ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΠΑΝ/ΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΣΩΤ. ΣΑΚΚΟΠΟΥΛΟΣ

Μερικές σκέψεις σχετικά με το αποτέλεσμα μιας μέτρησης ή παρατήρησης

(Θεωρία σφαλμάτων, Σημαντικά ψηφία)

ΠΑΤΡΑ 2016

Εισαγωγή

Στη Φυσική, όπως αυτή εκτίθεται συνήθως στα διδακτικά βιβλία, τα φυσικά μεγέθη παρίστανται με σύμβολα και οι μεταξύ τους σχέσεις εκφράζονται με μαθηματικές εξισώσεις. Αυτό δημιουργεί τη λανθασμένη εντύπωση ότι στη Φυσική όλα προσδιορίζονται με απόλυτη ακρίβεια. Όταν όμως προσπαθήσει κάποιος να μετρήσει τα διάφορα φυσικά μεγέθη ξεφεύγει από αυτήν την ιδανική εικόνα και διαπιστώνει ότι κάθε μέτρηση βαρύνεται με αναπόφευκτη ανακρίβεια.

Όπως παρατηρεί ο Planck (Βιβλίο: The Philosophy of Physics….Κεφάλαιο: Causality in Nature) η Φυσική δρα σε δύο διαφορετικούς κόσμους. «Τοποθετεί ένα νέο κόσμο στη θέση αυτού που μας δίνουν οι αισθήσεις ή τα μετρητικά όργανα…Αυτός ο κόσμος είναι το «κοσμοείδωλο» και αποτελεί μια καθαρά νοητική δομή…Κάθε μετρήσιμο μέγεθος, κάθε μήκος, κάθε χρονική περίοδος, κάθε μάζα και κάθε ηλεκτρικό φορτίο έχει διττό χαρακτήρα, δηλαδή γίνεται κατανοητό με δύο διαφορετικούς τρόπους. Μπορεί να θεωρηθεί σαν άμεσο αποτέλεσμα μέτρησης ή μπορεί να θεωρηθεί ότι αναφέρεται στο κοσμοείδωλο. Στην πρώτη περίπτωση δεν μπορεί να καθοριστεί η ακριβής τιμή του. Στη δεύτερη περίπτωση το φυσικό μέγεθος μπορεί να παρασταθεί από καθορισμένα μαθηματικά σύμβολα, με τα οποία μπορούμε να εργαστούμε σύμφωνα με ακριβείς κανόνες».

Ας θεωρήσουμε το απλό παράδειγμα ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, του οποίου θέλουμε να προσδιορίσουμε το εμβαδό S. Στη Φυσική, όπως εκτίθεται συνήθως στα διδακτικά βιβλία, δεν έχουμε παρά να πολλαπλασιάσουμε το μήκος l επί το ύψος h του παραλληλογράμμου έχοντας υπόψη τη εξίσωση της Γεωμετρίας

$$S = l.h$$

Οι μετρήσεις όμως των l και h δεν μας δίνουν ακριβείς τιμές, ούτε το σχήμα είναι ιδανικά παραλληλόγραμμο, με αποτέλεσμα το ιδανικό εμβαδό S να είναι πάντοτε κάτι διαφορετικό από το εμβαδό που προκύπτει από μετρήσεις.

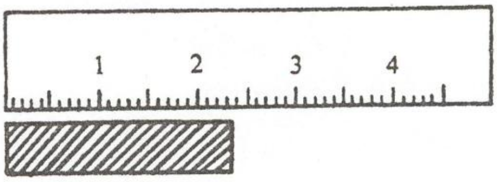
Στο Εργαστήριο συνειδητοποιείται η σαφής διάκριση μεταξύ των Φυσικών μεγεθών του κόσμου των αισθήσεων και των αντιστοίχων ιδανικών μεγεθών του κοσμοειδώλου.

1.1 Σφάλμα μέτρησης. Τρόπος γραφής του σφάλματος

Έστω ότι θέλουμε να προσδιορίσουμε το μήκος ενός μικρού αντικειμένου κανονικού σχήματος, π.χ. ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Η πιο πρόχειρη μέθοδος είναι να εκτιμήσουμε «με το μάτι» το μήκος και να πούμε ότι είναι περίπου π.χ. 2 cm. Είναι φανερό ότι αυτό το αποτέλεσμα βαρύνεται με αβεβαιότητα. Θα ήμασταν πιο ειλικρινείς, αν ισχυριζόμαστε ότι το μήκος του αντικειμένου είναι «πάνω – κάτω» 2 cm ή πιο συγκεκριμένα ότι βρίσκεται κάπου ανάμεσα στις τιμές 1,5 και 2,5 cm, δηλαδή

$$\text{Μήκος} = (2{,}0 \pm 0{,}5)\ \text{cm}$$

Θα μπορούσαμε να προσδιορίσουμε ακριβέστερα το μήκος του αντικειμένου με τη χρησιμοποίηση ενός χάρακα, του οποίου η μικρότερη υποδιαίρεση είναι 1 mm, οπότε θα προέκυπτε για το μήκος η τιμή 2,35 cm, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.1.1.



Σχήμα 1.1.1

Αυτή η τιμή όμως βαρύνεται με κάποια αβεβαιότητα. Πράγματι, είναι αδύνατο να επιτύχουμε απόλυτη σύμπτωση του μηδενός της κλίμακας του χάρακα με την αρχή του αντικειμένου, να κρατήσουμε τον χάρακα παράλληλα προς την πλευρά του αντικειμένου που θέλουμε να μετρήσουμε και επί πλέον, το άλλο άκρο του αντικειμένου δεν συμπίπτει ακριβώς με καμία υποδιαίρεση του χάρακα, οπότε θα πρέπει να εκτιμηθεί η θέση αυτού του άκρου ανάμεσα σε δύο διαδοχικές υποδιαιρέσεις της κλίμακας και έστω ότι αυτή αντιστοιχεί στην ένδειξη 2,35 cm. Όλα αυτά δείχνουν ότι υπεισέρχεται και σε αυτήν την περίπτωση αβεβαιότητα, η οποία εκτιμάται περίπου σε 0,2 mm, οπότε το αποτέλεσμα είναι

$$\text{Μήκος} = (2,35 \pm 0,02)\ \text{cm}$$

Θα μπορούσαμε να μετρήσουμε το μήκος με μεγαλύτερη ακρίβεια χρησιμοποιώντας ένα διαστημόμετρο ή ένα μικρόμετρο, όργανα που θα γνωρίσετε στο Εργαστήριο Ι και να προσδιορίσουμε το μήκος ακριβέστερα, π.χ.

$$\text{Μήκος} = (2,342 \pm 0,002)\ \text{cm}$$

με το διαστημόμετρο

και

$$\text{Μήκος} = (2,3437 \pm 0,0002)\ \text{cm}$$

με το μικρόμετρο

Το πάρα πάνω παράδειγμα δείχνει ότι ένα φυσικό μέγεθος δεν μπορεί να μετρηθεί με απόλυτη ακρίβεια. Χρησιμοποιώντας τελειότερα όργανα και καλύτερες πειραματικές μεθόδους μπορούμε να μειώσουμε την αβεβαιότητα που βαρύνει την τιμή του φυσικού μεγέθους, αλλά δεν είναι δυνατόν να την εκμηδενίσουμε. Αυτό έχει σαν συνέπεια να μην μπορεί να προσδιοριστεί η «πραγματική» ή «ακριβής» τιμή ενός φυσικού μεγέθους.

Είναι λογικό όμως να πιστεύουμε ότι κάθε φυσικό μέγεθος έχει μια ορισμένη τιμή και έτσι, όταν μετρούμε κάτι, θέλουμε, εκτός από την τιμή που προκύπτει, να γνωρίζουμε και τα όρια, μεταξύ των οποίων βρίσκεται, ή ακριβέστερα έχει σημαντική πιθανότητα να βρίσκεται, η πραγματική τιμή του φυσικού μεγέθους. Το εύρος αυτής της περιοχής ονομάζεται (ορίζεται σαν) σφάλμα μέτρησης (error of measurement). Όσο στενώτερη είναι η περιοχή, μέσα στην οποία πιστεύουμε ότι βρίσκεται η πραγματική τιμή ενός φυσικού μεγέθους, τόσο ακριβέστερες είναι οι μετρήσεις, δηλαδή τόσο μικρότερο είναι το σφάλμα της μέτρησης.

Ο πάρα πάνω ορισμός του σφάλματος καθορίζει και τον κατάλληλο τρόπο γραφής του. Αν x_b είναι η πιο αξιόπιστη τιμή ενός φυσικού μεγέθους που προέκυψε από μετρήσεις, τότε το σφάλμα δx ορίζει γύρω από την τιμή x_b μια περιοχή, μέσα στην οποία υπάρχει σημαντική πιθανότητα να βρίσκεται η πραγματική τιμή του μεγέθους, δηλαδή

Πειραματική τιμή: $x = x_b \pm \delta x$

Εφόσον κατά την μέτρηση ενός φυσικού μεγέθους υπεισέρχεται αναπόφευκτα σφάλμα, εκτός από την τιμή του μεγέθους, θα πρέπει να προσδιοριστεί και το σφάλμα που την βαρύνει. <u>Επομένως, αποτέλεσμα της μέτρησης δεν είναι μόνο η x_b, αλλά και το σφάλμα αυτής δx .</u>

Από τα πάρα πάνω προκύπτει ότι με τον όρο «σφάλμα» εννοούμε την αβεβαιότητα που βαρύνει το αποτέλεσμα μιας μέτρησης και την οποία δεν μπορούμε να εκμηδενίσουμε, όσο προσεκτικά κι αν πραγματοποιήσουμε την μέτρηση. Οι αποκλίσεις από το σωστό αποτέλεσμα που οφείλονται σε λανθασμένη ανάγνωση της ένδειξης ενός οργάνου, ή σε λανθασμένες πράξεις, χαρακτηρίζονται με τον όρο «λάθη» (mistakes) και προφανώς είναι κάτι εντελώς διαφορετικό από το σφάλμα μέτρησης.

