ΣΕΙΡΕΣ FOURIER

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η εμπειρία μας δείχνει ότι πολλές φορές η φύση αντιδρά είτε ρυθμικά είτε άρρυθμα όταν της προκαλούμε κάποια διαταραχή. Στην πρώτη περίπτωση η αντίδραση εκδηλώνεται σ' ορισμένες συχνότητες, ενώ στη δεύτερη περίπτωση σ' όλες σχεδόν τις συχνότητες με κάποια ίσως προτίμηση σε μερικές από αυτές.

Η μελέτη των φαινομένων αυτών οδηγεί στις σειρές και στα ολοκληρώματα Fourier. Οι σειρές Fourier χρησιμοποιήθηκαν από τον Γάλλο μαθηματικό Fourier στις αρχές του 19^{ου} αιώνα στην προσπάθεια του να μελετήσει την διάδοση της θερμότητας. Από τότε οι σειρές Fourier και οι γενικεύσεις τους σε ολοκληρώματα Fourier και σειρές ορθογωνίων συναρτήσεων θεωρούνται απαραίτητες γνώσεις για φυσικούς, μηχανικούς και μαθηματικούς, τόσο στα θεωρητικά προβλήματα όσο και στις εφαρμογές.

1. Ορισμός της Σειράς Fourier

Η πιο βασική ιδιότητα της ημιτονοειδούς συναρτήσεως $\sin(\omega x+\varphi)$ είναι η περιοδικότητά της. Συγκεκριμένα η περίοδος της παραπάνω συναρτήσεως είναι $T=2\pi/\omega$. Γεννάται τώρα το ερώτημα: *Είναι δυνατό μια περιοδική συνάρτηση f(x) να γραφεί σαν άθροισμα τέτοιων στοιχειωδών περιοδικών συναρτήσεων*; Η απάντηση είναι καταφατική, δόθηκε από τον Fourier, απεδείχθη από τον Dirichlet, (με την προϋπόθεση ότι ισχύουν κάποιες γενικές συνθήκες, που θα αναφερθούν παρακάτω), και είναι η εξής:

$$f(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\sin\left(n\omega x-\varphi_n\right)$$

Κάθε όρος αυτής της σειράς είναι περιοδικός με περίοδο $2\pi/\omega$ εφ' όσον η μικρότερη περίοδος του $\sin(n\omega x-\varphi_n)$ είναι $2\pi/\omega n$. Επομένως το άθροισμα είναι επίσης περιοδική με περίοδο $2\pi/\omega$.

Ένας άλλος λόγος που επιθυμούμε να αναπτύξουμε μια περιοδική συνάρτηση σε σειρά Fourier είναι ότι υπάρχουν πολλά προβλήματα συνοριακών τιμών για τα οποία είμαστε αναγκασμένοι να αναπτύξουμε μια λύση σε τριγωνομετρική σειρά. Εδώ λοιπόν θα ασχοληθούμε με την ανάλυση μιας περιοδικής συνάρτησης f(x) σε σειρά της οποίας οι όροι είναι οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις ημιτόνου και συνημιτόνου. Να έχει δηλαδή την μορφή

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\alpha_n\cos(A_n x)+\beta_n\sin(B_n x)\right] \tag{1}$$

Από την μορφή της σχέσης (1) είναι προφανές ότι η συνάρτηση f(x) πρέπει να είναι περιοδική. Θεωρούμε επομένως μια συνάρτηση f(x) η οποία ορίζεται σ' ένα διάστημα (-L, L) και υποθέτουμε ότι έξω από το διάστημα αυτό ορίζεται από τη σχέση f(x)=f(x+2L). Για να ισχύει η σχέση αυτή για κάθε *x* πρέπει

$$\cos(A_n x)=\cos\left[A_n(x+2L)\right] \quad \text{και} \quad \sin(B_n x)=\sin\left[B_n(x+2L)\right]$$

Από αυτές προκύπτει ότι

$$A_n x+A_n 2L=2n\pi+A_n x \Rightarrow A_n=\frac{n\pi}{L} \quad \text{και} \quad B_n x+B_n 2L=2n\pi+B_n x \Rightarrow B_n=\frac{n\pi}{L}$$

επομένως την (1) μπορούμε να την γράψουμε

$$f(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\alpha_n\cos\frac{n\pi x}{L}+\beta_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right] \tag{2}$$

τον σταθερό όρο τον διαιρέσαμε με το 2 για λόγους ομοιομορφίας των τύπων που θα προκύψουν παρακάτω.

Η μορφή (2) της f(x), αν υπάρχει, ονομάζεται ***σειρά Fourier*** της f(x).

1.1 Προσδιορισμός των α_n, β_n, α_0

Αν υποθέσουμε ότι η σειρά (2) συγκλίνει ομοιόμορφα, τότε ο σταθερός όρος α_0 προσδιορίζεται από την ολοκλήρωση ως προς x της (2) στο διάστημα (-L, L), έτσι έχουμε

$$\int_{-L}^{L}f(x)dx=\frac{\alpha_0}{2}\int_{-L}^{L}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\alpha_n\int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx+\beta_n\int_{-L}^{L}\sin\frac{n\pi x}{L}dx\right]\Rightarrow\int_{-L}^{L}f(x)dx=\alpha_0 L \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\alpha_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)dx} \tag{3}$$

Έτσι ο σταθερός όρος $\alpha_0/2$ ισούται με την μέση τιμή της f(x) στο διάστημα μιας περιόδου .

