότερο συμμετρική και προσεγγίζεται από την κατανομή Gauss (δες κεφ. 4), η οποία έχει την ίδια μέση τιμή και τυπική απόκλιση και δίνεται από την ακόλουθη συνάρτηση

$$f_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (10.31)$$

όπου οι παράμετροι μ και σ υποδηλώνουν την κορυφή και το εύρος της κατανομής αντίστοιχα, και x είναι ο πραγματικός αριθμός των μετρούμενων παλμών. Για μια τέτοια κατανομή θα ισχύει ότι το 68% του αριθμού των παρατηρήσεων θα βρίσκεται μέσα σε διάστημα 2σ εκατέρωθεν της μέσης τιμής, ενώ το 99% του αριθμού των παρατηρήσεων θα βρίσκεται μέσα σε διάστημα 6σ . Το συνολικό εύρος δηλαδή της καμπύλης θα ισούται περίπου με 6 τυπικές αποκλίσεις.

Η τυπική απόκλιση σ στην περίπτωση αυτή, μπορεί εύκολα να υπολογιστεί από το εύρος της “καμπάνας” Gauss, μετρημένη στο μισό του μέγιστου ύψους της καμπύλης (Full Width at Half Maximum ή FWHM). Αποδεικνύεται ότι ισχύει

$$\sigma = \frac{FWHM}{2\sqrt{2\ln 2}} \quad (10.32)$$

10.3.2. Σκοπός του πειράματος

Σκοπός της εργαστηριακής άσκησης είναι η πειραματική μελέτη της απορρόφησης ακτινοβολίας γ (προερχόμενης από ραδιενεργό πηγή) συναρτήσει του πάχους του απορροφητή και ο υπολογισμός του μαζικού συντελεστή απορρόφησης μ_m του υλικού (μόλυβδος) και του πάχους υποδιπλασιασμού $x_{1/2}$.

Λογαριθμίζοντας τη σχέση 10.24 που συνδέει τον αριθμό των καταγραφόμενων παλμών N του απαριθμητή με την επιφανειακή πυκνότητα του απορροφητή ρ_A , προκύπτει

$$\log N = \log N_0 + \log e^{-\mu_m \cdot \rho_A}$$

ή

$$\log N = \log N_0 - \mu_m \cdot \log e \cdot \rho_A$$

Η γραφική παράσταση επομένως του $N = f(\rho_A)$ σε ημιλογαριθμικό χαρτί θα είναι ευθεία με κλίση

$$\kappa = -\mu_m \cdot \log e \quad (10.33)$$

από την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε το μαζικό συντελεστή απορρόφησης μ_m του υλικού και με τη βοήθεια των σχέσεων 10.25 και 10.26, εφόσον γνωρίζουμε την πυκνότητα ρ του υλικού, μπορούμε να υπολογίσουμε και το πάχος υποδιπλασιασμού του υλικού.

Εφόσον υπάρχει διαθέσιμος χρόνος, μπορεί να μελετηθεί η ισχύς του νόμου αντιστρόφου τετραγώνου στις ακτινοβολίες β και γ . Σύμφωνα με το νόμο αυτό, η ένταση της ακτινοβολίας που εκπέμπει μια πηγή μεταβάλλεται αντιστρόφως ανάλογα με το τετράγωνο της απόστασης της πηγής από το σημείο που ανιχνεύεται η ακτινοβολία. Στην περίπτωση βέβαια της ακτινοβολίας β , εξαιτίας της απορρόφησης της από τα μόρια του αέρα, αναμένουμε η ένταση της ακτινοβολίας να μεταβάλλεται με ταχύτερο ρυθμό.

Τέλος, για ένα σύνολο 300 μετρήσεων της ραδιενέργειας υποβάθρου, μπορεί από το ιστόγραμμα της κατανομής των μετρήσεων που προσεγγίζεται από την κανονική κατανομή, να υπολογιστούν η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των μετρήσεων.

10.3.3. Πειραματικό μέρος

10.3.3.1. Χρησιμοποιούμενα όργανα

1. Απαριθμητής Geiger–Muller (Σύνδεσμος 2, Βιβλιογραφία).
2. Σετ πέντε ραδιενεργών πηγών συνοδευόμενο από ειδική λαβίδα για το χειρισμό τους (τα χαρακτηριστικά των πηγών δίνονται στον Πίνακα 10.8).
3. Βάση στήριξης του απαριθμητή με κατάλληλες υποδοχές για την τοποθέτηση των ραδιενεργών πηγών και των πλακών απορρόφησης της ραδιενεργού ακτινοβολίας.
4. Σετ από πλάκες διαφόρων υλικών για τη μελέτη της απορρόφησης της ραδιενεργού ακτινοβολίας (τα χαρακτηριστικά των πλακών δίνονται στον Πίνακα 10.9).
5. Ηλεκτρονικός υπολογιστής με τον οποίο συνδέεται η μετρητική συσκευή για την απεικόνιση και αποθήκευση των μετρήσεων.

Η πειραματική διάταξη απεικονίζεται στο Σχήμα 10.11.

α/α	ισότοπα	Ενεργότητα (μCi)	Χρόνος ημιζωής	Τύπος ακτινοβολίας
1	Po-210 (πολώνιο)	0.1	138 ημέρες	α
2	Si-90 (στρόντιο)	0.1	28.6 χρόνια	β
3	Tl-204 (θάλλιο)	1	3.78 χρόνια	β
4	Co-60 (κοβάλτιο)	1	5.27 χρόνια	β, γ
5	Cs-137 (καίσιο)	5	30.2 χρόνια	β, γ

Πίνακας 10.8 Χαρακτηριστικά ραδιενεργών πηγών που χρησιμοποιούνται στο πείραμα μέτρησης της ραδιενέργειας.

α/α	Υλικό	Πάχος (inches)	Επιφανειακή πυκνότητα, ρ_A (mg/cm ²)	Κωδικός υλικού
1	Μόλυβδος (Pb)	0.250	7435	T
2		0.125	3632	S
3		0.064	1890	R
4		0.032	1230	Q
5	Αλουμίνιο (Al)	0.125	849	P
6		0.100	645	O
7		0.090	590	N
8		0.080	516	M
9		0.063	419	L
10		0.050	328	K
11		0.040	258	J
12		0.032	206	I
13		0.025	161	H
14		0.020	129	G
15	Πλαστικό	0.040	102	F
16		0.030	59.1	E
17	Πολυαιθυλένιο	0.010	28.1	D
18		0.010	14.1	C
19	Φύλλο αλουμινίου	0.001	6.5	B
20		0.0007	4.5	A

Πίνακας 10.9 Χαρακτηριστικά πλακών που χρησιμοποιούνται στο πείραμα απορρόφησης ακτίνων γ .



Σχήμα 10.11 Φωτογραφία της πειραματικής διάταξης για τη μέτρηση ραδιενέργειας.

10.3.3.2. Μετρήσεις

1^ο πείραμα: Υπολογισμός του νεκρού χρόνου του απαριθμητή

1. Θέστε αρχικά σε λειτουργία τον απαριθμητή Geiger-Muller (διακόπτης στο πίσω μέρος της μονάδας) και στη συνέχεια τον ηλεκτρονικό υπολογιστή. Στην επιφάνεια εργασίας διπλασιάστε με το ποντίκι στο εικονίδιο Radioactivity. Από τα menu που θα εμφανιστούν στο περιβάλλον εργασίας, επιλέξτε με το ποντίκι “PRESETS” και στη συνέχεια στην επιλογή “HIGH VOLTAGE” θέστε την τάση λειτουργίας του απαριθμητή στα 650 Volts και πατήστε OK. Από την επιλογή “PRESET TIME”, θέστε χρόνο καταμέτρησης παλμών στα 300 s χρησιμοποιώντας τα βελάκια και πατήστε OK. Από το menu “VIEW” επιλέξτε “COUNTS”, ώστε να αναγράφονται στην οθόνη οι παλμοί που μετράει ο απαριθμητής.
2. Οι πηγές που θα χρησιμοποιηθούν στο πείραμα αυτό είναι οι ραδιενεργές πηγές Θαλλίου ^{204}Tl (πράσινο χρώμα) και Κοβαλτίου ^{60}Co (πορτοκαλί χρώμα), οι οποίες θα πρέπει να τοποθετηθούν συμμετρικά στη βάση τοποθέτησης των πηγών (πλαστική διαφανής βάση).
ΠΡΟΣΟΧΗ: Να χειρίζεστε τις πηγές προσεκτικά και ΜΟΝΟ με την ειδική λαβίδα. Πλύνετε τα χέρια σας μετά το τέλος του πειράματος.
3. Αφού αφαιρέσετε την πηγή ^{60}Co προσέχοντας να μην μετακινήσετε την άλλη πηγή, τοποθετήστε τη βάση με την πηγή ^{204}Tl στη βάση στήριξης του απαριθμητή και στην πρώτη εσοχή από επάνω.
4. Πατώντας το πλήκτρο C (count) ο απαριθμητής θα μετρήσει για χρονικό διάστημα 300 s τους παλμούς (ραδιενεργές διασπάσεις). Καταχωρίστε την τιμή αυτή (R_T) στον Πίνακα μετρήσεων 10.10.
5. Τοποθετήστε τη δεύτερη πηγή (πηγή ^{60}Co) δίπλα από την πρώτη και επαναλάβετε τη μέτρηση. Καταχωρίστε τη νέα τιμή $R_{T,Co}$.
6. Αφαιρέστε την πηγή ^{204}Tl προσέχοντας να μην μετακινήσετε την άλλη πηγή και μετρήστε τους παλμούς R_{Co} .