1.2 Σημασία της γνώσης του σφάλματος

Η γνώση του σφάλματος που υπεισέρχεται σε μια μέτρηση έχει αποφασιστική σημασία. Μια πειραματική τιμή είναι αναξιόπιστη, αν δεν δίνεται η αβεβαιότητα που την βαρύνει. Ας δούμε δύο παραδείγματα.

Υποθέτουμε ότι αντιμετωπίζουμε το πρόβλημα που έθεσε ο τύραννος των Συρακουσών Διονύσιος ο Β΄ στον Αρχιμήδη (287 – 212 π.Χ.), να βρει δηλαδή, αν οι ποσότητες χρυσού και αργύρου που είχε δώσει για να κατασκευαστεί ένα στέμμα είχαν πράγματι χρησιμοποιηθεί, ή αν ο χρυσοχόος είχε αντικαταστήσει ένα μέρος του χρυσού με ίσο βάρος αργύρου.

Εφόσον ο άργυρος έχει πολύ μικρότερη πυκνότητα από τον χρυσό (ρ_{Ag} = 10,5 g/cm^3, ενώ ρ_{Au} = 19,3 g/cm^3) αν είχε γίνει νοθεία, το στέμμα θα έπρεπε να είχε μεγαλύτερο όγκο από τον κανονικό για το ίδιο βάρος χρυσού και αργύρου που είχε δώσει ο Διονύσιος. Έτσι, θα μπορούσε να διαπιστωθεί η νοθεία με τον προσδιορισμό της πυκνότητας του στέμματος. Βέβαια, ήταν γνωστή η πυκνότητα του κράματος με τη σωστή αναλογία χρυσού και αργύρου ρ_σ = 15,5 g/cm^3.

Η γνωστή σκηνή με τον Αρχιμήδη να βγαίνει γυμνός από το λουτρό και να τρέχει στο δρόμο φωνάζοντας «εύρηκα», η οποία αναφέρεται από τον Ρωμαίο αρχιτέκτονα Μάρκο Βιτρούβιο Πόλλιο (85 – 26 π.Χ.), δεν διαφωτίζει ακριβώς τον τρόπο που χρησιμοποίησε ο Αρχιμήδης για τον προσδιορισμό της πυκνότητας του στέμματος. Υπονοεί όμως ότι ο Αρχιμήδης, βλέποντας στο λουτρό το σώμα του να εκτοπίζει όγκο νερού ίσο με εκείνο του ιδίου, σκέφτηκε ότι με τον ίδιο τρόπο θα μπορούσε να μετρήσει τον όγκο του στέμματος, το οποίο είχε πολύπλοκο σχήμα και κατόπιν, γνωρίζοντας το βάρος του θα μπορούσε να προσδιορίσει την πυκνότητα του στέμματος.

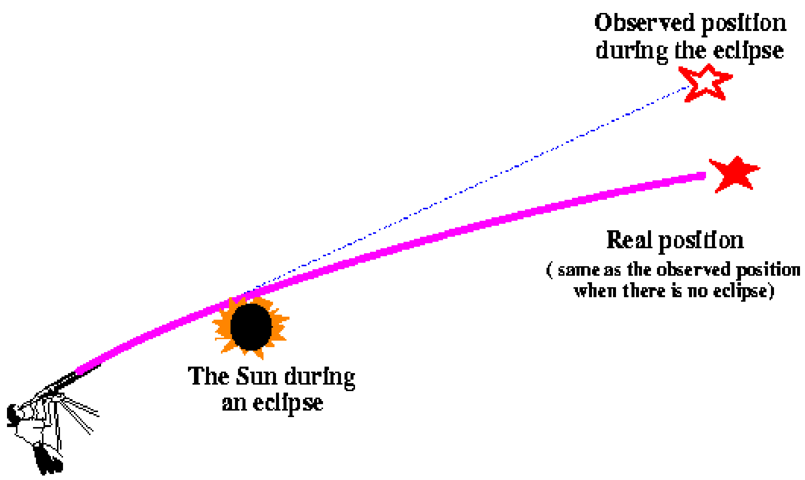
Ας υποθέσουμε τώρα ότι δύο σύγχρονοι πειραματιστές μέτρησαν την πυκνότητα του στέμματος και έδωσαν τα εξής αποτελέσματα: ο πρώτος ρ = 15 g/cm^3 με τέτοια αβεβαιότητα, ώστε η τιμή της πυκνότητας να κείται κατά πάσαν πιθανότητα μεταξύ 13,5 και 16,5 g/cm^3 και ο δεύτερος ρ = 13,9 g/cm^3 με περιοχή ανοχής μεταξύ 13,7 g/cm^3 και 14,1 g/cm^3.

Παρατηρούμε ότι ο κάθε πειραματιστής καθορίζει μια περιοχή τιμών, μέσα στην οποία πιστεύει ότι βρίσκεται η τιμή της πυκνότητας. Η αβεβαιότητα όμως της πρώτης τιμής είναι τόσο μεγάλη, ώστε το αποτέλεσμα να μη μπορεί να καθορίσει αν έγινε νοθεία ή όχι. Αντίθετα, η αβεβαιότητα της δεύτερης τιμής είναι τέτοια, ώστε να μπορούμε να βγάλουμε το συμπέρασμα ότι το κράμα είναι νοθευμένο, εφόσον η τιμή ρ = 15,5 g/cm^3 βρίσκεται αρκετά μακριά από την περιοχή (13,7 – 14,1 g/cm^3) που καθορίζει η αβεβαιότητα.

Παρατηρούμε ότι, αν οι πειραματιστές μας έδιναν μόνο τις τιμές ρ = 15 g/cm^3 και ρ = 13,9 g/cm^3, χωρίς το σφάλμα που επιβαρύνει την κάθε μια από αυτές, δεν θα μπορούσαμε να βγάλουμε συμπέρασμα, αν είχε νοθευτεί το κράμα ή όχι.

Η γνώση του σφάλματος είναι εξαιρετικά σημαντική στην περίπτωση, κατά την οποία μια νέα θεωρία προβλέπει διαφορετική τιμή για κάποιο φυσικό μέγεθος από ό,τι οι παλαιότερες θεωρίες. Ο προσδιορισμός της τιμής του φυσικού μεγέθους, μπορεί τότε να οδηγήσει σε αποδοχή ή σε απόρριψη της νέας ή των παλαιών θεωριών.

Ένα τέτοιο παράδειγμα αποτελεί η μέτρηση της κάμψης (bending) που υφίσταται το φως λόγω του βαρυτικού πεδίου, όταν περνά κοντά σε ένα άστρο, π.χ. τον Ήλιο, όπως φαίνεται στο Σχ. 1.2.1.



Σχήμα 1.2.1

Οι πρώτες νύξεις σχετικά με την επίδραση του βαρυτικού πεδίου στο φως έγιναν από τον Νεύτωνα στα έργα του “Principia” και “Opticks” (1688 και 1724 αντίστοιχα) και σχετικοί υπολογισμοί έγιναν αργότερα από τους John Mitchell (1783) και τον Henry Cavendish (1784), των οποίων τα αποτελέσματα δεν ανακοινώθηκαν τότε, αλλά βρέθηκαν στις αρχές του 20^{ου} αιώνα και δημοσιεύτηκαν το 1921. Μια παρόμοια τιμή της γωνίας απόκλισης 0,84΄΄λόγω του βαρυτικού πεδίου του Ηλίου, υπολόγισε ο Γερμανός Johann Georg von Soldner το 1801 και τη δημοσίευσε το 1804.

Όλοι οι πάρα πάνω υπολογισμοί στηρίχτηκαν στην άποψη ότι το φως αποτελείται από υλικά σωματίδια. Αυτή η παραδοχή παραμερίστηκε στις αρχές του 19^{ου} αιώνα, οπότε τα πειράματα του Thomas Young της διπλής σχισμής με το φαινόμενο της συμβολής, καθώς και της πόλωσης του φωτός με τα πειράματα του Augustin – Jean Fresnel, καθιέρωσαν την κυματική άποψη για το φως, με αποτέλεσμα να μη δοθεί η προσοχή που έπρεπε σε αυτούς τους υπολογισμούς.

Το 1911 ο Einstein υπολόγισε την κάμψη του φωτός από τον Ήλιο σε 0,83΄΄ βασιζόμενος στην ιδέα της διαστολής του χρόνου λόγω βαρύτητας, χωρίς να γνωρίζει την εργασία του Soldner. Τέλος το 1915, βασιζόμενος στη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας ο Einstein υπολόγισε για την απόκλιση τη διπλάσια τιμή 1,7΄΄. Λόγω της μικρής τιμής της απόκλισης ήταν δύσκολος ο πειραματικός προσδιορισμός αυτής της απόκλισης. Μόλις το 1919 κατά τη διάρκεια ολικής έκλειψης του Ηλίου, οι Dyson, Eddington και Davidson μέτρησαν την γωνία κάμψης και την βρήκαν α = 2,0΄΄ με 95% πιθανότητα να κείται μεταξύ 1,7΄΄ και 2,3΄΄. Προφανώς, αυτό το αποτέλεσμα συμφωνεί με εκείνο που προβλέπει η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας και διαφωνεί με τα αποτελέσματα των παλαιοτέρων θεωριών.