Οι συντελεστές α_n προσδιορίζονται αν πολλαπλασιάσουμε την (2) με $\cos\frac{m\pi x}{L}$ (m=1,2,...) και στην συνέχεια ολοκληρώσουμε στο διάστημα (-L, L)

$$\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}f(x)dx=\frac{\alpha_0}{2}\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}dx+$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\alpha_n\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx+\beta_n\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}dx\right]\Rightarrow$$

$$\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}f(x)dx=\frac{\alpha_0}{2}0+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{2}\int_{-L}^{L}\left(\cos\frac{(n+m)\pi x}{L}+\cos\frac{(n-m)\pi x}{L}\right)dx+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n}{2}\int_{-L}^{L}\left(\sin\frac{(n+m)\pi x}{L}+\sin\frac{(n-m)\pi x}{L}\right)dx$$

Τα ολοκληρώματα της δεύτερης σειράς είναι όλα μηδέν για κάθε m και n. Επίσης αν $m\neq n$ τα ολοκληρώματα της πρώτης σειράς είναι μηδέν. Όταν m=n η ανωτέρω σχέση γράφεται

$$\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx=\frac{\alpha_n}{2}2L$$

από την οποία οι συντελεστές α_n

$$\boxed{\alpha_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx} \qquad (4)$$

Τέλος αν πολλαπλασιάσουμε την (2) με $\sin\frac{m\pi x}{L}$ $(m=1,2,\cdots)$ και ολοκληρώσουμε ως προς x στο (-L, L) λαμβάνουμε, ακολουθώντας αντίστοιχη πορεία ότι

$$\boxed{\beta_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx} \qquad (5)$$

Οι σχέσεις (4) και (5) μπορούν να γραφούν σε μια σχέση:

$$\begin{pmatrix}\alpha_n\\ \beta_n\end{pmatrix}=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\begin{pmatrix}\cos\frac{n\pi x}{L}\\ \sin\frac{n\pi x}{L}\end{pmatrix}dx$$

Στην περίπτωση όπου το αρχικό διάστημα ορισμού της f(x) είναι της μορφής (x_0, x_0+2L) . Τότε οι συντελεστές της σειράς Fourier δίνονται από τις σχέσεις

$$\boxed{\begin{aligned}\alpha_0&=\frac{1}{L}\int_{x_0}^{x_0+2L} f(x)dx\\ \alpha_n&=\frac{1}{L}\int_{x_0}^{x_0+2L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx\\ \beta_n&=\frac{1}{L}\int_{x_0}^{x_0+2L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\end{aligned}} \tag{6}$$

Πράγματι,

$$\int_{x_0}^{x_0+2L} f(x)dx=\int_{x_0}^{-L} f(x)dx+\int_{-L}^{L} f(x)dx+\int_{L}^{x_0+2L} f(x)dx \tag{7}$$

Στο τελευταίο ολοκλήρωμα της σχέσης αυτής θέτουμε x=y+2L και λόγω της ισότητας f(x)=f(x+2L) έχουμε

$$\int_{L}^{x_0+2L} f(x)dx=\int_{-L}^{x_o} f(y+2L)dy=\int_{-L}^{x_0} f(y)dy$$

Επομένως η (7) γράφεται

$$\int_{x_0}^{x_0+2L} f(x)dx=\int_{x_0}^{-L} f(x)dx+\int_{-L}^{L} f(x)dx+\int_{-L}^{x_0} f(x)dx=\int_{-L}^{L} f(x)dx=L\alpha_0$$

και έτσι $$\alpha_0=\frac{1}{L}\int_{x_0}^{x_0+2L} f(x)dx\,.$$

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύουμε και τις υπόλοιπες δύο σχέσεις.

1.2 Ικανές συνθήκες για ανάπτυξη μιας συνάρτησης σε σειρά Fourier

Αν f(x) μία συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα (-L, L) και υπάρχουν τα ολοκληρώματα (3), (4) και (5) το ερώτημα που προκύπτει είναι: συγκλίνει ή όχι η σειρά (2) και αν συγκλίνει πιο είναι το άθροισμά της;

Την απάντηση στο ερώτημα αυτό μας δίνει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 1.1 (Dirichlet) Υποθέτουμε ότι

α) Η συνάρτηση f(x) ορίζεται και είναι μονότιμη στο διάστημα (-L, L) εκτός ίσως από πεπερασμένο πλήθος σημείων αυτού.

β) Η f(x) ορίζεται εκτός του διαστήματος (-L, L) έτσι ώστε να είναι περιοδική με περίοδο 2L δηλαδή f(x)=f(x+2L).

γ) Οι συναρτήσεις f(x) και f′(x) είναι κατά τμήματα συνεχείς[1] επί του (-L, L).

Τότε το άθροισμα της σειράς

$$\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\alpha_n\cos\frac{n\pi x}{L}+\beta_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right]$$

είναι

1ον η συνάρτηση f(x) αν το $x\in(-L, L)$ είναι σημείο συνέχειας της f(x).