7. Κάντε αναγωγή των μετρήσεων που πήρατε σε παλμούς ανά λεπτό (cpm) και καταχωρίστε τα αποτελέσματα στη 2^η γραμμή του Πίνακα 10.10.
8. Από τις τιμές αυτές, βάσει της σχέσης 10.28 υπολογίστε το νεκρό χρόνο του απαριθμητή:

$t_d = \dots \dots \dots$ ms

t (sec)	R_{PI}	R_{Co}	$R_{PI,Co}$
300			
60			

Πίνακας 10.10 Πίνακας μετρήσεων για τον υπολογισμό του νεκρού χρόνου του απαριθμητή.

2^ο πείραμα: Μέτρηση ακτινοβολίας υποβάθρου

9. Χωρίς την ύπαρξη ραδιενεργών πηγών στη βάση του απαριθμητή, αυτός καταγράφει ένα μικρό αριθμό παλμών που οφείλεται στην ακτινοβολία υποβάθρου. Η μετρούμενη αυτή ακτινοβολία προέρχεται από την κοσμική ακτινοβολία που φτάνει στην επιφάνεια της Γης, καθώς και από φυσικά ραδιενεργά στοιχεία που βρίσκονται στο περιβάλλον, όπως π.χ. στο χώμα, στα τσιμέντα των κτιρίων, στον αέρα των εσωτερικών χώρων, κ.ά.). Ο πειραματικός υπολογισμός της ακτινοβολίας υποβάθρου είναι απαραίτητος, ούτως ώστε να αφαιρείται κάθε φορά από τις μετρήσεις της ραδιενέργειας που κάνουμε παρουσία ραδιενεργών στοιχείων.
10. Αφαιρέστε τις πηγές που χρησιμοποιήσατε στο προηγούμενο πείραμα και απομακρύνετε τις από το μετρητή Geiger–Muller. Λάβετε 5 διαδοχικές μετρήσεις της ραδιενέργειας περιβάλλοντος για χρονικό διάστημα της κάθε μέτρησης 200 s και καταχωρίστε τα αποτελέσματα στην αντίστοιχη στήλη του Πίνακα μετρήσεων 10.11.
11. Ανάγεται τις μετρήσεις που πήρατε σε παλμούς ανά min (cpm) και καταχωρίστε αντίστοιχα τα αποτελέσματα.
12. Χρησιμοποιώντας την τιμή του νεκρού χρόνου που υπολογίσατε στο προηγούμενο πείραμα, διορθώστε τις τιμές σας, υπολογίζοντας τον πραγματικό αριθμό R των σωματίων (α , β ή γ) που εισέρχονται στον απαριθμητή.

α/α	R' (παλμοί/200sec)	R' (cpm)	R (cpm)	\bar{R} (cpm)	$R_i - \bar{R}$ (cpm)
1					
2					
3					
4					
5					

Πίνακας 10.11 Πίνακας μετρήσεων για τον υπολογισμό της ακτινοβολίας υποβάθρου.

13. Υπολογίστε τη μέση τιμή \bar{R} των διορθωμένων παλμών ανά min, καθώς επίσης και την τυπική απόκλιση της μέσης τιμής από την ακόλουθη σχέση:

$$\sigma_{\bar{R}} = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^5 (R_i - \bar{R})^2}{N(N-1)}}$$

3^ο πείραμα: Μελέτη απορρόφησης ακτινοβολίας γ.

14. Τοποθετήστε την πηγή ^{60}Co στη βάση στήριξης του απαριθμητή και στην 4^η εσοχή από επάνω. Επειδή η πηγή ^{60}Co εκπέμπει ακτινοβολία β και γ (δες Πίνακα 10.8), τοποθετήστε στην 3^η εσοχή μία πλάκα Al πάχους 0.125 inch, ώστε να αποκοπεί τελείως η ακτινοβολία β και ο απαριθμητής να καταμετρά μόνο την ακτινοβολία γ.
15. Ο απορροφητής που θα χρησιμοποιηθεί για την απορρόφηση της ακτινοβολίας γ είναι πλάκες μολύβδου, τα διαθέσιμα πάχη των οποίων δίνονται στον Πίνακα 10.12. Με κατάλληλο συνδυασμό των πλακών μπορείτε να επιτύχετε τα πάχη που αναγράφονται στη 2^η στήλη του Πίνακα Μετρήσεων 10.10. Οι αντίστοιχες τιμές της επιφανειακής πυκνότητας ρ_A στην 3^η στήλη προκύπτουν με τη βοήθεια του Πίνακα 10.9. Η κάθε μία πλάκα, ή ο συνδυασμός δύο πλακών, τοποθετείται στην 1^η και 2^η εσοχή της βάσης στήριξης του απαριθμητή. Για κάθε μία από τις τιμές του πάχους του απορροφητή, μετρήστε 3 φορές τους παλμούς R' που καταγράφει ο απαριθμητής για χρονική διάρκεια 1 min την κάθε φορά και καταχωρίστε τα αποτελέσματα στην 4η στήλη του Πίνακα Μετρήσεων 10.12. Υπολογίστε στη συνέχεια τη μέση τιμή \bar{R}' που αντιστοιχεί σε κάθε μία τιμή του πάχους.
16. Διορθώστε τις μετρήσεις σας αφαιρώντας την ακτινοβολία υποβάθρου που υπολογίσατε στο βήμα 13 και λαμβάνοντας υπόψη το νεκρό χρόνο του απαριθμητή, υπολογίστε τον πραγματικό αριθμό των μετρούμενων παλμών.

a/a	Πάχος απορροφητή (inches)	Επιφανειακή πυκνότητα, ρ_A (mg/cm ²)	R' (cmp)			\bar{R}' (cmp)	\bar{R} (cmp)
1	0	0					
2	0.032						
3	0.064						
4	0.096						
5	0.125						
6	0.157						
7	0.189						
8	0.250						
9	0.282						
10	0.314						
11	0.375						

Πίνακας 10.12 Πίνακας μετρήσεων για τον υπολογισμό του συντελεστή απορρόφησης.

17. Χαράξτε σε ημι-λογαριθμικό χαρτί τη γραφική παράσταση $\bar{R} = f(\rho_A)$, όπου ρ_A η επιφανειακή πυκνότητα του απορροφητή. Από την κλίση της ευθείας της γραφικής παράστασης, υπολογίστε το μαζικό συντελεστή απορρόφησης μ_m του υλικού (σχέση 10.33).

$$\mu_m = \dots \text{cm}^2/\text{g}$$

18. Υπολογίστε το πάχος υποδιπλασιασμού του απορροφητή μολύβδου, όπως προκύπτει από τις σχέσεις 10.25 και 10.26. Η πυκνότητα του μολύβδου είναι $\rho = 11.34 \text{ g/cm}^3$.

$$x_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu} = \dots \text{ mm}$$

19. Προσδιορίστε το πάχος υποδιπλασιασμού κατευθείαν από τη γραφική παράσταση, προεκτείνοντας κατάλληλα την ευθεία και λαμβάνοντας την τιμή της επιφανειακής πυκνότητας που αντιστοιχεί στο μισό των καταγεγραμμένων παλμών.

4^ο πείραμα: Νόμος αντιστρόφου τετραγώνου

20. Τοποθετήστε στη 2^η εσοχή από επάνω την πηγή ⁶⁰Co και στην 1^η εσοχή την πλάκα αλουμινίου (Al) πάχους 0.125 inches. Με αυτό τον τρόπο, καταγράφεται από τον απαριθμητή μόνο η ακτινοβολία γ, αφού η ακτινοβολία β απορροφάται εξ ολοκλήρου από την πλάκα Al. Η απόσταση της 1^{ης} εσοχής από το μετρητή καθώς και η απόσταση μεταξύ των εσοχών είναι 1 cm.
21. Για κάθε μια από τις τιμές της απόστασης *d* μεταξύ μετρητή-πηγής του Πίνακα Μετρήσεων 10.13, μετρήστε 3 φορές τους παλμούς και καταχωρίστε κατάλληλα τα αποτελέσματα.
22. Υπολογίστε τη μέση τιμή των καταγεγραμμένων παλμών \bar{R}' και στη συνέχεια υπολογίστε τους λογάριθμους των \bar{R}' και *d*, στις αντίστοιχες στήλες του Πίνακα 10.13.