Όταν ανακοινώθηκε αυτό το αποτέλεσμα πολλοί υποστήριξαν ότι τα σφάλματα των μετρήσεων είχαν υποτιμηθεί και έτσι δεν ήταν δυνατόν να βγουν τελικά συμπεράσματα. Μεταγενέστερα πειράματα όμως, επιβεβαίωσαν την ορθότητα των αποτελεσμάτων των τριών αστρονόμων. Το σημαντικό ήταν ότι η όλη υπόθεση κρεμόταν από την ικανότητα των πειραματιστών να προσδιορίσουν με αξιοπιστία την αβεβαιότητα που επιβάρυνε το αποτέλεσμα και να πείσουν τους άλλους γι αυτό.

Εκτός από την αναγκαιότητα να προσδιορίσουμε το σφάλμα μιας μέτρησης, πρέπει να επισημάνουμε την σημασία της προσοχής, με την οποία είναι αναγκαίο να αντιμετωπίζονται απροσδόκητα πειραματικά αποτελέσματα.

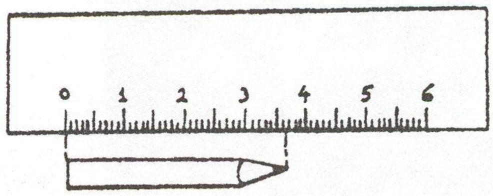
Το 1985 επιστήμονες που ερευνούσαν την ατμόσφαιρα στην Ανταρκτική επεσήμαναν την ραγδαία μείωση του πάχους του στρώματος όζοντος επάνω από τον Νότιο Πόλο παίρνοντας μετρήσεις από την επιφάνεια της Γης. Άλλοι επιστήμονες όμως, οι οποίοι έλεγχαν το πάχος του στρώματος από δεδομένα δορυφόρων, διαπίστωναν ότι δεν συνέβαινε μείωση.

Η διαφορά αυτή εξηγήθηκε, όταν διαπιστώθηκε ότι οι δορυφόροι είχαν ρυθμιστεί, έτσι ώστε να δέχονται σαν αξιόπιστες τις τιμές του πάχους του στρώματος όζοντος, όταν αυτές βρίσκονταν μέσα σε κάποια όρια και να απορρίπτουν όσες βρίσκονταν έξω από αυτά. Με αυτόν τον τρόπο απορρίπτονταν οι μικρές τιμές που φαίνονταν «αφύσικες» για ένα μοντέλο πάχους που δεν ίσχυε πλέον.

Όταν ελήφθησαν υπόψη και οι μικρές τιμές πάχους από τα όργανα του δορυφόρου, τότε διαπιστώθηκε πέραν πάσης αμφιβολίας, ότι το πάχος του στρώματος του όζοντος μειωνόταν με επικίνδυνο ρυθμό, επιτρέποντας στις υπεριώδεις ακτίνες του Ηλίου να φθάνουν σε μεγάλο ποσοστό στην επιφάνεια της Γης, με αποτέλεσμα αυξημένα ποσοστά μεταλλάξεων και καρκίνου του δέρματος.

1.3 Πηγές σφάλματος. Εκτίμηση σφάλματος κατά την ανάγνωση κλίμακας οργάνου και κατά την επανάληψη μιας μέτρησης

Κατά την μέτρηση ενός φυσικού μεγέθους υπεισέρχονται πολλές πηγές σφάλματος, δηλαδή επιδράσεις, οι οποίες εκτρέπουν το αποτέλεσμα της μέτρησης, άλλοτε προς μικρότερες και άλλοτε προς μεγαλύτερες τιμές. Π.χ. κατά την μέτρηση του μήκους του μολυβιού με ένα χάρακα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.3.1,

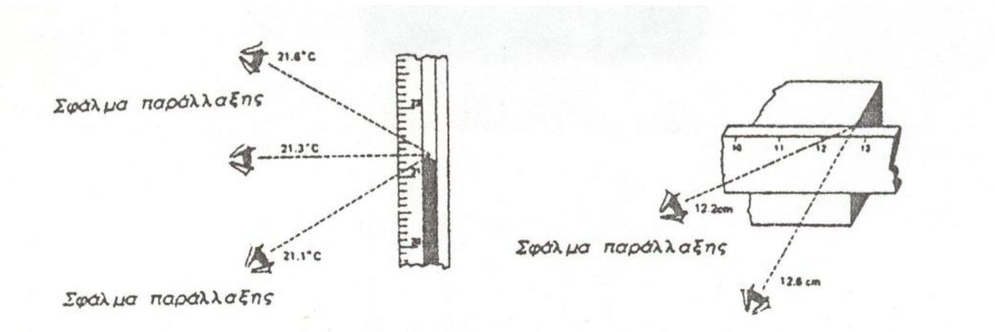


Σχήμα 1.3.1

υπεισέρχεται μια αβεβαιότητα από την μη σύμπτωση της άκρης του μολυβιού με το μηδέν της κλίμακας, μια άλλη αβεβαιότητα προκύπτει από την μη παραλληλία του μολυβιού με τον κανόνα και μια τρίτη από την μη σύμπτωση του άλλου άκρου του μολυβιού με μια υποδιαίρεση της κλίμακας, αλλά βρίσκεται ανάμεσα στα 36 και 37 mm, οπότε η υποκειμενική εκτίμηση του κλάσματος της τελευταίας υποδιαίρεσης υπεισάγει αβεβαιότητα στο αποτέλεσμα. Μια τέταρτη αιτία αβεβαιότητας είναι η παράλλαξη, η οποία προκύπτει όταν ο παρατηρητής βλέπει «υπό γωνίαν» το σώμα ή τον δείκτη του οργάνου, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.3.2. Επειδή από τις τέσσερες πάρα πάνω αβεβαιότητες η τρίτη είναι η πιό σημαντική, μπορούμε να αγνοήσουμε τις υπόλοιπες τρεις και να ισχυριστούμε ότι το αποτέλεσματης της μέτρησης είναι

36,3 mm

με πιθανή περιοχή αβεβαιότητας από 36,1 μέχρι 36,5 mm.

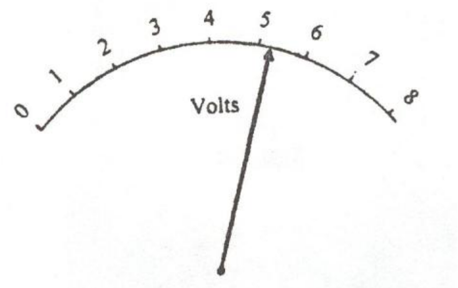


Σχήμα 1.3.2

Τα ίδια ισχύουν και για το βολτόμετρο που φαίνεται στο Σχήμα 1.3.3. Η τιμή της τάσης είναι

5,3 V

με πιθανή περιοχή αβεβαιότητας από 5,2 μέχρι 5,4 V. Σε αυτές τις περιπτώσεις , στις οποίες η μεγαλύτερη συνεισφορά στο σφάλμα οφείλεται σε μια μόνο πηγή, η εκτίμηση αυτού γίνεται άμεσα, χωρίς την χρήση της Θεωρίας Πιθανοτήτων.



Σχήμα 1.3.3

Σε πολλές περιπτώσεις όμως, υπεισέρχονται αβεβαιότητες, οι οποίες, είτε οφείλονται σε συνεισφορές πολλών πηγών σφάλματος που όλες είναι σημαντικές, είτε είναι πολύ δυσκολώτερο να εκτιμηθούν, από ό,τι εκείνες που συνδέονται με τον εντοπισμό της άκρης ενός αντικειμένου ή του δείκτη επάνω στην κλίμακα ενός οργάνου.

Ας δούμε σαν παράδειγμα την μέτρηση ενός χρονικού διαστήματος με χρονόμετρο. Σε αυτήν την περίπτωση την μεγαλύτερη αβεβαιότητα υπεισάγει ο άγνωστος χρόνος αντίδρασης του χειριστή κατά την έναρξη και την παύση της λειτουργίας του χρονομέτρου. Σε τέτοιες περιπτώσεις, για να εκτιμηθούν οι αβεβαιότητες με αξιοπιστία, χρειάζεται η επανάληψη της μέτρησης πολλές φορές, κάτω από τις ίδιες συνθήκες.

Έστω ότι μετρούμε την περίοδο ενός εκκρεμούς και την βρίσκουμε ίση με 2,3 s. Από μια και μόνο μέτρηση δεν μπορούμε να εκτιμήσουμε την αβεβαιότητα. Αν όμως επαναλάβουμε την μέτρηση και βρούμε π.χ. 2,4 s, συμπεραίνουμε αμέσως ότι η αβεβαιότητα είναι της τάξης του 0,1 s. Αν επαναλάβουμε την μέτρηση τέσσερες φορές και πάρουμε τις τιμές

2,3   2,4   2,5   2,4 s

μπορούμε να βγάλουμε πολύ πιό αξιόπιστα συμπεράσματα σχετικά με το σφάλμα της μέτρησης.