2ον $\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)+\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)}{2}$ αν το x_0 είναι σημείο ασυνέχειας.

3ον $\dfrac{\lim\limits_{x\to -L^+} f(x)+\lim\limits_{x\to L^-} f(x)}{2}$ στα άκρα του διαστήματος (-L, L).

Παρατήρηση 1: Οι συνθήκες του Dirichlet είναι ικανές αλλά όχι και αναγκαίες, δηλαδή εάν οι συνθήκες ικανοποιούνται, τότε έχουμε σύγκλιση. Εάν όμως δεν ικανοποιούνται, τότε η σειρά μπορεί να συγκλίνει, αλλά μπορεί και να αποκλίνει. Μέχρι σήμερα δεν υπάρχουν ικανές και αναγκαίες συνθήκες για την σύγκλιση των σειρών Fourier. Μόνο η συνέχεια της f(x) δεν αρκεί για να συμπεράνουμε ότι η αντίστοιχη σειρά Fourier συγκλίνει.

---

[1] *Μια συνάρτηση* f(x) *λέγεται συνεχής κατά τμήματα στο διάστημα* $[a,b]$ *αν το διάστημα αυτό μπορεί να διαιρεθεί σε πεπερασμένο αριθμό υποδιαστημάτων όπου η εν λόγω συνάρτηση είναι συνεχής ενώ στα άκρα των υποδιαστημάτων αυτών έχει πεπερασμένη τιμή.*

Παράδειγμα 1. Να βρεθεί η σειρά Fourier της συνάρτησης $f(x)=x$, $-\pi<x<\pi$

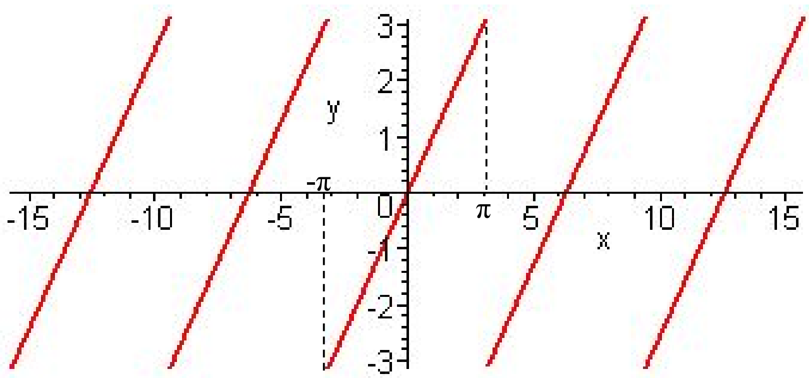
<u>Λύση</u>: Οι συνθήκες Dirichlet ισχύουν διότι

i) Η συνάρτηση $f(x)$ ορίζεται για κάθε $x\in(-\pi, \pi)$

ii) Εκτός του ανωτέρω διαστήματος ορίζουμε την $f(x)$ έτσι ώστε

$$f(x)=f(x+2L)=f(x+2\pi).$$

Δηλαδή η $f(x)$ έχει την κάτωθι γραφική παράσταση



iii) Η $f(x)$ και η $f'(x)$ είναι συνεχείς στο $(-\pi, \pi)$.

Οι τύποι του Fourier δίνουν:

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = 0$$

Για n>1 ολοκληρώνοντας κατά παράγοντας παίρνουμε:

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}x\frac{\sin x}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)dx = 0$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)dx = -\frac{1}{\pi}x\frac{\cos(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)dx =$$

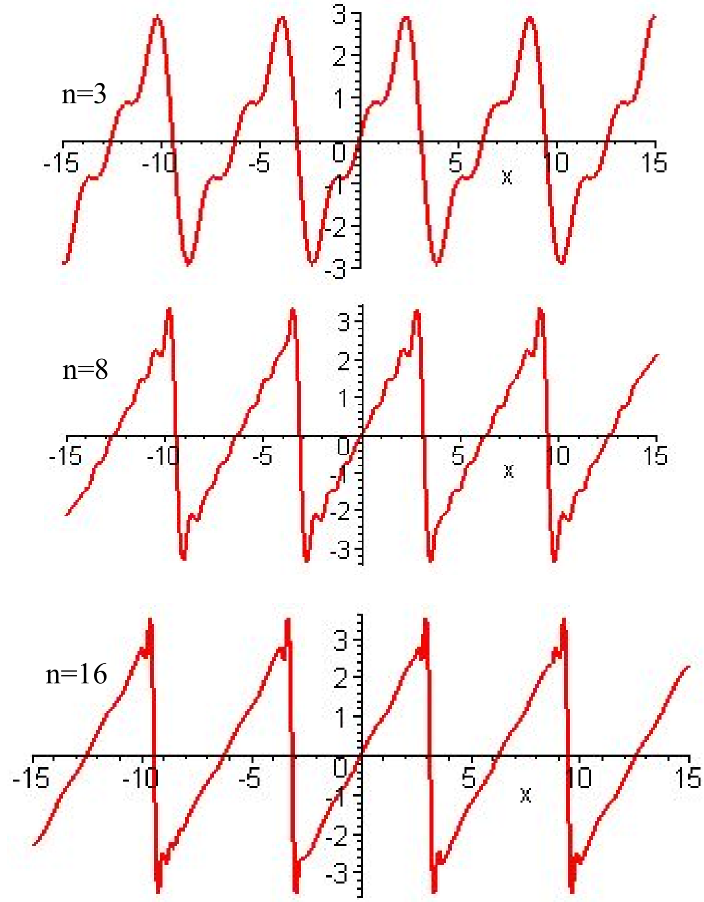
$$= -\frac{2}{n}\cos(n\pi) = \left(-\frac{2}{n}\right)(-1)^n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