<i>a/a</i>	απόσταση, <i>d</i> (cm)	<i>R'</i> (cpm)			\bar{R}' (cpm)	$\log \bar{R}'$	$\log d$
1	2						
2	3						
3	4						
4	5						
5	6						
6	7						
7	8						
8	9						
9	10						

Πίνακας 10.13 Πίνακας μετρήσεων για την επαλήθευση του νόμου αντιστρόφου τετραγώνου.

23. Χαράξτε τη γραφική παράσταση $\log \bar{R}' = f(\log d)$ σε χιλιοστομετρικό χαρτί. Σύμφωνα με το νόμο αντιστρόφου τετραγώνου θα πρέπει να ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\bar{R}' = a \cdot \frac{1}{d^2}$$

την οποία αν λογαριθμίσουμε θα προκύψει:

$$\log \bar{R}' = \log a - 2 \log d$$

Η κλίση επομένως της ευθείας που θα προκύψει, θα πρέπει να είναι ίση με -2. Επαληθεύεται ο νόμος αντιστρόφου τετραγώνου στην περίπτωση σας;

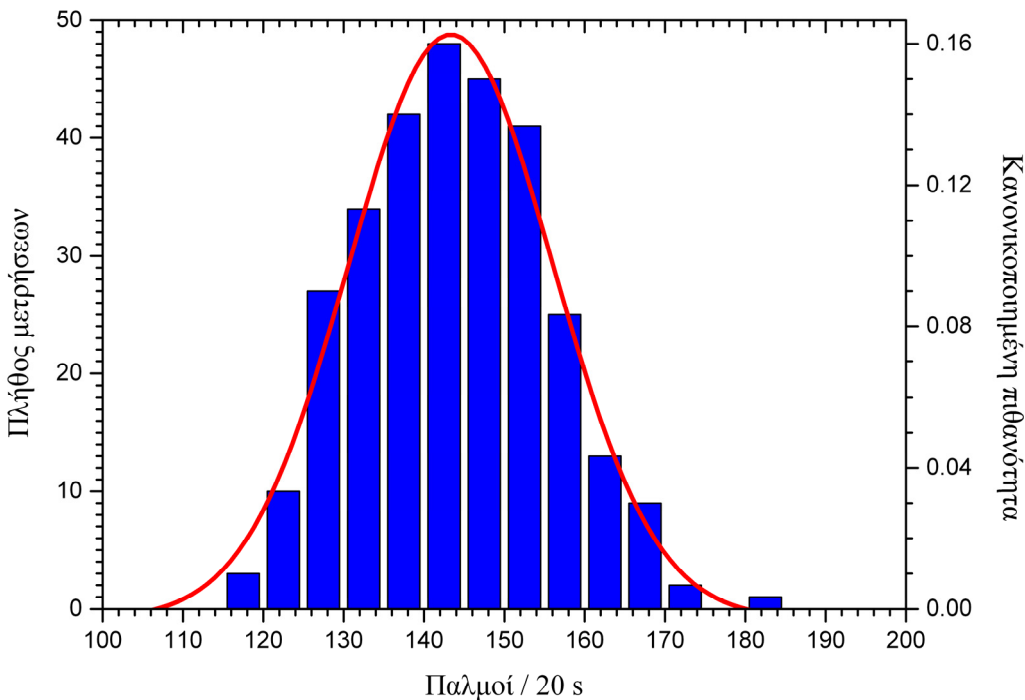
5^ο πείραμα: Στατιστικά φαινόμενα (προαιρετικά, εφόσον υπάρχει διαθέσιμος χρόνος)

24. Για τον πίνακα των 300 τιμών που δίνεται στον Πίνακα 10.14 (το αρχείο σε ηλεκτρονική μορφή είναι διαθέσιμο [εδώ](#)), το κανονικοποιημένο ιστόγραμμα συχνοτήτων (με εύρος διαστήματος =5) προσεγγίζεται

πολύ καλά από την καμπύλη μιας κανονικής κατανομής (βλέπε Σχήμα 10.12). Βρείτε τη μαθηματική έκφραση της συνάρτησης κατανομής (σχέση 10.31), υπολογίζοντας τη μέση τιμή μ και την τυπική απόκλιση σ κατευθείαν από την καμπύλη του παρακάτω σχήματος. Ποια η πιθανότητα ο μετρητής να καταγράψει 160 παλμούς/20s;

25. Κατασκευάστε το ιστόγραμμα συχνοτήτων και αθροιστικών συχνοτήτων για τις 300 μετρήσεις του Πίνακα 10.11, επιλέγοντας αυτή τη φορά εύρος διαστήματος 6 και ξεκινώντας από το διάστημα (102,5, 108,5).

Σημείωση: το ιστόγραμμα μπορεί να γίνει με τη βοήθεια κάποιου λογιστικού φύλλου ή με το χέρι σε χιλιοστομετρικό χαρτί.



Σχήμα 10.12 Ιστόγραμμα κατανομής των 300 μετρήσεων ραδιενέργειας υποβάθρου. Ο κατακόρυφος άξονας εκφράζεται είτε ως πλήθος μετρήσεων, είτε ως κανονικοποιημένη πιθανότητα. Η κόκκινη καμπύλη αντιστοιχεί στην κατανομή Gauss των μετρήσεων.

10.3.4. Ερωτήσεις - Ασκήσεις

1. Ποιο θα ήταν το πρώτο μέτρο προφύλαξης που θα παίρνατε σε περίπτωση ενός ατυχήματος όπου θα εκλυόταν ραδιενέργεια; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
2. Ποια από τα υλικά του Πίνακα 10.9 θα χρησιμοποιούσατε ως καλύτερο μέτρο προστασίας από τη ραδιενέργεια; Γιατί;
3. Έστω ότι έχουμε μία ποσότητα 10^{10} ραδιενεργών ατόμων του ισότοπου ^{210}Po . Αν ο χρόνος ημιζωής είναι 138 ημέρες (δες Πίνακα 10.8), υπολογίστε πόσο χρονικό διάστημα θα χρειαστεί, ώστε μετά τις ραδιενεργές διασπάσεις να παραμείνουν χωρίς να διασπαστούν 10^4 πυρήνες.
4. Στο ιστόγραμμα της κατανομής των 300 μετρήσεων της ραδιενέργειας υποβάθρου (Σχήμα 10.12) ποια η πιθανότητα ο μετρητής να καταγράψει περισσότερους από 144 παλμούς/20 s;

α/α	παλμοί	α/α	παλμοί	α/α	παλμοί	α/α	παλμοί	α/α/	παλμοί	α/α/	παλμοί
1	133	51	157	101	163	151	142	201	146	251	125
2	132	52	159	102	150	152	140	202	151	252	151
3	120	53	140	103	166	153	151	203	142	253	129
4	129	54	139	104	135	154	166	204	134	254	139
5	138	55	129	105	160	155	144	205	133	255	130
6	148	56	125	106	136	156	139	206	132	256	129
7	149	57	138	107	159	157	145	207	136	257	140
8	164	58	147	108	155	158	134	208	143	258	143
9	141	59	147	109	144	159	141	209	144	259	157
10	152	60	144	110	116	160	144	210	136	260	152
11	138	61	138	111	137	161	173	211	165	261	162
12	165	62	139	112	132	162	139	212	150	262	145
13	161	63	143	113	147	163	154	213	132	263	149
14	144	64	138	114	132	164	135	214	125	264	138
15	128	65	152	115	145	165	134	215	146	265	134
16	146	66	154	116	160	166	141	216	149	266	156
17	172	67	152	117	146	167	145	217	142	267	152
18	183	68	133	118	128	168	151	218	148	268	151
19	128	69	151	119	141	169	132	219	164	269	129
20	124	70	158	120	124	170	128	220	142	270	127
21	154	71	156	121	125	171	142	221	153	271	143
22	142	72	131	122	149	172	163	222	131	272	152
23	165	73	148	123	120	173	142	223	154	273	142
24	146	74	127	124	139	174	148	224	141	274	148
25	135	75	148	125	143	175	155	225	130	275	152
26	121	76	142	126	157	176	139	226	145	276	149
27	151	77	151	127	147	177	143	227	141	277	158
28	161	78	133	128	137	178	131	228	126	278	149
29	129	79	143	129	151	179	140	229	145	279	154
30	147	80	137	130	146	180	141	230	138	280	166
31	126	81	146	131	161	181	130	231	157	281	146
32	141	82	147	132	151	182	132	232	135	282	135
33	138	83	160	133	139	183	139	233	143	283	144
34	126	84	143	134	134	184	137	234	133	284	158
35	155	85	140	135	132	185	134	235	124	285	135
36	157	86	159	136	153	186	129	236	140	286	131
37	150	87	131	137	160	187	154	237	142	287	149
38	143	88	134	138	147	188	150	238	153	288	136
39	119	89	144	139	129	189	121	239	132	289	148
40	148	90	151	140	151	190	138	240	149	290	169
41	135	91	156	141	142	191	139	241	146	291	139
42	149	92	123	142	130	192	154	242	145	292	141
43	128	93	155	143	158	193	136	243	138	293	133
44	148	94	149	144	138	194	162	244	136	294	132
45	118	95	126	145	146	195	121	245	153	295	152
46	140	96	152	146	128	196	133	246	147	296	129
47	154	97	141	147	157	197	153	247	134	297	137
48	157	98	144	148	125	198	157	248	153	298	148
49	155	99	123	149	154	199	167	249	167	299	158
50	137	100	157	150	144	200	129	250	138	300	152

Πίνακας 10.14 Πίνακας 300 μετρήσεων της ραδιενέργειας υποβάθρου.