Θα δούμε αργότερα ότι, όταν έχουμε πολλές μετρήσεις μιας ποσότητας, η πιό αξιόπιστη τιμή (δηλαδή αυτή που επιβαρύνεται με την μικρότερη αβεβαιότητα – σφάλμα) είναι η μέση τιμή αυτών. Έτσι, για την περίοδο του εκκρεμούς έχουμε μέση τιμή 2,4 s. Από τις μετρήσεις που έχουμε φαίνεται ασφαλές να θεωρήσουμε ότι η ορθή τιμή της περιόδου κείται κάπου μεταξύ της μικρότερης τιμής 2,3 s και της μεγαλύτερης τιμής 2,5 s. Έτσι το αποτέλεσμα των μετρήσεων είναι

T = 2,4 s

Ακραίες τιμές T = από 2,3 μέχρι 2,5 s

Ένας αντικειμενικός προσδιορισμός του σφάλματος προϋποθέτει την εφαρμογή στατιστικών μεθόδων στα αποτελέσματα μιας επαναλαμβανόμενης μέτρησης, εφόσον οι διάφορες πηγές σφάλματος εκτρέπουν το αποτέλεσμα της μέτρησης, άλλοτε προς μεγαλύτερες και άλλοτε προς μικρότερες τιμές κατά ένα τυχαίο τρόπο. Με αυτόν τον τρόπο προκύπτει μια αντικειμενικά δεκτή τιμή της αβεβαιότητας, ανεξάρτητη από την εκτίμηση του πειραματιστή.

1.4 Σημαντικά ψηφία σφάλματος, πειραματικής τιμής και αποτελέσματος αριθμητικών πράξεων. Στρογγυλοποίηση αριθμών.

Το σφάλμα που βαρύνει την τιμή ενός φυσικού μεγέθους θέτει όριο στο πλήθος των ψηφίων, με τα οποία αυτή γράφεται. Σημαντικό ονομάζεται εκείνο το ψηφίο, το οποίο δίνει αξιόπιστη πληροφορία σχετικά με την τιμή ενός φυσικού μεγέθους. Έτσι, στην περίπτωση που μετρούμε κάποιο φυσικό μέγεθος με το τελευταίο ψηφίο «κατ' εκτίμηση», αυτό ακριβώς είναι το τελευταίο σημαντικό. Π.χ. το μήκος που μετρείται στο Σχήμα 1.3.1 είναι l = 36,3 mm και έχει τρία σημαντικά ψηφία. Για τα ψηφία 3 και 6 δεν αμφιβάλλουμε, ενώ για το 3 αρχίζουμε να αμφιβάλλουμε. Ομοίως, η τάση που μετρά το βολτόμετρο του Σχήματος 1.3.3, V = 5,3 Volt, έχει δύο σημαντικά ψηφία. Για το 5 δεν έχουμε αμφιβολία, ενώ για το 3 αρχίζουμε να αμφιβάλλουμε. Παρατηρούμε ότι καταχρηστικά θεωρούμε σαν σημαντικό ψηφίο το πρώτο «κατ' εκτίμηση» ψηφίο, για το οποίο αρχίζουμε να αμφιβάλλουμε.

Είδαμε στην παράγραφο 1.1 ότι η πειραματική τιμή ενός φυσικού μεγέθους γράφεται

$$x_b \pm \delta x$$

Επειδή η ποσότητα δx αποτελεί μια προσεγγιστική τιμή της αβεβαιότητας, δεν μπορεί να έχει πολλά σημαντικά ψηφία. Για μετρήσεις πολύ μεγάλης ακριβείας το σφάλμα γράφεται μερικές φορές με δύο σημαντικά ψηφία, <u>αλλά για πειράματα στο φοιτητικό εργαστήριο το σφάλμα γράφεται με ένα μόνο σημαντικό ψηφία.</u> Π.χ. αν κατά την μέτρηση της επιτάχυνσης της βαρύτητας g προκύψει μετά από υπολογισμούς η τιμή του σφάλματος $\delta g = 0{,}02385$ m/s^2, αυτή θα πρέπει να γραφτεί με ένα σημαντικό ψηφίο, δηλαδή

$$\delta g = 0{,}02 \text{ m/s}^2$$

Εφόσον έχουν καθοριστεί τα σημαντικά ψηφία του σφάλματος, είναι εύκολο να βρει κανείς πόσα σημαντικά ψηφία έχει η αριθμητική τιμή του μεγέθους. Αν η τιμή της g έχει προκύψει ίση με 9,812167 m/s^2 από το σφάλμα δg προκύπτει ότι αρχίζουμε να αμφιβάλλουμε για το 1 που βρίσκεται μετά το 9 και το 8, οπότε όλα τα υπόλοιπα ψηφία δεν μας δίνουν αξιόπιστη πληροφορία για την αριθμητική τιμή του μεγέθους, δεν είναι σημαντικά και πρέπει να παραλειφθούν. Το αποτέλεσμα πρέπει να γραφτεί

$$g = (9{,}81 \pm 0{,}02) \text{ m/s}^2$$

Γενικά, θα πρέπει το τελευταίο ψηφίο της τιμής του μεγέθους να είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με το σφάλμα. Αν το σφάλμα είναι δέκατα, η τιμή του μεγέθους θα γραφτεί μέχρι και τα δέκατα, αν το σφάλμα είναι εκατοστά, η τιμή του μεγέθους θα γραφτεί μέχρι και τα εκατοστά, κλπ.

Πρέπει να τονίσουμε ότι άλλο είναι τα σημαντικά ψηφία και άλλο τα δεκαδικά ψηφία. Π.χ. έστω ότι η μάζα ενός σώματος μετρήθηκε με τρεις ζυγούς διαφορετικής ακρίβειας:

Πρώτος ζυγός	(3 ± 1) g, ένα σημαντικό ψηφίο
Δεύτερος ζυγός	(2,53 ± 0,01) g, τρία σημαντικά ψηφία
Τρίτος ζυγός	(2,531 ± 0,001) g, τέσσερα σημαντικά ψηφία

Η αριθμητική τιμή ενός φυσικού μεγέθους πρέπει να γράφεται μόνο με τα σημαντικά ψηφία. Αν π.χ. προσδιορίσουμε την ταχύτητα ενός σώματος

$$\upsilon = (605{,}178 \pm 3) \text{ m/s}$$

προφανώς τα αποτέλεσμα δεν έχει γραφτεί σωστά. Εφόσον το σφάλμα είναι 3 m/s αρχίζουμε να αμφιβάλλουμε για το 5 της αριθμητικής τιμής, οπότε πρέπει να παραλείψουμε τα ψηφία 1,7 και 8 εφόσον δεν είναι σημαντικά. Το αποτέλεσμα θα πρέπει να γραφτεί

$$\upsilon = (605 \pm 3) \text{ m/s}$$

Όμοίως, αν κάποια αριθμητική τιμή, π.χ. η 92,81 cm βαρύνεται με σφάλμα ίσο προς 0,3 cm, πρέπει να γραφτεί

(92,8 ± 0,3) cm

Αν το σφάλμα είναι 3 cm, τότε η αριθμητική τιμή πρέπει να γραφτεί

(93 ± 3) cm

κι αν το σφάλμα είναι 30 cm το αποτέλεσμα γράφεται

(90 ± 30) cm ή καλύτερα (9 ± 3)x10 cm

έτσι ώστε να μην υπάρχει αμφιβολία ότι το μηδέν στην τιμή 90 cm δεν είναι σημαντικό ψηφίο. Βλέπουμε λοιπόν ότι η αριθμητική τιμή ενός φυσικού μεγέθους πρέπει να γράφεται με τόσα ψηφία, έτσι ώστε το τελευταίο να είναι της ίδιας τάξης με το σφάλμα.

Πολλές φορές η αριθμητική τιμή ενός φυσικού μεγέθους γράφεται χωρίς να καθορίζεται σαφώς το σφάλμα που την βαρύνει. Σε αυτήν την περίπτωση, η αριθμητική τιμή θα πρέπει να γραφτεί με όλα τα σημαντικά της ψηφία, έτσι ώστε να υπάρχει αμφιβολία μόνο για το τελευταίο από αυτά. Π.χ. αν αναφέρεται κάπου ότι η ωμική αντίσταση είναι R = 12,5 Ω, αυτό υποδηλώνει ότι η πάρα πάνω τιμή έχει προσδιοριστεί με σφάλμα ενός ή μερικών δεκάτων του Ω. Η τιμή 12,5 Ω έχει τρία σημαντικά ψηφία. Αν αυτή η τιμή ήταν γραμμένη R = 12,50 Ω, αυτό θα σήμαινε ότι το σφάλμα της είναι ένα ή μερικά εκατοστά του Ω και ότι αυτή έχει τέσσερα σημαντικά ψηφία.