Επομένως στο διάστημα $-\pi<x<\pi$, το ανάπτυγμα Fourier είναι:

$$f(x) = -2\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x) - \frac{1}{4}\sin(4x) + \cdots\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin(nx) \quad \text{(A)}$$

Εκτός του διαστήματος $(-\pi, \pi)$ η (A) αποτελεί τη σειρά Fourier της περιοδικής επέκτασης, (με περίοδο 2π), της $f(x)$, όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

Στη συνέχεια παραθέτουμε τις γραφικές παραστάσεις της αντίστοιχης σειράς Fourier για n=3, 8, 16:



Από τα παραπάνω σχήματα παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται το n τόσο η προσέγγιση της f(x) από τα μερικά αθροίσματα της αντίστοιχης σειράς Fourier γίνεται καλύτερη. Όμως και για αρκετά μεγάλες τιμές του n, κοντά στα σημεία ασυνέχειας, (στην περίπτωση εδώ τα σημεία ασυνεχείας είναι τα άκρα του διαστήματος (-π, π)), παρατηρούνται σημαντικές αποκλίσεις από την αντίστοιχη συνάρτηση f(x). Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **φαινόμενο του Gibbs**[2]

[2] Το ιστορικό του φαινομένου Gibbs έχει ως εξής: Ο Αμερικάνος φυσικός Michelson εφεύρε και κατασκεύασε πολλά φυσικά όργανα πολύ μεγάλης ακριβείας. Το 1898 κατασκεύασε ένα αρμονικό αναλυτή που μπορούσε να υπολογίζει τους πρώτους 80 όρους μιας σειράς Fourier. Η μηχανή αυτή μπορούσε επίσης να σχεδιάζει την γραφική παράσταση μιας συναρτήσεως από τους συντελεστές του αναπτύγματος Fourier. Έτσι μπορούσε να ελέγχει την σωστή λειτουργία της μηχανής συγκρίνοντας την συνάρτηση που κατασκεύαζε από τους συντελεστής της σειράς Fourier με την αρχική. Ο Michelson παρατήρησε τότε ότι στις περισσότερες περιπτώσεις η αρχική συνάρτηση και η κατασκευασμένη από τους συντελεστές Fourier συνέπιπταν με πολύ μεγάλη ακρίβεια.. Όταν όμως δοκίμαζε την μηχανή στην συνάρτηση που παριστάνει τον τετραγωνικό παλμό, η συνάρτηση που υπολόγιζε η μηχανή από τους συντελεστές Fourier, συνέπιπτε με τον τετραγωνικό παλμό εκτός από τα σημεία ασυνέχειας στα οποία η συνάρτηση της μηχανής παρουσίαζε μια διακύμανση που δεν την έχει η αρχική συνάρ-

και εξηγείται από το γεγονός ότι δεν μπορεί η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων, που είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις να συγκλίνουν στα σημεία ασυνέχειας της συνάρτησης f(x).

Παράδειγμα 2. Να βρεθεί η σειρά Fourier της συνάρτησης f(x)=|x|, στο διάστημα (-π, π).

Λύση: Εύκολα διαπιστώνουμε ότι οι συνθήκες του Dirichlet ικανοποιούνται. Για τους συντελεστές της σειράς έχουμε:

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\,dx = \pi$$

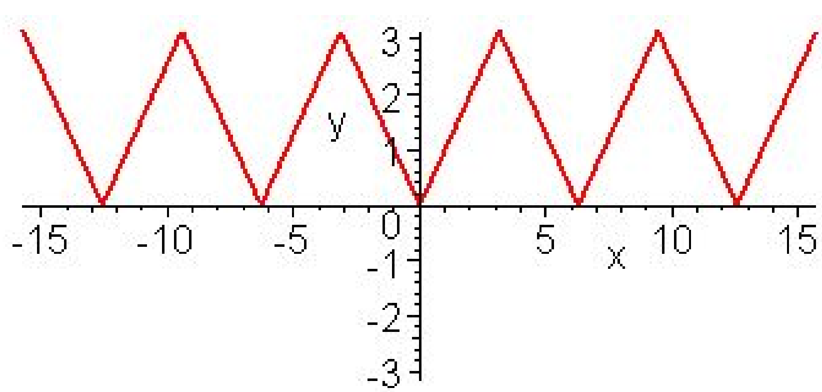
$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi n^2}\left[\cos(n\pi) + n\sin(n\pi) - 1\right] = \frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right]$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\sin(nx)\,dx = 0$$

