Ως **πρώτο βήμα** διακρίνουμε την μορφή που έχει το ορισμένο πραγματικό ολοκλήρωμα. Π.χ.

1. $I = \int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta$

Εδώ θέτουμε $z = e^{i\theta}$ και ζητάμε να είναι αναλυτική η f(z) στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου $|z| = 1$ ...

2. $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$

Εδώ θέτουμε $x = z$ εφόσον ισχύουν το Θεώρημα 1, η Πρόταση 1 ή διαφορετικά η Παρατήρηση 2 (σχέση (6.30))…

3. $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin\alpha x\, dx$, $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos\alpha x\, dx$ με α>0.

Εδώ η f(x) γίνεται f(z) εφόσον ισχύει το λήμμα του Jordan ή η Παρατήρηση 1 (σχέση (6.32)), το Θεώρημα 2 …

Ως **δεύτερο βήμα** βρίσκουμε τους πόλους και την τάξη του πόλου.

Θυμίζουμε ότι μπορεί να γίνει παραγοντοποίηση των πολυωνύμων (μιγαδικών).

Έστω το ολοκλήρωμα $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx$

Θεωρούμε την αντίστοιχη μιγαδική συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{z^4 + 1}$ η οποία έχει σαν ανώμαλα σημεία τις ρίζες του παρονομαστή που είναι πόλοι $1^{ης}$ τάξης. Οι ρίζες είναι οι $4^{ης}$ τάξης ρίζες του -1. Ο μιγαδικός αριθμός z=-1 έχει μέτρο r=1 και όρισμα θ=π. Από τον τύπο του Euler $z = re^{i\theta}$ και από τον τύπο $\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{r} e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{4}\right)}$ $k = 0,1,2,3$, έχουμε:

$$\sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{1}\, e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{4}\right)} = 1e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{4}\right)} \quad k = 0,1,2,3$$

Συγκεκριμένα:

$$k=0 \qquad z_0=\sqrt[4]{1}\,e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]=\left[\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$k=1 \qquad z_1=\sqrt[4]{1}\,e^{i\left(\frac{\pi+2\pi}{4}\right)}=\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]=\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$k=2 \qquad z_2=\sqrt[4]{1}\,e^{i\left(\frac{\pi+4\pi}{4}\right)}=\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right]=\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$k=3 \qquad z_3=\sqrt[4]{1}\,e^{i\left(\frac{\pi+6\pi}{4}\right)}=\left[\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right]=\left[\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

Από τους πόλους αυτούς μόνο οι z_0, z_1 βρίσκονται στο άνω ημιεπίπεδο.

Όμοια δουλεύεται για το ολοκλήρωμα $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2}{x^4+16}dx$

Έστω η μιγαδική συνάρτηση $f(z)=\frac{z}{\left(z^2+4z+13\right)^2}$.

Οι πόλοι της είναι είναι $z_1=-2+3i,\ z_2=-2-3i$ <u>πολλαπλότητας δυο</u>. Δηλαδή γίνεται παραγοντοποίηση στο πολυώνυμο $z^2+4z+13$ βρίσκοντας τις ρίζες του και γράφοντας αυτό ως $(z-z_1)(z-z_2)$, ο παρονομαστής γράφεται ως $\left((z-z_1)(z-z_2)\right)^2=(z-z_1)^2(z-z_2)^2$.

Μόνο ο z_1 βρίσκεται στο άνω ημιεπίπεδο.