Το πλήθος των σημαντικών ψηφίων καθορίζεται από την ακρίβεια, με την οποία προσδιορίστηκε πειραματικά η τιμή ενός φυσικού μεγέθους και όχι από τις μονάδες που μετρείται. Ιδιαίτερη προσοχή χρειάζεται όταν υπάρχουν μηδενικά στην αρχή, στο μέσον ή στο τέλος μιας αριθμητικής τιμής. Γενικά, τα μηδενικά που γράφονται στην αρχή της αριθμητικής τιμής για να καθοριστεί η θέση της υποδιαστολής, δεν είναι σημαντικά. Π.χ. έστω ότι η μάζα ενός σώματος μετρήθηκε και βρέθηκε ίση με m = 2,325 g. Η μέτρηση έγινε με σφάλμα ενός ή μερικών χιλιοστών του γραμμαρίου, επομένως η πάρα πάνω αριθμητική τιμή έχει τέσσερα σημαντικά ψηφία. Η μάζα αυτή σε χιλιόγραμμα είναι m = 0,002325 kg. Είναι φανερό ότι η μέτρηση αυτής της μάζας σε χιλιόγραμμα ή σε γραμμάρια δεν μεταβάλλει το σφάλμα που την βαρύνει, εφόσον αυτό προσδιορίζεται αποκλειστικά από τα όργανα και την μέθοδο της μέτρησης, οπότε η αριθμητική τιμή εξακολουθεί να έχει τέσσερα σημαντικά ψηφία. Σε αυτήν την περίπτωση ο καλύτερος τρόπος γραφής είναι

$$m = 2{,}325\text{x}10^{-3}\ \text{kg}$$

Τα μηδενικά που εμφανίζονται στο μέσον μιας αριθμητικής τιμής είναι πάντοτε σημαντικά ψηφία. Π.χ. t = 2,05 s (τρία σημαντικά ψηφία), υ = 30,085 m/s (πέντε σημαντικά ψηφία).

Ιδιαίτερη προσοχή χρειάζεται, όταν εμφανίζονται μηδενικά στο τέλος της αριθμητικής τιμής. Π.χ. θερμοκρασία θ = 25,0 ^{0}C. Αν έχει δωθεί σωστά αυτή η αριθμητική τιμή, θα πρέπει το σφάλμα που την βαρύνει να είναι ένα ή μερικά δέκατα του βαθμού Κελσίου και αυτή έχει τρία σημαντικά ψηφία. Αν το σφάλμα της πάρα πάνω θερμοκρασίας είναι ένας ή μερικοί βαθμοί Κελσίου, τότε θα πρέπει να γραφτεί $\theta = 25\ {}^0C$ και έτσι θα έχει δύο σημαντικά ψηφία.

Θα πρέπει πάντοτε να γράφουμε την αριθμητική τιμή ενός φυσικού μεγέθους με τα σημαντικά ψηφία που έχει και μόνον με αυτά. Έτσι, πολλές φορές επιβάλλεται να γράψουμε την αριθμητική τιμή σαν γινόμενο ενός αριθμού επί δύναμη του δέκα. Π.χ. σε ένα από τα προηγούμενα παραδείγματα είχαμε την αριθμητική τιμή (90 ± 30) cm. Επειδή αυτή έχει ένα μόνο σημαντικό ψηφίο, αν θέλουμε να μην αναφέρουμε το σφάλμα, θα πρέπει να την γράψουμε 9x10 cm.

Ανακεφαλαιώνοντας έχουμε:

α) Μηδενικά, τα οποία καθορίζουν τη θέση της υποδιαστολής δεν είναι σημαντικά. Π.χ. η τιμή 0,046 g έχει δύο σημαντικά ψηφία.

β) Μηδενικά, τα οποία βρίσκονται μεταξύ άλλων ψηφίων είναι σημαντικά. Π.χ. η τιμή 4009 kg έχει τέσσερα σημαντικά ψηφία.

γ) Μηδενικά, τα οποία βρίσκονται στο τέλος απαιτούν ιδιαίτερη προσοχή. Αν είναι σημαντικά πρέπει να διατηρηθούν, αν όχι να τεθούν σε δυνάμεις του 10. Π.χ.

$8,200x10^3$ έχει τέσσερα σημαντικά ψηφία
$8,20x10^3$ έχει τρία σημαντικά ψηφία
$8,2x10^3$ έχει δύο σημαντικά ψηφία.

Ας δούμε τώρα πόσα σημαντικά ψηφία έχουν τα αποτελέσματα των αριθμητικών πράξεων. Είναι προφανές ότι η «ποιότητα» του αποτελέσματος θα καθορίζεται από εκείνη του λιγότερο ακριβούς αριθμού που συμμετέχει στις αριθμητικές πράξεις.

Στην περίπτωση πρόσθεσης ή αφαίρεσης αριθμών, οι οποίοι δεν έχουν το ίδιο πλήθος <u>δεκαδικών ψηφίων</u>, το αποτέλεσμα γράφεται με τόσα δεκαδικά ψηφία, όσα έχει ο αριθμός με τα λιγότερα από αυτά. Π.χ.

2,738 + 37,2 = 39,938 (δεν είναι σωστό)
= 39,9 (σωστό)

Πρέπει εδώ να παρατηρήσουμε ότι στην πρόσθεση και την αφαίρεση αριθμών παίζει ρόλο <u>το πλήθος των δεκαδικών και όχι των σημαντικών τους ψηφίων.</u>

Στην περίπτωση πολλαπλασιασμού, διαίρεσης, δυνάμεων ή ριζών, το αποτέλεσμα γράφεται με τόσα σημαντικά ψηφία, όσα έχει ο αριθμός με τα λιγότερα από αυτά ή το πολύ με ένα περισσότερο. Αυτός ο κανόνας δεν είναι αυστηρός. Θα ελέγξουμε την εγκυρότητά του σε ορισμένες περιπτώσεις, όταν μιλήσουμε για την μετάδοση σφάλματος. Παραδείγματα:

11,1x23,25 = 258   8,25/13,258 = 0,623

10,77x3,55 = 38,2 $(56,4)^{1/2} = 7,51$

Ο κανόνας αυτός εύκολα μπορεί να επαληθευτεί, αν λάβουμε υπόψη ότι, λόγω σφαλμάτων, το τελευταίο σημαντικό ψηφίο των τιμών είναι αμφίβολο. Έτσι, μεταβάλουμε κατά μια μονάδα το τελευταίο ψηφίο του αριθμού με τα λιγότερα σημαντικά ψηφία και παρατηρούμε ποιο ψηφίο του αποτελέσματος επηρεάζεται, π.χ.

8,25/13,258 = 0,622658   8,26/13,258 = 0,62302

Αφαιρώντας βρίσκουμε 0,0104. Παρατηρούμε ότι η ελάχιστη απόκλιση του αριθμού με τα λιγότερα σημαντικά ψηφία προκαλεί τέτοια μεταβολή στο αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού, ώστε να αλλάζει το ψηφίο 2 που αντιστοιχεί στα χιλιοστά. Επομένως, το αποτέλεσμα έχει κατά πάσαν πιθανότητα τρία σημαντικά ψηφία και πρέπει να γραφτεί 0,623.

Ας μιλήσουμε τώρα για την στρογγυλοποίηση ενός αριθμού. Αν το ψηφίο που χρειάζεται να παραλειφθεί είναι μικρότερο από 5 απλά παραλείπεται, χωρίς να αλλάξει το προηγούμενο ψηφίο. Αν το ψηφίο που χρειάζεται να παραλειφθεί είναι μεγαλύτερο από 5, το προηγούμενο ψηφίο αυξάνεται κατά μια μονάδα. Π.χ.

$$1{,}232 \approx 1{,}23 \qquad 4{,}387 \approx 4{,}39$$

Αν το ψηφίο που χρειάζεται να παραλειφθεί είναι 5, τότε ο αριθμός στρογγυλοποιείται στον πλησιέστερο άρτιο αριθμό (κανόνας του άρτιου αριθμού). Π.χ.

$$1{,}235 \approx 1{,}24 \qquad 4{,}385 \approx 4{,}38$$

Ο κανόνας αυτός εξασφαλίζει την μικρότερη απόκλιση λόγω στρογγυλοποίησης, όπως φαίνεται από το πάρα κάτω παράδειγμα. Έστω ότι θέλουμε να προσθέσουμε τους αριθμούς 4,35 8,65 2,95 12,45 6,65 7,55 και 9,75. Χωρίς καμιά στρογγυλοποίηση το αποτέλεσμα είναι 52,35. Αν στρογγυλοποιήσουμε τους αριθμούς ακολουθώντας τον κανόνα του άρτιου αριθμού, το αποτέλεσμα είναι

$$4{,}4 + 8{,}6 + 3{,}0 + 12{,}4 + 6{,}6 + 7{,}6 + 9{,}8 = 52{,}4$$

ενώ, αν η στρογγυλοποίηση γίνει, έτσι ώστε να αυξάνεται πάντοτε το ψηφίο πριν το 5 το αποτέλεσμα είναι

$$4{,}4 + 8{,}7 + 3{,}0 + 12{,}5 + 6{,}7 + 7{,}6 + 9{,}8 = 52{,}7$$

Παρατηρούμε ότι ο κανόνας του άρτιου αριθμού κάνοντας τον στρογγυλοποιημένο αριθμό, άλλοτε μεγαλύτερο και άλλοτε μικρότερο από τον μη στρογγυλοποιημένο, δίνει αποτέλεσμα πλησιέστερο σε εκείνο των μη στρογγυλοποιημένων αριθμών. Αυτό βέβαια ισχύει όταν υπάρχουν πολλοί αριθμοί, των οποίων το ψηφίο πριν από το τελικό 5 είναι κατά ένα τυχαίο τρόπο άρτιο ή περιττό. Εύκολα αντιλαμβάνεται κανείς ότι σε παρόμοιο αποτέλεσμα θα κατέληγε , αν εφάρμοζε τον «κανόνα του περιττού αριθμού». Ο κανόνας του άρτιου αριθμού αποτελεί απλά μια σύμβαση και δεν στηρίζεται σε κάποιο περιορισμό που βάζει η λογική.