Επομένως το ανάπτυγμα της f(x)=|x| στο διάστημα (-π, π) είναι:

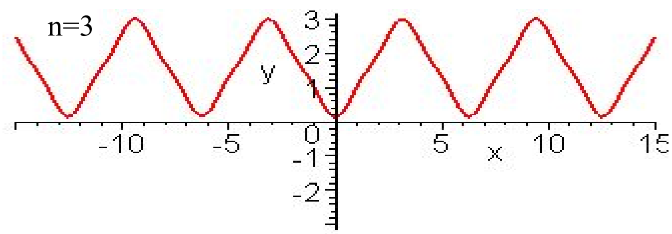
$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right]\cos(nx) \qquad \text{(B)}$$

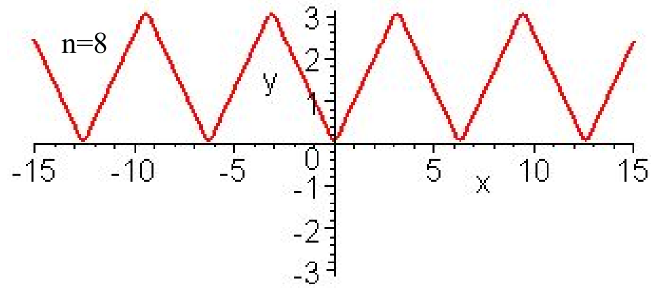
Εκτός του διαστήματος (-π, π) η (Β) αποτελεί τη σειρά Fourier της περιοδικής επέκτασης, (με περίοδο 2π), της f(x), όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



τηση. Έγραψε στον Gibbs ζητώντας την γνώμη του. Ο Gibbs έδωσε μια μαθηματική εξήγηση λέγοντας ότι δεν υπάρχει ομοιόμορφη σύγκλιση της σειράς Fourier στα σημεία ασυνέχειας.

Στη συνέχεια παραθέτουμε τις γραφικές παραστάσεις της αντίστοιχης σειράς Fourier για n=3,8:





Εδώ η προσέγγιση της σειράς Fourier προς την συνάρτηση f(x)=|x| είναι αρκετά ικανοποιητική και για μικρά n. Το φαινόμενο Gibbs δεν παρατηρείται.

Παράδειγμα 3: Να βρεθεί η σειρά Fourier η οποία αντιστοιχεί στη μη περιοδική συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} 2, & -2<x<0 \\ x, & 0<x<2 \end{cases} \qquad \text{στο διάστημα } (-2,2).$$

και να αποδειχθεί ότι $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

<u>Λύση:</u> Οι συνθήκες Dirichlet ισχύουν διότι

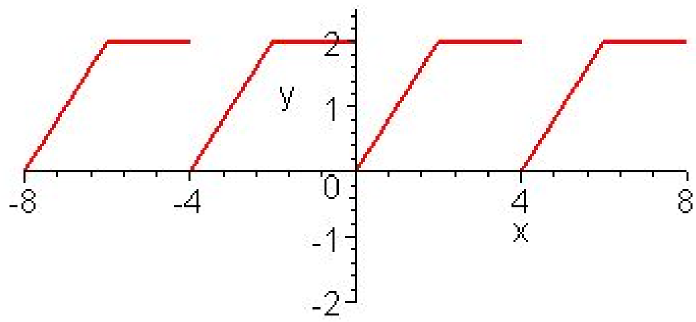
iv) Η συνάρτηση f(x) ορίζεται για κάθε $x\in(-2,0)\cup(0,2)$.

v) Εκτός του ανωτέρω διαστήματος ορίζουμε την f(x) έτσι ώστε

$$f(x)=f(x+2L)=f(x+4)$$

vi) Η f(x) και η f′(x) είναι συνεχείς στο $(-2,2)$ εκτός του σημείου $x_0=0$.

Δηλαδή η f(x) έχει την παρακάτω γραφική παράσταση:



Υπολογίζουμε τώρα τους συντελεστές α_0, α_n, και β_n

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} 2dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} xdx = 3.$$

$$\alpha_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} 2\cos\frac{n\pi x}{2}dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} x\cos\frac{n\pi x}{2}dx =$$

$$= \frac{-2}{n^2\pi^2}\left[1-(-1)^n\right], \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$\beta_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx = -\frac{2}{n\pi}, \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

Έτσι η σειρά $\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\alpha_n \cos\frac{n\pi x}{L} + \beta_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right]$ την οποία συμβολίζουμε με $\Phi(x)$ παίρνει τη μορφή

$$\Phi(x) = \frac{3}{2} - 2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2} + \frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right]$$

Σύμφωνα με το θεώρημα 1.1 το άθροισμα της ανωτέρω σειράς θα ισούται με την συνάρτηση f(x) για κάθε $x \in (-2, 0) \cup (0, 2)$. Για τα άκρα –2 και 2 του διαστήματος καθώς επίσης και για το σημείο ασυνέχειας $x_0=0$ το άθροισμα της σειράς είναι αντίστοιχα:

$$\frac{\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) + \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)}{2} = \frac{\lim\limits_{x\to -2^+} 2 + \lim\limits_{x\to 2^-} x}{2} = 2$$