Βιβλιογραφία/Αναφορές

- Αργυρίου, Α. και Γιαννούλη, Μ. (2008). *Ενεργειακή και Περιβαλλοντική Φυσική*. Αθήνα: Εκδόσεις Αράκυνθος.
- Ασημακόπουλος, Π. (1986). *Πυρηνική Φυσική, Τόμοι I και II*. Ιωάννινα: Πανεπιστημιακό Τυπογραφείο.
- Ασημακόπουλος, Π. (1993). *Ηλεκτρομαγνητική Θεωρία και Πρακτική*. Ιωάννινα: Πανεπιστημιακό Τυπογραφείο.
- Thornton, S. T. & Rex, A. (2013). *Modern Physics for Scientists and Engineers, (4th Ed)*. USA: Cengage Learning.

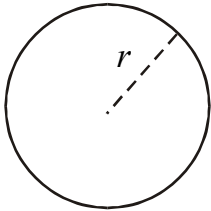
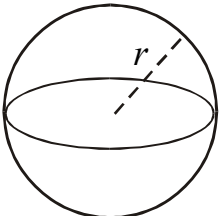
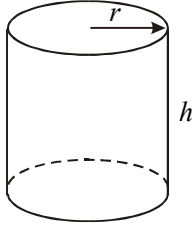
Σύνδεσμοι στο διαδίκτυο που αναφέρονται εντός του κειμένου

1. http://www.pasco.com/prodCatalog/TD/TD-8553_radiation-sensor/index.cfm
2. <http://www.spectrumtechniques.com/manuals/ST350MACManual.pdf>

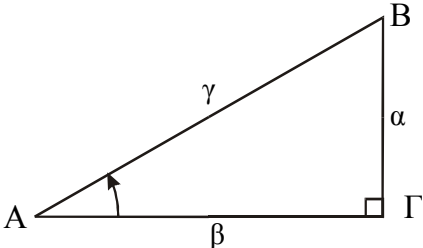
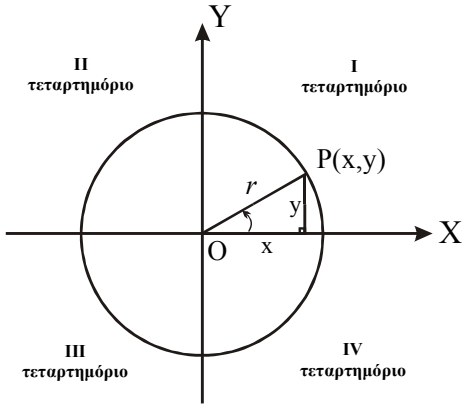
Κεφάλαιο 11 – Παραρτήματα

11.1. Χρήσιμο μαθηματικό τυπολόγιο

11.1.1. Γεωμετρικοί τύποι

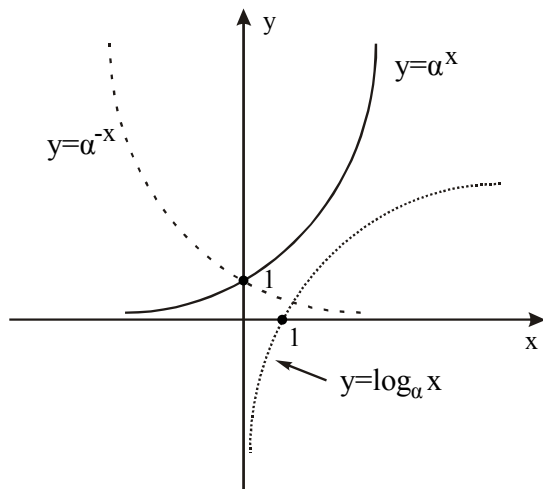
Κύκλος ακτίνας r	Σφαίρα ακτίνας r	Ορθός κύλινδρος ακτίνας r και ύψους h
Εμβαδόν $= \pi r^2$ Περίμετρος $= 2\pi r$	Όγκος $= V = \frac{4}{3}\pi r^3$ Εμβαδόν επιφάνειας $= 4\pi r^2$	Όγκος $= \pi r^2 h$ Εμβαδόν κυλινδρικής επιφάνειας $= 2\pi r h$
		

11.1.2. Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

<p>Ημίτονο της A, $\sin A = \frac{\alpha}{\gamma}$</p> <p>Σνημίτονο της A, $\cos A = \frac{\beta}{\gamma}$</p> <p>Εφαπτομένη της A, $\tan A = \frac{\alpha}{\beta}$</p> <p>Συνεφαπτομένη της A, $\cot A = \frac{\beta}{\alpha}$</p> <div style="text-align: center; margin-top: 20px;">  </div>	<p>Τριγωνομετρικός κύκλος</p> <p>Για μια γωνία φ σε οποιοδήποτε τεταρτημόριο οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι :</p> <p>$\sin \varphi = y/r$</p> <p>$\cos \varphi = x/r$</p> <p>$\tan \varphi = y/x$</p> <p>$\cot \varphi = x/y$</p> <p>Επειδή 2π ακτίνια $= 360^\circ$, έχουμε :</p> <p>1 ακτίνιο $= 180^\circ / \pi = 57,296\dots^\circ$</p> <p>$1^\circ = \pi / 180$ ακτίνια $= 0,01745\dots$ ακτίνια</p> <div style="text-align: center; margin-top: 20px;">  </div>
--	---

11.1.3. Εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις

Η συνάρτηση $y=a^x$ καλείται εκθετική συνάρτηση.



Στις παρακάτω σχέσεις τα p, q είναι πραγματικοί αριθμοί και οι m, n ακέραιοι.

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

$$a^p / a^q = a^{p-q}$$

$$(a^p)^q = a^{p \cdot q}$$

$$a^{-p} = 1/a^p$$

$$(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$$

Αν $a^p = N$, όπου $a \neq 0$ και 1 , τότε $p = \log_a N$, είναι ο λογάριθμος του N με βάση το a . Ο αριθμός $N = a^p$ καλείται αντιλογάριθμος του p με βάση το a και γράφεται **antilog_ap**. Ο λογάριθμος δηλαδή ενός αριθμού είναι ο εκθέτης δυνάμεως ορισμένης βάσεως που παράγει αυτόν τον αριθμό.

Η $y = \log_a x$ καλείται λογαριθμική συνάρτηση.

Ισχύουν οι ακόλουθες πράξεις με λογαρίθμους :

$$\log_a(M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$$

$$\log_a \left(\frac{M}{N} \right) = \log_a M - \log_a N$$

$$\log_a M^p = p \cdot \log_a M$$

Οι δεκαδικοί λογάριθμοι και αντιλογάριθμοι έχουν βάση $a = 10$ και συμβολίζονται με $\log_{10} N$ ή πιο σύντομα με $\log N$. Αν δηλ., $\log N = x$, τότε $N = 10^x$.

Οι φυσικοί λογάριθμοι και αντιλογάριθμοι έχουν βάση $a = e = 2,7182818\dots$ και συμβολίζονται με $\log_e N$ ή απλούστερα με $\ln N$. Αν δηλ., $\ln N = x$, τότε $N = e^x$.

11.1.4. Χρήσιμοι κανόνες παραγώγισης

$\frac{d}{dx}(c) = 0$	$\frac{d}{dx}(e^{ax}) = ae^{ax}$
$\frac{d}{dx}(c \cdot x) = c$	$\frac{d}{dx}(\ln(ax)) = \frac{1}{x}$
$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$	$\frac{d}{dx}(c \cdot u(x)) = c \cdot \frac{du(x)}{dx}$
$\frac{d}{dx}(\sin(ax)) = a \cos(ax)$	$\frac{d}{dx}(u(x) \cdot v(x)) = u(x) \frac{dv(x)}{dx} + v(x) \frac{du(x)}{dx}$
$\frac{d}{dx}(\cos(ax)) = -a \sin(ax)$	$\frac{d}{dx}\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) = \frac{v(x) \frac{du(x)}{dx} - u(x) \frac{dv(x)}{dx}}{v^2(x)}$

c, η, α : σταθερές

$u(x), v(x)$: συναρτήσεις

11.2. Θεμελιώδη φυσικά μεγέθη

Μέγεθος	Μονάδα	
	Όνομασία	Σύμβολο
Μήκος	Μέτρο	m
Μάζα	Χιλιόγραμμα	kg
Χρόνος	Δευτερόλεπτο	s
Ένταση ηλεκτρικού ρεύματος	ampère	A
Θερμοδυναμική θερμοκρασία	Kelvin	K
Ποσότητα ύλης	mole	mol
Φωτεινή ένταση (φωτοβολία)	candela	cd

Πίνακας 11.1 Θεμελιώδη φυσικά μεγέθη και οι αντίστοιχες μονάδες τους στο Διεθνές Σύστημα Μονάδων SI (*Système International*).