Σε πολλές περιπτώσεις εμφανίζονται σταθεροί συντελεστές, όπως π.χ. στο εμβαδόν τριγώνου

$$A = \frac{1}{2} l\, h,$$

όπου l και h είναι αντίστοιχα τα μήκη της βάσης και του ύψους του τριγώνου ή το εμβαδόν κύκλου

$$S = \frac{\pi d^2}{4},$$

όπου d η διάμετρος αυτού. Σε αυτές τις περιπτώσεις οι αριθμοί 1,2 και 4 που εμφανίζονται στις εξισώσεις δεν βαρύνονται με σφάλμα και έτσι δεν θέτουν όριο στο πλήθος των σημαντικών ψηφίων του αποτελέσματος. Π.χ. αν l = 3,25 cm και h = 2,8 cm, το εμβαδόν του τριγώνου θα έχει την τιμή A = (1/2)x3,25x2,8 cm^2 = 4,6 cm^2, με δύο σημαντικά ψηφία, αριθμός που καθορίζεται από την τιμή h = 2,8 cm και όχι με ένα, όπως θα μπορούσε κανείς να θεωρήσει λανθασμένα, επειδή ο συντελεστής ½ = 0,5 έχει φαινομενικά ένα μόνο σημαντικό ψηφίο.

Όταν μέσα σε μια εξίσωση εμφανίζεται ο αριθμός π = 3,1415926…, θα πρέπει να κρατηθούν από αυτόν περισσότερα ψηφία από εκείνα του αριθμού με τα λιγότερα σημαντικά ψηφία, για να μην περιορίσει το π το πλήθος των σημαντικών ψηφίων του αποτελέσματος.

Εφόσον το πλήθος των σημαντικών ψηφίων της αριθμητικής τιμής ενός φυσικού μεγέθους καθορίζεται από το σφάλμα που τη βαρύνει, το οποίο με την σειρά του καθορίζεται από την πειραματική μέθοδο και τα όργανα που χρησιμοποιήθηκαν, δεν θα πρέπει το πλήθος των σημαντικών ψηφίων να μεταβάλλεται, αν αλλάξουν οι μονάδες μέτρησης π.χ.

l = 32,8 in (ίντσες) ή l = 32,8 x 2,54 cm = 83,312 cm ≈ 83,3 cm (1 in = 2,54 cm)

Q = 358 cal ή Q = 358 x 4,1855 J = 1498,409 J ≈ 150 x 10 J (1 cal = 4,1855 J)

v = 75,8 miles/h ή v = 75,8 x 1,60934 km/h = 121.98797 km/h ≈ 122 km/h
(1 mile = 1,60934 km).

p = 2,5 atm ή p = 2,5 x 101325 N m^{-2} = 253312,5 N m^{-2} = 2,5 x 10^5 N m^{-2}
(1 atm = 101325 N m^{-2}).

Πρέπει να τονίσουμε ότι η αριθμητική τιμή ενός φυσικού μεγέθους πρέπει να συνοδεύεται απαραίτητα από τις κατάλληλες μονάδες. Είναι φανερό ότι αν αλλάξουν οι μονάδες μέτρησης, αλλάζει και η αριθμητική τιμή του φυσικού μεγέθους.

1.5 Απόλυτο και Σχετικό σφάλμα

Στο αποτέλεσμα του πειραματικού προσδιορισμού μιας ποσότητας

$$x = x_b \pm \delta x$$

το σφάλμα δx αποτελεί μέτρο της αξιοπιστίας των μετρήσεων. Όταν η αβεβαιότητα εκφράζεται κατά τον πάρα πάνω τρόπο, ονομάζεται απόλυτο σφάλμα (absolute error). Το απόλυτο σφάλμα είναι φυσικό μέγεθος ομοειδές προς το μετρούμενο και έχει τις ίδιες μονάδες με αυτό.

Η αβεβαιότητα δx όμως, αν δεν θεωρηθεί σε σχέση με την τιμή x_b του μετρούμενου μεγέθους, δεν μας δίνει το μέτρο της αξιοπιστίας της x_b. Π.χ. όταν υπάρχει αβεβαιότητα 1 cm κατά τον προσδιορισμό ενός μήκους 10 cm, η μέτρηση δεν είναι τόσο ακριβής, όσο όταν η ίδια αβεβαιότητα 1 cm βαρύνει τον προσδιορισμό ενός πολύ μεγαλύτερου μήκους, π.χ. 1000 cm. Επομένως, η ποιότητα της μέτρησης δεν εκφράζεται τόσο άμεσα από το σφάλμα δx, όσο από τον λόγο $\delta x/x_b$. Η ποσότητα αυτή ονομάζεται σχετικό σφάλμα (relative, fractional error) και είναι

$$\text{Σχετικό σφάλμα} = \frac{\delta x}{|x_b|}$$

Επειδή συνήθως το δx είναι σημαντικά μικρότερο από την x_b, το σχετικό σφάλμα είναι ένας αριθμός σημαντικά μικρότερος από την μονάδα και έτσι πολλές φορές αφού τον πολλαπλασιάσουμε επί 100 τον εκφράζουμε σαν σχετικό σφάλμα %. Ανάλογα μπορούμε να τον εκφράσουμε $^0/_{00}$, ή σε ppm (parts per million) μέρη στο εκατομμύριο. Παράδειγμα, η μέτρηση

$$l = (50 \pm 1)\ \text{cm}$$

έχει σχετικό σφάλμα

$$\frac{\delta l}{|l_b|} = \frac{1}{50} = 0{,}02$$

ή ισοδύναμα 2%. Έτσι, το αποτέλεσμα της μέτρησης μπορεί να γραφτεί

$$l = 50\ \text{cm} \pm 2\%$$

Πρέπει εδώ να παρατηρήσουμε ότι τα εξής:

1) Σε αντίθεση με το απόλυτο σφάλμα, το σχετικό είναι καθαρός αριθμός και
2) Το απόλυτο και το σχετικό σφάλμα δεν είναι ουσιαστικά διαφορετικά, αλλά εκφράζουν την ίδια ακριβώς αβεβαιότητα με δυο διαφορετικούς τρόπους.

Είναι φανερό ότι, αν γνωρίζουμε το απόλυτο σφάλμα ενός φυσικού μεγέθους και την τιμή του, μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε το σχετικό σφάλμα αυτού και το αντίστροφο.

1.6 Συστηματικά και Τυχαία σφάλματα

Κατά τον προσδιορισμό της τιμής ενός φυσικού μεγέθους συμβαίνει για διάφορες αιτίες το αποτέλεσμα να προκύπτει συστηματικά ή μεγαλύτερο ή μικρότερο από την «ορθή» του τιμή. Σε αυτήν την περίπτωση η τιμή του φυσικού μεγέθους βαρύνεται με συστηματικά σφάλματα (systematic errors). Τα συστηματικά σφάλματα μπορεί να οφείλονται ή σε προσεγγιστικές σχέσεις που χρησιμοποιούμε, ή στα όργανα, ή στον ίδιο τον παρατηρητή, όπως θα δούμε στο επόμενο παράδειγμα. (Συνήθως γίνεται η εξής σύγχυση: τα συστηματικά σφάλματα αποδίδονται αποκλειστικά στα όργανα, ενώ τα τυχαία στον παρατηρητή. Αυτό όμως δεν είναι σωστό. Ο χαρακτηρισμός «συστηματικό» σφάλμα αναφέρεται στο ότι κάποιο σφάλμα εκτρέπει συστηματικά προς την ίδια φορά ένα πειραματικό αποτέλεσμα και δεν αφορά την αιτία που το προκαλεί). Γενικά, τα συστηματικά σφάλματα δεν είναι σταθερά, απλά έχουν πάντοτε την ίδια φορά.

<u>Παράδειγμα</u>

Έστω ότι θέλουμε να προσδιορίσουμε την επιτάχυνση της βαρύτητας g με ένα εκκρεμές, το οποίο αποτελείται από μια σφαίρα δεμένη στο άκρο ενός νήματος μήκους l. Μετρούμε την περίοδο Τ της ταλαντώσεως και το μήκος l του εκκρεμούς και υπολογίζουμε την g από την σχέση

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Σε αυτόν τον υπολογισμό υπεισέρχονται τα εξής συστηματικά σφάλματα.

α) Η πάρα πάνω σχέση είναι προσεγγιστική και προσεγγίζει τόσο περισσότερο την πραγματικότητα, όσο μικρότερο είναι το πλάτος της ταλάντωσης θ_0, έτσι ώστε να ισχύει ημ$\theta_0 \approx \theta_0$ σε rad. Μια καλύτερη σχέση θα ήταν η ακόλουθη

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}(1 + \frac{1}{4}\eta\mu^2 \frac{\theta_0}{2} + \frac{9}{64}\eta\mu^4 \frac{\theta_0}{2} + ...) = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} A$$

Για $\theta_0 = 10^0$ έχουμε A = 1,001907.

Έστω ότι μετρήθηκε η περίοδος και το μήκος του εκκρεμούς και βρέθηκαν οι τιμές T = 2,01 s και l = 1,000 m, όταν $\theta_0 = 10^0$. Αν αυτές οι τιμές χρησιμοποιηθούν στην πρώτη σχέση προκύπτει η τιμή

$$g = 9,77 \text{ m s}^{-2}$$

Αν όμως την καλύτερη σχέση, θα προκύψει

$$g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$$

Παρατηρούμε ότι στο πάρα πάνω πείραμα χρησιμοποιώντας μια σχέση όχι απόλυτα ακριβή, καταλήγουμε σε αποτέλεσμα που είναι πάντοτε μικρότερο (συτηματικά μικρότερο) από την ορθή τιμή, με όση προσοχή κι αν πάρουμε τις μετρήσεις. Έτσι, ο προσδιορισμός της g βαρύνεται με συστηματικό σφάλμα, το οποίο μάλιστα δεν είναι σταθερό, αλλά εξαρτάται από το πλάτος ταλάντωσης θ_0 μέσω της ποσότητας A.