και
$$\frac{\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)}{2} = \frac{\lim\limits_{x\to 0^+} x + \lim\limits_{x\to 0^-} 2}{2} = 1$$

Άρα

$$\Phi(x)=\begin{cases} 2 & \text{για} \quad x\in(-2,0) \\ x & \text{για} \quad x\in(0,2) \\ 1 & \text{για} \quad x=0 \\ 2 & \text{για} \quad x=-2,\ \ x=2 \end{cases} \qquad \text{και} \quad \Phi(x)=\Phi(x+4)$$

Επίσης από τη σχέση Φ(0) =1 προκύπτει ότι

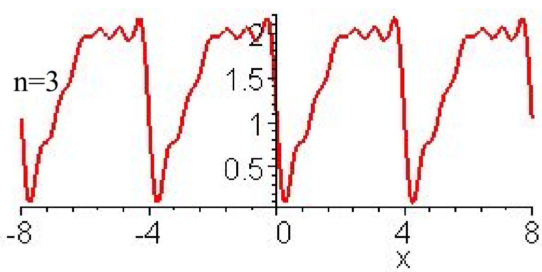
$$\frac{3}{2}-2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2}\right]=1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2}=\frac{1}{4}$$

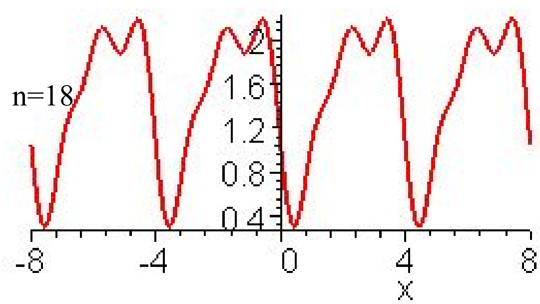
Οι όροι της τελευταίας σειράς που προέρχονται από τις άρτιες τιμές του *n* μηδενίζονται και παραμένουν μόνο αυτοί που προκύπτουν από την σχέση n=2k+1, (k=0, 1, 2, ···) έτσι βρίσκουμε ότι

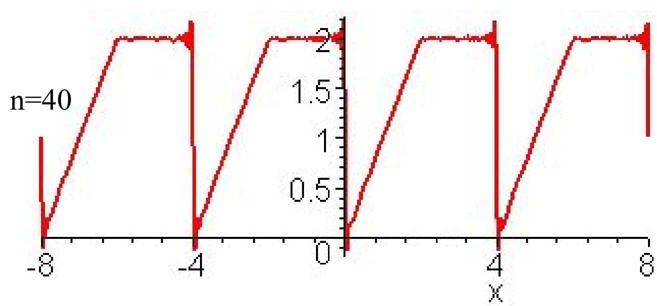
$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{4} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε αν θεωρήσουμε την σχέση Φ(2)=Φ(-2)=2.

Στη συνέχεια παραθέτουμε τις γραφικές παραστάσεις της αντίστοιχης σειράς Fourier για n=3, 18, 40:







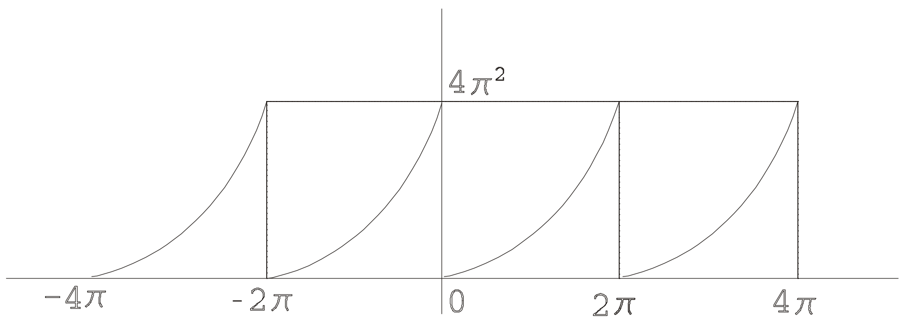
Παράδειγμα 4: Να αναπτυχθεί η συνάρτηση f(x)=x^2, $0\le x\le 2\pi$ σε σειρά Fourier, αν η περίοδος είναι 2π και να αποδειχθεί ότι $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

Λύση: Επειδή το διάστημα είναι της μορφής $[x_0, x_0+2L]$ και στην περίπτωσή μας η περίοδος είναι 2π θα έχουμε $2L=2\pi \Rightarrow L=\pi$.