Οι **ορισμοί των θεμελιωδών μονάδων** στο Διεθνές Σύστημα, όπως αυτοί καθορίστηκαν στις διάφορες συνόδους της CGPM (Conférence Générale des Poids et Mesures) είναι οι ακόλουθοι:

Μονάδα μήκους (17^η CGPM, 1983)

Το μέτρο ορίζεται ως η απόσταση που διανύει το φως στο κενό σε 1/299 792 458 δευτερόλεπτα. Ως αποτέλεσμα του ορισμού αυτού, η ταχύτητα του φωτός c , μία από τις θεμελιώδεις σταθερές της Φυσικής, θα ισούται με 299 792 458 m/s.

Μονάδα μάζας (3^η CGPM, 1901)

Το χιλιόγραμμα είναι η μονάδα μέτρησης της μάζας και είναι ίσο με τη μάζα του διεθνούς προτύπου του χιλιόγραμμου που κατασκευάστηκε το 1889 και φυλάσσεται στο Διεθνές Γραφείο Μέτρων και Σταθμών στις Σέβρες της Γαλλίας. Πρόκειται για έναν κύλινδρο κράματος πλατίνας και ιριδίου (Pt-10Ir).

Μονάδα χρόνου (17^η CGPM, 1967)

Το δευτερόλεπτο είναι η διάρκεια 9 192 631 770 περιόδων της ακτινοβολίας που αντιστοιχεί στη μετάπτωση μεταξύ των δύο υπέρλεπτων σταθμών ενέργειας της θεμελιώδους κατάστασης του ατόμου του καυσίου 133 (¹³³Cs).

Μονάδα εντάσεως ηλεκτρικού ρεύματος (9^η CGPM, 1948)

Το ampère είναι η ένταση σταθερού ρεύματος το οποίο όταν διαρρέει δύο ευθύγραμμους παράλληλους αγωγούς απείρου μήκους, αμελητέας κυκλικής διατομής και τοποθετημένους στο κενό σε απόσταση 1 μέτρου ο ένας από τον άλλο, παράγει μεταξύ των αγωγών αυτών δύναμη ίση με 2×10^{-7} Newton ανά μέτρο μήκους.

Μονάδα θερμοδυναμικής θερμοκρασίας (13^η CGPM, 1967)

Το Kelvin, μονάδα θερμοδυναμικής θερμοκρασίας, είναι ίσο με το κλάσμα 1/273.16 της θερμοδυναμικής θερμοκρασίας του τριπλού σημείου του νερού.

Μονάδα ποσότητας ύλης (14^η CGPM, 1971)

Το mole είναι η ποσότητα ύλης συστήματος που περιέχει τόσες στοιχειώδεις οντότητες, όσα είναι τα άτομα που υπάρχουν σε 12 gr του άνθρακα 12 (¹²C).

Εφόσον χρησιμοποιείται το mole, οι στοιχειώδεις οντότητες πρέπει να καθορίζονται και μπορεί να είναι άτομα, μόρια, ιόντα, ηλεκτρόνια, άλλα σωματίδια ή καθορισμένα συγκροτήματα τέτοιων σωματιδίων.

Μονάδα φωτεινής εντάσεως (16^η CGPM, 1979)

Η candela είναι φωτεινή ένταση προς μια δεδομένη κατεύθυνση πηγής η οποία εκπέμπει μονοχρωματική ακτινοβολία συχνότητας 540×10^{12} Hz και της οποίας η ισχύς προς την κατεύθυνση αυτή είναι 1/683 watt ανά στερακτίνο.

Συμπληρωματικές μονάδες SI

Επίπεδη γωνία

Το ακτίνο (rad) είναι η επίπεδος γωνία που περιέχεται μεταξύ δύο ακτίνων, οι οποίες επί της περιφέρειας ενός κύκλου, αποκόπτουν τόξο μήκους ίσου με εκείνο της ακτίνας.

Στερεά γωνία

Το στερακτίνο (sr) είναι η στερεά γωνία η οποία, έχοντας την κορυφή της στο κέντρο μιας σφαίρας, αποκόπτει επί της επιφάνειας της σφαίρας αυτής εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν τετραγώνου που έχει ως πλευρά την ακτίνα της σφαίρας ([steradian](#)).

Lumen (λούμεν)

Μονάδα φωτεινής ροής στο Διεθνές Σύστημα (SI), που ισούται προς τη φωτεινή ροή που εκπέμπεται από μια ομοιόμορφη σημειακή πηγή 1 καντέλα (candela) σε μια στερεά γωνία 1 στερακτίου (steradian).

Lux (λουξ)

Μονάδα φωτισμού στο Διεθνές Σύστημα (SI) που ισούται προς το φωτισμό που παράγεται από τη φωτεινή ροή ενός lumen, η οποία κατανέμεται ομοιόμορφα σε μια επιφάνεια 1 m^2 .

Becquerel (μπεκερέλ)

Διεθνής μονάδα ενεργότητας, ισούται με την ενεργότητα ραδιονουκλιδίου που διασπάται με ρυθμό, κατά μέσο όρο, μιας αυθόρμητης πυρηνικής μετάπτωσης ανά δευτερόλεπτο ($1 \text{ Bq} = 1 \text{ s}^{-1}$).

Gray (γκρέι)

Διεθνής μονάδα απορροφώμενης δόσης, ισούται με την απορροφώμενη δόση όταν η ενέργεια που, ανά μονάδα μάζας, μεταδίδεται στην ύλη εξαιτίας ιονίζουσας ακτινοβολίας είναι 1 Joule ανά kg.

Sievert (σίβερτ)

Διεθνής μονάδα ισοδύναμης δόσης, ισούται με την ισοδύναμη δόση, όταν η απορροφώμενη δόση ιονίζουσας ακτινοβολίας που πολλαπλασιάζεται από τους συμφωνημένους αδιάστατους παράγοντες είναι 1 Jkg^{-1} .

Συνοπτικοί πίνακες που παρουσιάζουν πολύ παραστατικά τα θεμελιώδη και τα παράγωγα φυσικά μεγέθη με τις μονάδες μέτρησής τους στο S.I. και του τρόπου που τα παράγωγα προκύπτουν από τα θεμελιώδη μεγέθη, είναι διαθέσιμοι στην ιστοσελίδα του NIST (National Institute of Standards and Technology). Τους πίνακες αυτούς καθώς και ολόκληρη την έκδοση που περιέχει το Διεθνές Σύστημα Μονάδων SI μπορείτε να μεταφορτώσετε από τους ακόλουθους συνδέσμους:

<http://physics.nist.gov/cuu/pdf/SIDiagramColor.pdf> (έγχρωμος πίνακας των φυσικών μεγεθών).

<http://physics.nist.gov/Pubs/SP330/sp330.pdf> (ολόκληρη η έκδοση του SI, 2008)

<http://physics.nist.gov/cuu/Units/>

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Αν οι σύνδεσμοι δεν ανοίγουν κατευθείαν τα αρχεία τότε αντιγράψτε το σύνδεσμο στον φυλλομετρητή και ανοίξτε τα από εκεί.

Συντελεστής	Πρόθεμα	Σύμβολο	Συντελεστής	Πρόθεμα	Σύμβολο
10^{24}	yotta	Y	10^{-1}	deci	d
10^{21}	zetta	Z	10^{-2}	centi	c
10^{18}	exa	E	10^{-3}	milli	m
10^{15}	peta	P	10^{-6}	micro	μ
10^{12}	tera	T	10^{-9}	nano	n
10^9	giga	G	10^{-12}	pico	p
10^6	mega	M	10^{-15}	femto	f
10^3	kilo	k	10^{-18}	atto	a
10^2	hecto	h	10^{-21}	zepto	z
10^1	deca	da	10^{-24}	yocto	y

Πίνακας 11.2 Προθέματα και σύμβολα τους τα οποία χρησιμοποιούνται στην υπόδειξη δεκαδικών πολλαπλασίων και υποπολλαπλασίων των μονάδων μέτρησης .