β) Αν το χρονόμετρο που χρησιμοποιείται «πηγαίνει εμπρός», η περίοδος αιωρήσεως T θα προκύπτει μεγαλύτερη από την ορθή τιμή της και η $g = 4\pi^2 l/T^2$ θα προκύπτει μικρότερη από ό,τι πρέπει. Το αντίθετο βέβαια θα συμβαίνει, αν το χρονόμετρο «πηγαίνει πίσω». Σε αυτές τις περιπτώσεις έχουμε συστηματικό σφάλμα που οφείλεται στο όργανο μέτρησης του χρόνου.

γ) Εντελώς ανάλογα ισχύουν, αν η μετροταινία έχει υποδιαιρέσεις λίγο μεγαλύτερες ή λίγο μικρότερες από το κανονικό. Στην πρώτη περίπτωση το μήκος l του εκκρεμούς θα προκύπτει συστηματικά μικρότερο από την ορυή τιμή, με αποτέλεσμα η g να προκύπτει συστηματικά μικρότερη από ό,τι πρέπει.

δ) Αν ο παρατηρητής έχει αργά ανακλαστικά, θα σταματά το χρονόμετρο αργότερα από ό,τι πρέπει, με αποτέλεσμα η τιμή της περιόδου αιωρήσεως να προκύπτει μεγαλύτερη από την κανονική. Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε συστηματικό σφάλμα που οφείλεται στον παρατηρητή.

Άλλες αιτίες που υπεισάγουν συστηματικά σφάλματα σε κάποια μέτρηση, είναι π.χ. η μετάθεση του μηδενός σε ένα διαστημόμετρο ή σε ένα μικρόμετρο, το μη σταθερό βήμα του κοχλία ενός μικρομέτρου, η θερμοχωρητικότητα ενός θερμομέτρου, το οποίο μεταβάλλει τη θερμοκρασία του συστήματος που μας ενδιαφέρει, οι απώλειες θερμότητας κατά τη διάρκεια πειραμάτων θερμιδομετρίας, η εμφάνιση θερμοηλεκτρικών τάσεων σε διατάξης μέτρησης ηλεκτρικής τάσης με αντιστάθμιση, η ύπαρξη νεκρού χρόνου σε ένα απαριθμητή Geiger κλπ.

Για να μπορέσουμε να εντοπίσουμε και να εξουδετερώσουμε τα συστηματικά σφάλματα, χρειάζεται να εξετάσουμε με μεγάλη προσοχή τις προϋποθέσεις, κάτω από τις οποίες ισχύουν οι μαθηματικές σχέσεις που χρησιμοποιούμε και να ελέγχουμε τα όργανα που χρησιμοποιούμε, συγκρίνοντάς τα με άλλα καλύτερης ποιότητας ή πρότυπα.

Τα τυχαία σφάλματα (random or accidental errors) οφείλονται αποκλειστικά σε τυχαίους παράγοντες, οι οποίοι εκτρέπουν το αποτέλεσμα της μέτρησης, άλλοτε προς μεγαλύτερες και άλλοτε προς μικρότερες τιμές από την «ακριβή» τιμή κατά ένα τυχαίο τρόπο. Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει καμμία προτίμηση εκτροπής είτε προς μικρότερες, είτε προς μεγαλύτερες τιμές, αλλά ότι υπάρχει ίδια πιθανότητα και για τις δυο αυτές δυνατότητες.

<u>Παράδειγμα:</u>

Στο παράδειγμα για τον προσδιορισμό της g, όταν μετρούμε την περίοδο του εκκρεμούς με χρονόμετρο, δεν μπορούμε να επιτύχουμε απόλυτη σύμπτωση της αρχής της ταλάντωσης με την εκκίνηση του χρονομέτρου. Επίσης, αν ο δείκτης του χρονομέτρου βρεθεί μεταξύ δυο διαδοχικών υποδιαιρέσεων της κλίμακας του οργάνου, πρέπει να εκτιμήσουμε το κλάσμα της υποδιαίρεσης αυτής, οπότε παίζει ρόλο ο υποκειμενικός παράγοντας.

Απόδειξη ότι υπάρχουν τυχαία σφάλματα αποτελεί το γεγονός, ότι η επανάληψη μιας μέτρησης κάτω από τις ίδιες συνθήκες, δηλαδή με την ίδια μέθοδο, τα ίδια όργανα, την ίδια προσοχή κλπ., δεν δίνει τα ίδια αποτελέσματα.

Τα τυχαία σφάλματα έχουν σαν αποτέλεσμα οι τιμές ενός φυσικού μεγέθους που προκύπτουν από την επανάληψη ενός πειράματος να περιλαμβάνονται μέσα σε μια περιοχή γύρω από την ακριβή τιμή του φυσικού μεγέθους. Όσο στενώτερη είναι αυτή η περιοχή, τόσο ακριβέστερος είναι ο προσδιορισμός της τιμής του μετρούμενου μεγέθους.

Από τα πάρα πάνω γίνεται φανερό ότι στο αποτέλεσμα μιας μέτρησης

$$x_b \pm \delta x$$

η ποσότητα δx αφορά τα τυχαία σφάλματα που κάνουν την τιμή του μετρούμενου μεγέθους να αποκλίνει, άλλοτε προς μεγαλύτερες και ‘αλλοτε προς μικρότερες τιμές.

Εδώ θα πρέπει να τονιστεί η διαφορά ανάμεσα στην έννοια της «ορθότητας» και της «ακρίβειας» που χαρακτηρίζει την τιμή ενός φυσικού μεγέθους. Με τον όρο «ορθότητα» (accuracy) εννοούμε πόσο πλησίον της «πραγματικής» τιμής του φυσικού μεγέθους βρίσκεται η πειραματικά προσδιορισμένη τιμή του. Ο όρος «ακρίβεια» (precision) αναφέρεται στο πόσο κοντινές προκύπτουν οι τιμές ενός φυσικού μεγέθους που προκύπτουν μετά από επανάληψη των μετρήσεων κάτω από τις ίδιες συνθήκες, ανεξάρτητα αν αυτές βαρύνονται ή όχι με συστηματικά σφάλματα.

Ένα πειραματικό αποτέλεσμα ονομάζεται <u>ορθό</u> (correct, accurate), όταν είναι απαλλαγμένο από συσυηματικά σφάλματα, ενώ όταν ένα πειραματικό αποτέλεσμα, το οποίο δεν βαρύνεται με τυχαία σφάλματα (πράγμα αδύνατον) ονμάζεται ακριβές (exact, precise).

1.7 Μετάδοση σφάλματος (error propagation)

Οι τιμές των περισσοτέρων φυσικών ποσοτήτων δεν μετρούνται άμεσα, αλλά έμμεσα, δηλαδή μετρούνται δύο ή περισσότερα μεγέθη και κατόπιν από αυτά υπολογίζει την ποσότητα που θέλει, εφαρμόζοντας κάποια μαθηματική σχέση. Π.χ. η επιφάνεια A ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι ίση με το γινόμενο των μηκών των δύο πλευρών l και h, τα οποία μετρούνται άμεσα, δηλαδή $A = l.h$. Είναι φανερό ότι οι άμεσα μετρούμενες ποσότητες l και h προσδιορίζονται με κάποια αβεβαιότητα και αυτό έχει σαν αποτέλεσμα η τιμή A να βαρύνεται και αυτή με αβεβαιότητα. Σε αυτήν την παράγραφο θα ασχοληθούμε με την «μετάδοση» του σφάλματος από τα άμεσα μετρούμενα μεγέθη στο τελικό αποτέλεσμα.

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το μέγεθος g, για το οποίο ισχύει

$$g = x + y$$

Έστω ότι έχουμε προσδιορίσει πειραματικά τα x και y, δηλαδή έχουμε

$$x = x_b + \delta x \quad \text{και} \quad y = y_b + \delta y$$

και θέλουμε να προσδιορίσουμε τις τιμές g_b και δg από τις τιμές x_b, y_b, δx και δy.

Είναι φανερό ότι, η μεγαλύτερη πιθανή τιμή του μεγέθους g θα είναι

$$x_b + y_b + (\delta x + \delta y)$$

ενώ η μικρότερη πιθανή τιμή του ιδίου μεγέθους θα είναι

$$x_b + y_b - (\delta x + \delta y)$$

Επόμένως, είναι λογικό να θεωρήσουμε σαν την πιο αξιόπιστη τιμή του g την «κεντρική» τιμή

$$g_b = x_b + y_b \tag{1.7.1}$$

ενώ η αβεβαιότητα που την βαρύμει θα είναι

$$\delta g = \delta x + \delta y \tag{1.7.2}$$

Με τον ίδιο τρόπο καταλήγουμε εύκολα στο συμπέρασμα, ότι και στην περίπτωση διαφοράς θα ισχύει

$$g_b = x_b - y_b$$

ενώ η αβεβαιότητα θα είναι

$$\delta g = \delta x + \delta y$$

Για να συμπέσει όμως η τιμή του g με τη μεγίστη πιθανή τιμή $x_b + y_b + (\delta x + \delta y)$ θα πρέπει να έχουμε υπερεκτιμήσει τόσο το x, όσο και το y κατά τα μέγιστα επιτρεπόμενα ποσά δx και δy αντίστοιχα. Αυτό όμως είναι απίθανο να συμβεί. Αν τα μεγάθη x και y μετρούνται ανεξάρτητα το ένα από το άλλο και τα σφάλματα δx και δy είναι τυχαία, υπάρχει πιθανότητα 50% μια υποτίμηση του x να συνοδεύεται από υπερεκτίμηση του y και αντίστροφα. Έτσι, η πιθανότητα να υποτιμήσουμε ή να υπερεκτιμήσουμε ταυτόχρονα, τόσο το x, όσο και το y, είναι πολύ μικρή και η τιμή $\delta g = \delta x + \delta y$ ξεπερνά το πιθανό σφάλμα που είναι δυνατό να κάνουμε.