Συνθήκες Dirichlet

i) Η συνάρτηση f(x) ορίζεται για κάθε $x\in[0, 2\pi]$ $x\in[0,2\pi]$

ii) Εκτός του διαστήματος ορίζουμε την f(x) έτσι ώστε f(x)=f(x+2L)=f(x+2π). Η γραφική της παράσταση είναι



Οι συναρτήσεις f(x) και f'(x) είναι συνεχείς $\forall x\in[0,2\pi]$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές α_0, α_n και β_n

$$\alpha_0=\frac{1}{L}\int_{x_0}^{x_0+2L} f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\,dx=\frac{8\pi^2}{3}$$

$$\alpha_n=\frac{1}{L}\int_{x_0}^{x_0+2L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\cos(nx)\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{n}\sin(nx)+\frac{2x}{n^2}\cos(nx)-\frac{2}{n^3}\sin(nx)\right]_0^{2\pi}=\frac{4}{n^2},\qquad (n=1,2,\cdots)$$

$$\beta_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\sin(nx)\,dx=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x^2}{n}\cos(nx)+\frac{2x}{n^2}\sin(nx)+\frac{2}{n^3}\cos(nx)\right]_0^{2\pi}=-\frac{4\pi}{n}$$

Επομένως η σειρά Fourier είναι

$$f(x)=x^2=\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{4}{n^2}\cos nx-\frac{4\pi}{n}\sin nx\right\}\quad \text{για κάθε } x\in(0, 2\pi)$$

Σημεία ασυνέχειας δεν υπάρχουν ενώ στα άκρα 0 και 2π το άθροισμα της σειράς θα είναι

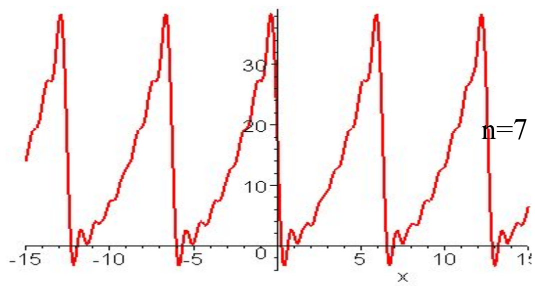
$$\frac{\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 + \lim\limits_{x\to 2\pi^-} x^2}{2} = \frac{0+4\pi^2}{2} = 2\pi^2$$

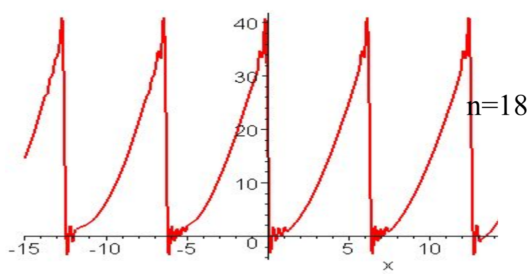
Επομένως για $x=0$ ή $x=2\pi$ έχουμε

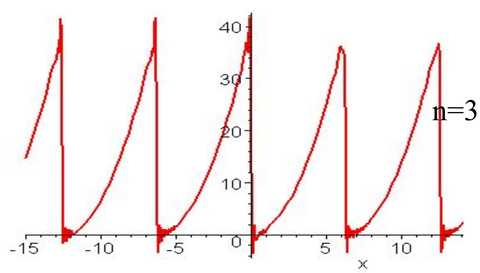
$$\frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{4}{n^2}\cos 0 - \frac{4\pi}{n}\sin 0\right\} = 2\pi^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2} = 2\pi^2$$

από την οποία προκύπτει ότι $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Στη συνέχεια παραθέτουμε τις γραφικές παραστάσεις της αντίστοιχης σειράς Fourier για n=3, 7, 18, 30:







Παρατήρηση: Ένα από τα πλεονεκτήματα της σειράς Fourier έναντι άλλων σειρών – αναπτυγμάτων, όπως το ανάπτυγμα Taylor, είναι ότι μπορεί να αναπαριστά και ασυνεχείς συναρτήσεις. Ενώ μια συνάρτηση f(x) για να έχει ανάπτυγμα Taylor πρέπει να είναι όχι μόνο συνεχής αλλά και απείρως διαφορίσιμη.

2. Ανάλυση Fourier για Άρτιες και Περιττές συναρτήσεις

Πρόταση 2.1: Αν η f(x) είναι άρτια: f(x)=f(-x) τότε $\int_{-L}^{L} f(x)dx = 2\int_{0}^{L} f(x)dx$

Απόδειξη:

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = \int_{-L}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{L} f(x)dx = -\int_{L}^{0} f(-x)dx + \int_{0}^{L} f(x)dx =$$
$$= \int_{0}^{L} f(x)dx + \int_{0}^{L} f(x)dx = 2\int_{0}^{L} f(x)dx$$

Πρόταση 2.2: Αν η f(x) είναι περιττή: f(x)=-f(-x) τότε $\int_{-L}^{L} f(x)dx = 0$

Απόδειξη:

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = \int_{-L}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{L} f(x)dx = \int_{0}^{L} f(-x)dx + \int_{0}^{L} f(x)dx =$$
$$= -\int_{0}^{L} f(x)dx + \int_{0}^{L} f(x)dx = 0$$

***Θεώρημα* 2.1 :** Η σειρά Fourier μιας άρτιας συνάρτησης έχει τη μορφή

$$f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos\frac{n\pi x}{L}$$

με $\alpha_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$, (n=0, 1, 2, ···)

Απόδειξη Επειδή η συνάρτηση f(x) είναι άρτια και η $\sin\frac{n\pi x}{L}$ περιττή το γινόμενό τους $f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}$ είναι περιττή συνάρτηση και σύμφωνα με την πρόταση 2.2 ο συντελεστής β_n θα ισούται με 0, δηλαδή .

$$\beta_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = 0 \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