11.3. Παράγωγα φυσικά μεγέθη

Μέγεθος	Μονάδα		Έκφραση	
	Όνομασία	Σύμβολο	Σε άλλες μονάδες SI	Σε βασικές ή συμπληρωματικές μονάδες
Συχνότητα	hertz	Hz		s^{-1}
Δύναμη	newton	N		$m \cdot kg \cdot s^{-2}$
Πίεση και τάση	pascal	Pa	$N \cdot m^{-2}$	$m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}$
Ενέργεια, έργο, ποσότητα θερμότητας	joule	J	$N \cdot m$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$
Ισχύς, ροή ενέργειας	watt	W	$J \cdot s^{-1}$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$
Ποσότητα ηλεκτρισμού, ηλεκτρικό φορτίο	coulomb	C		$s \cdot A$
Ηλεκτρική τάση, ηλεκτρικό δυναμικό, ηλεκτρεγερτική δύναμη	volt	V	$W \cdot A^{-1}$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$
Ηλεκτρική αντίσταση	ohm	Ω	$V \cdot A^{-1}$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$
Ηλεκτρική αγωγιμότητα	siemens	S	$A \cdot V^{-1}$	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^4 \cdot A^2$
Ηλεκτρική χωρητικότητα	farad	F	$C \cdot V^{-1}$	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^4 \cdot A^2$
Μαγνητική ροή	weber	Wb	$V \cdot s$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
Μαγνητική επαγωγή	tesla	T	$Wb \cdot m^{-2}$	$kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
Συντελεστής αυτεπαγωγής	henry	H	$Wb \cdot A^{-1}$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$
Φωτεινή ροή	lumen	Lm		$cd \cdot sr$
Φωτισμός	lux	Lx	$Lm \cdot m^{-2}$	$m^{-2} \cdot cd \cdot sr$
Ραδιενέργεια (ιονίζουσες ακτινοβολίες)	becquerel	Bq		s^{-1}
Απορροφούμενη δόση, δείκτης απορροφούμενης δόσης, ενέργεια μεταδιδόμενη στη μάζα	gray	Gy	$J \cdot kg^{-1}$	$m^2 \cdot s^{-2}$
Βιολογικά αποτελεσματική απορροφούμενη δόση, ισοδύναμη δόση	sievert	Sv	$J \cdot kg^{-1}$	$m^2 \cdot s^{-2}$

Πίνακας 11.3 Παράγωγα μεγέθη και οι αντίστοιχες μονάδες τους στο SI

11.4. Εύρεση πιθανότητας κανονικής κατανομής.

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mu-t\sigma}^{\mu+t\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx$$

<i>t</i>	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.00	0.80	1.60	2.39	3.19	3.99	4.78	5.58	6.38	7.17
0.1	7.97	8.76	9.55	10.34	11.13	11.92	12.71	13.50	14.28	15.07
0.2	15.85	16.63	17.41	18.19	18.97	19.74	20.51	21.28	22.05	22.82
0.3	23.58	24.34	25.10	25.86	26.61	27.37	28.12	28.86	29.61	30.35
0.4	31.08	31.82	32.55	33.28	34.01	34.73	35.45	36.16	36.88	37.59
0.5	38.29	38.99	39.69	40.39	41.08	41.77	42.45	43.13	43.81	44.48
0.6	45.15	45.81	46.47	47.13	47.78	48.43	49.07	49.71	50.35	50.98
0.7	51.61	52.23	52.85	53.46	54.07	54.67	55.27	55.87	56.46	57.05
0.8	57.63	58.21	58.78	59.35	59.91	60.47	61.02	61.57	62.11	62.65
0.9	63.19	63.72	64.24	64.76	65.28	65.79	66.29	66.80	67.29	67.78
1.0	68.27	68.75	69.23	69.70	70.17	70.63	71.09	71.54	71.99	72.43
1.1	72.87	73.30	73.73	74.15	74.57	74.99	75.40	75.80	76.20	76.60
1.2	76.99	77.37	77.75	78.13	78.50	78.87	79.23	79.59	79.95	80.29
1.3	80.64	80.98	81.32	81.65	81.98	82.30	82.62	82.93	83.24	83.55
1.4	83.85	84.15	84.44	84.73	85.01	85.29	85.57	85.84	86.11	86.38
1.5	86.64	86.90	87.15	87.40	87.64	87.89	88.12	88.36	88.59	88.82
1.6	89.04	89.26	89.48	89.69	89.90	90.11	90.31	90.51	90.70	90.90
1.7	91.09	91.27	91.46	91.64	91.81	91.99	92.16	92.33	92.49	92.65
1.8	92.81	92.97	93.12	93.28	93.42	93.57	93.71	93.85	93.99	94.12
1.9	94.26	94.39	94.51	94.64	94.76	94.88	95.00	95.12	95.23	95.34
2.0	95.45	95.56	95.66	95.76	95.86	95.96	96.06	96.15	96.25	96.34
2.1	96.43	96.51	96.60	96.68	96.76	96.84	96.92	97.00	97.07	97.15
2.2	97.22	97.29	97.36	97.43	97.49	97.56	97.62	97.68	97.74	97.80
2.3	97.86	97.91	97.97	98.02	98.07	98.12	98.17	98.22	98.27	98.32
2.4	98.36	98.40	98.45	98.49	98.53	98.57	98.61	98.65	98.69	98.72
2.5	98.76	98.79	98.83	98.86	98.89	98.92	98.95	98.98	99.01	99.04
2.6	99.07	99.09	99.12	99.15	99.17	99.20	99.22	99.24	99.26	99.29
2.7	99.31	99.33	99.35	99.37	99.39	99.40	99.42	99.44	99.46	99.47
2.8	99.49	99.50	99.52	99.53	99.55	99.56	99.58	99.59	99.60	99.61
2.9	99.63	99.64	99.65	99.66	99.67	99.68	99.69	99.70	99.71	99.72
3.0	99.73									
3.5	99.95									
4.0	99.994									
4.5	99.9993									
5.0	99.99994									

Πίνακας 11.4 Εύρεση πιθανότητας (επί τοις %) κανονικής κατανομής για διάφορες τιμές του *t*.

11.5. Πίνακας αθροιστικής κανονικής κατανομής $\Phi(z)$

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-z^2/2} dz$$

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
-2.50	0.006	-0.80	0.212	0.90	0.816
-2.45	0.007	-0.75	0.227	0.95	0.829
-2.40	0.008	-0.70	0.242	1.00	0.841
-2.35	0.009	-0.65	0.258	1.05	0.853
-2.30	0.011	-0.60	0.274	1.10	0.864
-2.25	0.012	-0.55	0.291	1.15	0.875
-2.20	0.014	-0.50	0.309	1.20	0.885
-2.15	0.016	-0.45	0.326	1.25	0.894
-2.10	0.018	-0.40	0.345	1.30	0.903
-2.05	0.020	-0.35	0.363	1.35	0.911
-2.00	0.023	-0.30	0.382	1.40	0.919
-1.95	0.026	-0.25	0.401	1.45	0.926
-1.90	0.029	-0.20	0.421	1.50	0.933
-1.85	0.032	-0.15	0.440	1.55	0.939
-1.80	0.036	-0.10	0.460	1.60	0.945
-1.75	0.040	-0.05	0.480	1.65	0.951
-1.70	0.045	0.00	0.500	1.70	0.955
-1.65	0.049	0.05	0.520	1.75	0.960
-1.60	0.055	0.10	0.540	1.80	0.964
-1.55	0.061	0.15	0.560	1.85	0.968
-1.50	0.067	0.20	0.579	1.90	0.971
-1.45	0.074	0.25	0.599	1.95	0.974
-1.40	0.081	0.30	0.618	2.00	0.977
-1.35	0.089	0.35	0.637	2.05	0.980
-1.30	0.097	0.40	0.655	2.10	0.982
-1.25	0.106	0.45	0.674	2.15	0.984
-1.20	0.115	0.50	0.691	2.20	0.986
-1.15	0.125	0.55	0.709	2.25	0.988
-1.10	0.136	0.60	0.726	2.30	0.989
-1.05	0.147	0.65	0.742	2.35	0.991
-1.00	0.159	0.70	0.758	2.40	0.992
-0.95	0.171	0.75	0.773	2.45	0.993
-0.90	0.184	0.80	0.788	2.50	0.994
-0.85	0.198	0.85	0.802	2.55	0.995

Πίνακας 11.5 Εύρεση πιθανότητας αθροιστικής κατανομής για διάφορες τιμές του z .