Πώς μπορούμε να προσδιορίσουμε μια καλύτερη τιμή του σφάλματος δg; Για να απαντήσουμε θα πρέπει να γνωρίζουμε τα εξής:

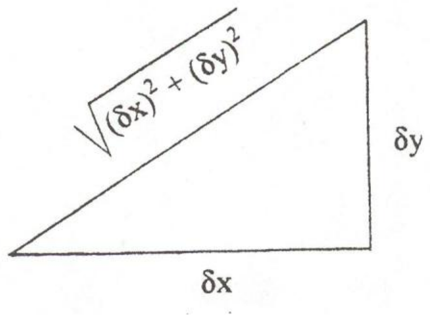
α) Πόση είναι η πιθανότητα να βρίσκεται μια τιμή του g μεταξύ $g_b - \delta g$ και $g_b + \delta g$

β) Ποιοί είναι οι νόμοι της Στατιστικής που διέπουν τα σφάλματα των μετρήσεών μας;

Τα τυχαία σφάλματα, στο μέτρο που το πλήθος των πηγών τους είναι μεγάλο και η κάθεμια από αυτές υπεισάγει μικρό σφάλμα, ακολουθούν τον κανονική κατανομή (κατανομή Gauss, normal distribution). Σε αυτήν την περίπτωση το σφάλμα του αθροίσματος $g = x + y$ δίνεται από την σχέση

$$\delta g = \sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2} \qquad (1.7.3)$$

Πρέπει εδώ να παρατηρήσουμε ότι η ποσότητα αυτή είναι πάντοτε μικρότερη από την $\delta g = \delta x + \delta y$, όπως φαίνεται εύκολα από την γεωμετρική κατασκευή του Σχήματος 1.7.1. Επειδή το άθροισμα των δύο πλευρών ενός τριγώνου είναι πάντοτε μεγαλύτερο από την τρίτη πλευρά, έπεται ότι $\sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2} < \delta x + \delta y$.



Σχήμα 1.7.1

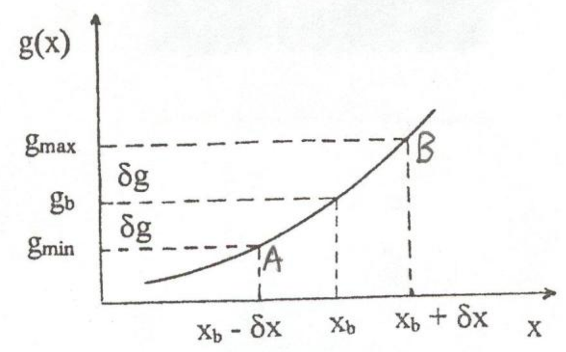
Από τα πάρα πάνω προκύπτει ότι η τιμή $\delta g = \sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2}$ του σφάλματος είναι ρεαλιστικότερη από ό,τι η $\delta g = \delta x + \delta y$ με την προϋπόθεση ότι τα μεγέθη x και y έχουν μετρηθεί ανεξάρτητα το ένα από το άλλο και τα δx και δy είναι τυχαία. Αν αυτά δεν ισχύουν, τότε παύει να ισχύει και ο πάρα πάνω κανόνας.

Αποδεικνύεται ότι η αβεβαιότητα (σφάλμα) της ποσότητας $g = x + y$ δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από την $\delta x + \delta y$, είτε τα δx και δy είναι ανεξάρτητα και τυχαία είτε όχι, δηλαδή ισχύει

$$\delta g \le \delta x + \delta y \qquad (1.7.4)$$

Μέχρι τώρα είδαμε, πώς οι αβεβαιότητες μεταδίδονται στις περιπτώσεις αθροίσματος και διαφοράς. Θα δούμε πάρα πάνω πώς τα σφάλματα μεταδίδονται, όταν έχουμε οποιαδήποτε συνάρτηση μιας ανεξάρτητης μεταβλητής π.χ. γινόμενο, πηλίκο, δυνάμεις, ρίζες κλπ., ή μια συνάρτηση περισσοτέρων της μιας ανεξαρτήτων μεταβλητών.

Έστω ότι έχουμε μετρήσει το μέγεθος x και έχουμε βρει $x = x_b \pm \delta x$ και θέλουμε να προσδιορίσουμε την πιό αξιόπιστη τιμή g_b μιας γνωστής συνάρτησης $g(x)$ και την αντίστοιχη αβεβαιότητα δg. Στο Σχήμα 1.7.2 φαίνεται η γραφική παράσταση της $g(x)$. (Δεχόμαστε ότι η συνάρτηση $g(x)$ έχει «καλή συμπεριφορά» (well – behaved function) γύρω από την x_b, δηλαδή δεν έχει ασυνέχειες).



Σχήμα 1.7.2

Από το πάρα πάνω σχήμα παρατηρούμε ότι η αβεβαιότητα που βαρύνει την τιμη x_b και ορίζει ένα διάστημα τιμών εύρους δx εκατέρωθεν αυτής, έχει σαν συνέπεια το φυσικό μέγεθος g να παίρνει τιμές στο διάστημα από g_{min} μέχρι g_{max}. Αν θεωρήσουμε ότι η καμπύλη μεταξύ των σημείων Α και Β προσεγγίζεται ικανοποιητικά από ένα ευθύγραμο τμήμα, τότε τα g_{max} και g_{min} απέχουν εξίσου από την τιμή $g_b = g(x_b)$. Έτσι, μπορούμε να δεχτούμε ότι το μέγεθος g θα παίρνει τιμές στο διάστημα από g_{min} μέχρι g_{max}, του οποίου η κεντρική τιμή είναι η $g_b = g(x_b)$. Μέχρι τώρα έχουμε προσδιορίσει την πιό αξιόπιστη τιμή του μεγέθους g. Ας δούμε τώρα πώς υπολογίζεται η ποσότητα δg που φαίνεται στο Σχήμα 1.7.2 και αποτελεί μέτρο του σφάλματος της g.

Ισχύει

$$\frac{\delta g}{\delta x} = \frac{g(x_b + \delta x) - g(x_b)}{\delta x} \approx \lim(\delta i \to 0)\frac{g(x_b + \delta x) - g(x_b)}{\delta x} = \frac{dg}{dx}$$

Επομένως, στο μέτρο που το σφάλμα δx είναι πολύ μικρό, ούτως ώστε το καμπύλο τμήμα ΑΒ να προσεγγίζεται ιακνοποιητικά από ένα ευθύγραμμο τμήμα, θα έχουμε

$$\delta g = \frac{dg}{dx}\delta x$$

Αν η κλίση της καμπύλης είναι αρνητική, θα προέκυπτε

$$\delta g = -\frac{dg}{dx}\delta x$$

Βλέπουμε επομένως, ότι, αν η ποσότητα x μετρείται με αβεβαιότα δx, τότε η αντίστοιχη τιμή της συνάρτησης g(x) προσδιορίζεται με αβεβαιότητα

$$\delta g = \left|\frac{dg}{dx}\right|\delta x \qquad (1.7.5)$$

Από την Εξ. (1.7.5) παρατηρούμε ότι η αβεβαιότητα δg δεν εξαρτάται μόνο από το σφάλμα δx, αλλά και από το πόσο μεταβάλλεται η τιμή της συνάρτησης g για μεταβολή της x κατά dx γύρω από την x_b, ποσότητα που δίνεται από την παράγωγο dg/dx για $x = x_b$.

Έστω ότι έχουμε μια συνάρτηση g(x,y) δύο ανεξάρτητων μεταβλητών x και y. Θεωρούμε ότι έχουμε προσδιορίσει τις τιμές x_b, y_b, δx και δy και θέλουμε να προσδιορίσουμε την g_b και την αβεβαιότητα δg που την βαρύνει. Σε αναλογία με τα προηγούμενα, η πιο αξιόπιστη τιμή της g θα είναι η $g(x_b,y_b)$, ενώ η δg θα είναι

$$\delta g = \left|\frac{\partial g}{\partial x}\right|\delta x + \left|\frac{\partial g}{\partial y}\right|\delta y \qquad (1.7.6)$$

Επί πλέον, αν τα μεγέθη x και y έχουν μετρηθεί ανεξάρτητα το ένα από το άλλο και τα σφάλματα δx και δy είναι τυχαία, το άθροισμα της τελευταίας σχέσης είναι καύτερο να νατικατασταθεί από την τετραγωνική ρίζα του αθροίσματος των τετραγώνων, δηλαδή

$$\delta g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\delta y\right)^2} \qquad (1.7.7)$$

Η Εξ. (1.7.6) δίνει την μέγιστη τιμή αβεβαιότητας της g και ονομάζεται «οριακό σφάλμα» αυτής. Οι Εξ. (1.7.6) και (1.7.7) επεκτείνονται και για περισσότερες των δύο ανεξαρτήτων μεταβλητών.