11.6. Πίνακας κριτηρίου Peirce για μία μετρούμενη ποσότητα (τιμές του *R*)

αριθμός μετρήσεων	αριθμός “ύποπτων” μετρήσεων								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	1.196								
4	1.383	1.078							
5	1.509	1.200							
6	1.610	1.299	1.099						
7	1.693	1.382	1.187	1.022					
8	1.763	1.453	1.261	1.109					
9	1.824	1.515	1.324	1.178	1.045				
10	1.878	1.570	1.380	1.237	1.114				
11	1.925	1.619	1.430	1.289	1.172	1.059			
12	1.969	1.663	1.475	1.336	1.221	1.118	1.009		
13	2.007	1.704	1.516	1.379	1.266	1.167	1.070		
14	2.043	1.741	1.554	1.417	1.307	1.210	1.120	1.026	
15	2.076	1.775	1.589	1.453	1.344	1.249	1.164	1.078	
16	2.106	1.807	1.622	1.486	1.378	1.285	1.202	1.122	1.039
17	2.134	1.836	1.652	1.517	1.409	1.318	1.237	1.161	1.084
18	2.161	1.864	1.680	1.546	1.438	1.384	1.268	1.195	1.123
19	2.185	1.890	1.707	1.573	1.466	1.377	1.298	1.226	1.158
20	2.209	1.914	1.732	1.599	1.492	1.404	1.326	1.255	1.190
21	2.230	1.938	1.756	1.623	1.517	1.429	1.352	1.282	1.218
22	2.251	1.960	1.779	1.646	1.540	1.452	1.376	1.308	1.245
23	2.271	1.981	1.800	1.668	1.563	1.475	1.399	1.332	1.270
24	2.290	2.000	1.821	1.689	1.584	1.497	1.421	1.354	1.293
25	2.307	2.019	1.840	1.709	1.604	1.517	1.442	1.375	1.315
26	2.324	2.037	1.859	1.728	1.624	1.537	1.462	1.396	1.336
27	2.341	2.055	1.877	1.746	1.642	1.556	1.481	1.415	1.356
28	2.356	2.071	1.894	1.764	1.660	1.574	1.500	1.434	1.375
29	2.371	2.088	1.911	1.781	1.677	1.591	1.517	1.452	1.393
30	2.385	2.103	1.927	1.797	1.694	1.608	1.534	1.469	1.411
31	2.399	2.118	1.942	1.812	1.710	1.624	1.550	1.486	1.428

32	2.412	2.132	1.957	1.828	1.725	1.640	1.567	1.502	1.444
33	2.425	2.146	1.971	1.842	1.740	1.655	1.582	1.517	1.459
34	2.438	2.159	1.985	1.856	1.754	1.669	1.597	1.532	1.475
35	2.450	2.172	1.998	1.870	1.768	1.683	1.611	1.547	1.489
36	2.461	2.184	2.011	1.883	1.782	1.697	1.624	1.561	1.504
37	2.472	2.196	2.024	1.896	1.795	1.711	1.638	1.574	1.517
38	2.483	2.208	2.036	1.909	1.807	1.723	1.651	1.587	1.531
39	2.494	2.219	2.047	1.921	1.820	1.736	1.664	1.600	1.554
40	2.504	2.230	2.059	1.932	1.832	1.748	1.676	1.613	1.556
41	2.514	2.241	2.070	1.944	1.843	1.760	1.688	1.625	1.568
42	2.524	2.251	2.081	1.955	1.855	1.771	1.699	1.636	1.580
43	2.533	2.261	2.092	1.966	1.866	1.783	1.711	1.648	1.592
44	2.542	2.271	2.102	1.976	1.876	1.794	1.722	1.659	1.603
45	2.551	2.281	2.112	1.987	1.887	1.804	1.733	1.670	1.614
46	2.560	2.290	2.122	1.997	1.897	1.815	1.743	1.681	1.625
47	2.568	2.299	2.131	2.006	1.907	1.825	1.754	1.691	1.636
48	2.577	2.308	2.140	2.016	1.917	1.835	1.764	1.701	1.646
49	2.585	2.317	2.149	2.026	1.927	1.844	1.773	1.711	1.656
50	2.592	2.326	2.158	2.035	1.936	1.854	1.783	1.721	1.666
51	2.600	2.334	2.167	2.044	1.945	1.863	1.792	1.730	1.675
52	2.608	2.342	2.175	2.052	1.954	1.872	1.802	1.740	1.685
53	2.615	2.350	2.184	2.061	1.963	1.881	1.811	1.749	1.694
54	2.622	2.358	2.192	2.069	1.972	1.890	1.820	1.758	1.703
55	2.629	2.365	2.200	2.077	1.980	1.898	1.828	1.767	1.711
56	2.636	2.373	2.207	2.085	1.988	1.907	1.837	1.775	1.720
57	2.643	2.380	2.215	2.093	1.996	1.915	1.845	1.784	1.729
58	2.650	2.387	2.223	2.101	2.004	1.923	1.853	1.792	1.737
59	2.656	2.394	2.230	2.109	2.012	1.931	1.861	1.800	1.745
60	2.663	2.401	2.237	2.116	2.019	1.939	1.869	1.808	1.753

Πίνακας 11.6 Πίνακας κριτηρίου Pierce για αριθμό μετρήσεων έως $N=60$ και έως 8 ύποπτες μετρήσεις.

11.7. Πίνακας θερμοκρασίας – αντίστασης για αισθητήρες Pt100

$T (^{\circ}C)$	$R (\Omega)$	$T (^{\circ}C)$	$R (\Omega)$	$T (^{\circ}C)$	$R (\Omega)$
-200	18,52	150	157,33	500	280,98
-190	22,83	160	161,05	510	284,30
-180	27,10	170	164,77	520	287,82
-170	31,34	180	168,48	530	290,92
-160	35,34	190	172,17	540	294,21
-150	39,72	200	175,88	550	297,49
-140	43,88	210	179,53	560	300,75
-130	48,00	220	183,19	570	304,01
-120	52,11	230	186,84	580	307,25
-110	56,19	240	190,47	590	310,49
-100	60,26	250	194,10	600	313,71
-90	64,30	260	197,71	610	316,92
-80	68,33	270	201,31	620	320,12
-70	72,33	280	204,90	630	323,30
-60	76,33	290	208,48	640	326,45
-50	80,31	300	212,05	650	329,64
-40	84,27	310	215,61	660	332,79
-30	88,22	320	219,15	670	335,93
-20	92,16	330	222,68	680	339,06
-10	96,09	340	226,21	690	342,18
0	100,00	350	229,72	700	345,28
10	103,90	360	233,21	710	348,38
20	107,79	370	236,70	720	351,46
30	111,67	380	240,18	730	354,53
40	115,54	390	243,64	740	357,59
50	119,40	400	247,09	750	360,64
60	123,24	410	250,53	760	363,67
70	127,08	420	253,96	770	366,70
80	130,90	430	257,38	780	369,71
90	134,71	440	260,78	790	372,71
100	138,51	450	264,18	800	375,70
110	142,29	460	267,56	810	378,68
120	146,07	470	270,93	820	381,65
130	149,83	480	274,29	830	384,60
140	153,58	490	277,64	840	387,55

Πίνακας 11.7 Πίνακας αντιστάσεων αντίστασης πλατίνας Pt100 για θερμοκρασίες από -200°C έως 840°C.

11.8. Οδηγίες συγγραφής εργαστηριακής αναφοράς

Τίτλος Εργαστηριακής Άσκησης

Όνοματεπώνυμο 1 (αυτός που την έγραψε), Όνοματεπώνυμο 2,

1. Περίληψη

Αναφέρεται ο σκοπός του πειράματος, η χρησιμοποιούμενη μέθοδος και τα κύρια συμπεράσματα (αριθμητικές τιμές) που βγήκανε μετά την ανάλυση των αποτελεσμάτων και τη σύγκριση τους με την υπάρχουσα θεωρία. Η περίληψη είναι αυτοτελής νοηματικά. Ο αναγνώστης δεν θα πρέπει να διαβάσει ολόκληρη την εργασία για να καταλάβει την περίληψη. Δεν πρέπει να υπερβαίνει σε μέγεθος τις 8 –10 γραμμές. Ευνόητο είναι ότι συντάσσεται αφού γίνει όλη η ανάλυση των αποτελεσμάτων και γραφούν τα συμπεράσματα.

2.Εισαγωγή (προαιρετικά)

Αναφέρεται συνοπτικά η απαραίτητη θεωρία που χρησιμοποιήθηκε για την κατανόηση, εκτέλεση και συγγραφή της εργαστηριακής άσκησης.

3. Πειραματικό μέρος

Συνοπτική περιγραφή της χρησιμοποιούμενης πειραματικής μεθόδου. Αναφέρονται τα όργανα που χρησιμοποιήθηκαν, καθώς και τα σφάλματα των μετρήσεών τους. Αν κριθεί σκόπιμο δίνεται και σχήμα της πειραματικής διάταξης. Περιγράφεται επίσης η πειραματική διαδικασία λήψης μετρήσεων.

4. Αποτελέσματα – Ανάλυση – Συζήτηση

Παραθέτονται τα πειραματικά αποτελέσματα που λήφθηκαν και γίνεται η ανάλυση τους σύμφωνα με τα ζητούμενα της άσκησης. Γίνεται χρήση αριθμημένων πινάκων και γραφικών παραστάσεων σε χιλιοστομετρικό ή/και λογαριθμικό χαρτί. Κάτω από κάθε πίνακα ή γραφική παράσταση αναφέρονται σε λεζάντα συνοπτικά αυτά που απεικονίζονται. Σχολιάζουμε αν τα αποτελέσματά μας συμφωνούν ή όχι με την υπάρχουσα θεωρία. Αν κριθεί σκόπιμο, λόγω της πληθώρας των αποτελεσμάτων, χρησιμοποιούνται υποπαράγραφοι (4.1, 4.2, . . .).

5. Συμπεράσματα

Αναφέρεται η μελέτη που έγινε και ο σκοπός της και παραθέτονται τα κύρια συμπεράσματά της, κάνοντας ταυτόχρονη σύγκριση με τη θεωρία. Ερμηνεύονται τυχόν παρατηρούμενα σφάλματα. Εκτενέστερη σε μέγεθος από την Περίληψη (έως και μία σελίδα).

6. Βιβλιογραφία

Απαριθμούνται τα βιβλία που χρησιμοποιήθηκαν για τη διεξαγωγή και συγγραφή της παρούσας εργασίας (Τίτλος βιβλίου, συγγραφείς, χρονολογία έκδοσης).

π.χ.

- 1.“Φυσική”, Μέρος Α, Halliday – Resnick, 1976.
2. Εργαστηριακός Οδηγός Φυσικής, Β. Σάλλας, 2014
3.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- ✓ Στη χάραξη των γραφικών παραστάσεων προσέχουμε τη βαθμονόμηση (επιλογή κλίμακας σε κάθε άξονα), έτσι ώστε τα πειραματικά σημεία να καλύπτουν σε εύρος το μεγαλύτερο μέρος της γραφικής παράστασης. επίσης, σε κάθε άξονα αναγράφουμε ολογράφως το μέγεθος που παριστάνεται, ακολουθώντας το σύμβολό του και η μονάδα μέτρησής του σε παρένθεση. Π.χ. Χρόνος, t (s).
- ✓ Σε κάθε φυσικό μέγεθος που υπολογίζουμε δεν ξεχνάμε να γράψουμε τις αντίστοιχες μονάδες.
- ✓ Αιτιολογούμε τα αποτελέσματα που βρίσκουμε, τις αποκλίσεις ή τα μεγάλα σφάλματα.

Παράδειγμα πρότυπης εργαστηριακής αναφοράς (σε μορφότυπο pdf, έτοιμη προς εκτύπωση) μπορείτε να δείτε και να μεταφορτώσετε, πατώντας στον ακόλουθο σύνδεσμο:

[Όργανα μέτρησης διαστάσεων – μάζας. Υπολογισμός πυκνότητας σωμάτων.](#)

Η αναφορά αυτή έχει τη μορφή που παρουσιάστηκε παραπάνω και μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως υπόδειγμα από το φοιτητή για τη συγγραφή των υπόλοιπων εργαστηριακών του αναφορών. Είναι η 1^η αναφορά που παραδίδουν οι φοιτητές στα πλαίσια του Εργαστηρίου Φυσικής και δεδομένης της έτοιμης δομής που παρουσιάζει, οι φοιτητές επικεντρώνονται περισσότερο στην ανάλυση των δεδομένων για τον υπολογισμό μέσων τιμών και αβεβαιοτήτων.

Για την ολοκλήρωση της παραπάνω εργαστηριακής αναφοράς χωρίς τη λήψη μετρήσεων, μπορείτε να βρείτε τις πειραματικές μετρήσεις στα ακόλουθα αρχεία:

[Μετρήσεις διαμέτρου σφαιρών](#)

[Μετρήσεις μάζας σφαιρών](#)

[Μετρήσεις εξωτερικής διαμέτρου κυλίνδρου](#)

[Μετρήσεις εσωτερικής διαμέτρου κυλίνδρου](#)

[Μετρήσεις μήκους κυλίνδρου](#)

(Στις παραπάνω μετρήσεις χρησιμοποιήθηκε κύλινδρος μάζας $m = 87.1$ g, ζυγισμένος με μηχανικό ζυγό ακριβείας 0.05 g).

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ

A

accuracy	16
Amplitude Modulation	154
Angström	4

B

bar	4
Bessel	165
bias	19
BIPM	3

C

calibration	14
CGS	3, 4, 12
conduction	179
convection	179
correlation coefficient	30

D

drift	19
-------------	----

F

FWHM	52
------------	----

G

Geiger-Muller	199, 200, 202, 203, 204
---------------------	-------------------------

H

hectare	4
hysteresis	19

I

interpolation	
linear	41

P

photogate	85
precision	16

Q

quartz	2
--------------	---

R

repeatability	17
residuals	49
roentgen	197, 198

S

sensor	13, 209
sonar ranger	102
span	17
strain gauges	119
stress-strain	122

T

thermistor	17, 18, 81, 91, 93, 94, 95
------------------	----------------------------

V

variance	50
VIM	3

A

αβεβαιότητα	10, 23, 49
διάδοση	77
σχετική	23, 72
Αεροτροχιά	102
ακρίβεια	11
αναπαραγωγιμότητα	17
Αστρονομική μονάδα	4
Ατομική μονάδα μάζας	4

B

βερνιέρος	81, 82, 83, 86, 177
-----------------	---------------------

Γ

γέφυρα Wheatstone	120
γραμμική παρεμβολή	41
γραμμική συσχέτιση	
συντελεστής	30
Γραμμικότητα	17

Δ

Διάγραμμα διασποράς	28
διακρίβωση	14
διακριτική ικανότητα ...	9, 10, 11, 15, 18, 45, 83, 93, 176
διακρότημα	153
διαστατική ανάλυση	5
διαστημόμετρο	81, 82, 86, 88, 122
Διεθνές Σύστημα (SI)	3
δυναμική απόκριση	91
Δυναμικός χαρακτηρισμός	19

E

ελαστικότητα	
μέτρο ελαστικότητας	117, 122, 125, 126
όριο ελαστικότητας	117, 119
ενεργότητα	196, 197, 216
επαναληψιμότητα	17
έργο εξαγωγής	190
ευαισθησία	9, 18, 20, 91, 200

Θ

θερμοκρασιακές κλίμακες	89
Θεώρημα	
έργου-ενέργειας	100

I		
Ιστόγραμμα.....	49	
K		
κατανομή		
Gauss.....	52, 53	
Poisson.....	200, 201	
αθροιστική.....	56	
οριακή.....	51	
κλίση ευθείας.....	29	
κριτήριο		
Chauvenet.....	60	
Peirce.....	62	
κύματα		
στάσιμα.....	151	
συμβολή.....	150, 153	
Λ		
λογαριθμικό χαρτί.....	34, 36	
M		
Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων.....	29	
Μέση τιμή.....	23	
μεταβλητότητα.....	50	
μετατόπιση.....	19	
μέτρηση		
απλή.....	7	
σύνθετη.....	7, 28, 65	
Μέτρηση θερμοκρασίας.....	90	
μικρόμετρο.....	10, 71, 81, 83, 86, 113, 114	
N		
νόμος		
Hooke.....	117	
Ohm.....	185, 191	
Stefan – Boltzmann.....	180	
Wien.....	181	
αντιστρόφου τετραγώνου.....	183, 186	
O		
ολίσθηση.....	19	
οπτικό φράγμα.....	173, 174	
όργανα μέτρησης		
αναλογικά.....	14	
απεικόνισης.....	15	
απόκλισης.....	15	
ενεργητικά.....	15	
καταγραφής.....	15	
μηδενισμού.....	15	
παθητικά.....	15	
ψηφιακά.....	14	
ορθότητα.....	16	
Π		
πιστότητα.....	16, 17	
Πρακτικό Σύστημα.....	4	
		πρίσμα..... 174
P		
Ραβδόγραμμα.....	47	
Σ		
σημαντικά ψηφία.....	24, 25, 26, 27	
Στατικός χαρακτηρισμός.....	15	
στρογγυλοποίηση.....	25	
συνθήκη κανονικοποίησης.....	52	
συντονισμός.....	154	
συστήματα μέτρησης.....	13	
σφάλμα		
ανάγνωσης.....	10	
μετάθεσης μηδενός.....	12	
T		
ταλάντωση		
απλή αρμονική.....	38, 129, 131, 137, 147, 149, 150, 152	
φθίνουσα.....	142, 143, 146	
τάση		
εμφελκυστική.....	117	
θλιπτική.....	117	
τριβή		
κύλισης.....	106	
ολίσθησης.....	106	
συντελεστές.....	107	
Υ		
υστέρηση.....	19	
Φ		
φάσμα		
απορρόφησης.....	172, 173	
εκπομπής.....	172	
Φάσμα.....	171	
φασματοσκόπιο		
οπτικό.....	173	
φυσικά μεγέθη		
θεμελιώδη.....	3, 65	
παράγωγα.....	3, 216	
X		
χιλιοστομετρικό χαρτί.....	28	