Οι συντελεστές α_n λόγω της πρότασης 2.1 γράφονται

$$\alpha_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx, \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται το παρακάτω θεώρημα

***Θεώρημα* 2.2:** Η σειρά Fourier μιας περιττής συνάρτησης έχει τη μορφή

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

με $$\beta_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

Παράδειγμα 2.1: Να αναλυθεί σε σειρά Fourier η συνάρτηση

$f(x)=x^2$ με $-\pi \le x \le \pi$

Λύση: Οι συνθήκες Dirichlet ισχύουν και η συνάρτηση είναι άρτια στο $[-\pi, \pi]$.

$$\alpha_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx \quad \Rightarrow \quad \alpha_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$\alpha_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nx dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n}x^2\sin nx + \frac{2}{n^2}x\cos nx - \frac{2}{n^3}\sin nx\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\frac{2}{n^2}\pi\cos n\pi$$

$$\Rightarrow \qquad \alpha_n = \frac{4}{n^2}(-1)^n, \quad (n=1,2,\cdots)$$

Επειδή η συνάρτηση f(x) όταν επεκταθεί περιοδικά είναι συνεχής σ' όλο το Ρ, για κάθε x θα έχουμε

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx \, .$$

3. Σειρές ημιτόνων και συνιμητόνων.

Έστω $f(x)$ μια συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα $(0, L)$. Μπορούμε να αναπτύξουμε την συνάρτηση αυτή σε σειρά που περιέχει μόνο συνημίτονα ή ημίτονα ακολουθώντας την παρακάτω μέθοδο.

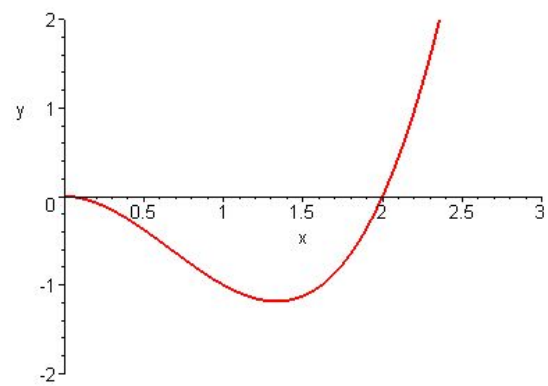
A. *Σειρά συνημιτόνων*

Ορίζουμε μία νέα συνάρτηση

$$F_1(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < L \\ f(-x), & -L < x < 0 \end{cases}$$

Επειδή η F_1 είναι άρτια συνάρτηση, αφού $F_1(x)=F_1(-x)$, την ονομάζουμε **άρτια επέκταση** της f(x) και την αναπτύσσουμε σε σειρά η οποία σύμφωνα με το θεώρημα 2.1 είναι μια σειρά συνημιτόνων.

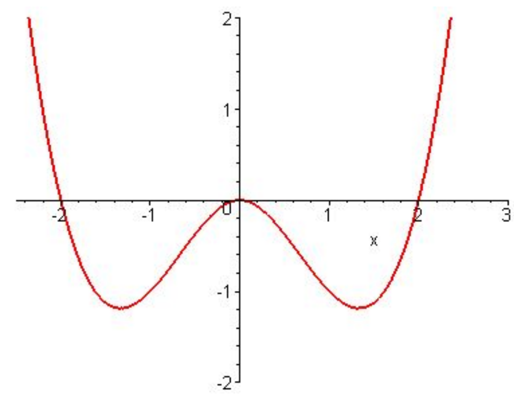
Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(x)=x^3-2x^2$, στο διάστημα (0, L)=(0, 2,5), η οποία δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή,. Το διπλανό σχήμα μας δίνει την γραφική της παράσταση:



Η άρτια επέκταση της ορίζεται από την σχέση:

$$F_1(x) = \begin{cases} f(x) = x^3 - 2x^2, & 0 < x < 2,5 \\ f(-x) = -x^3 - 2x^2, & -2,5 < x < 0 \end{cases}$$

της οποίας η γραφική παράσταση είναι:



Β. *Σειρά ημιτόνων*

Ορίζουμε τη συνάρτηση

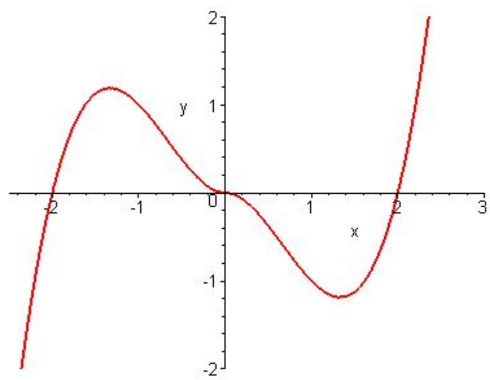
$$F_2(x)=\begin{cases} f(x) & 0<x<L \\ -f(-x) & -L<x<0 \end{cases}$$

Επειδή $F_2(x)=-F_2(-x)$ η συνάρτηση αυτή είναι περιττή και ονομάζεται **περιττή επέκταση** της f(x). Άρα η ανάλυση Fourier της F_2 θα είναι, (Θεώρημα 2.2), μια συνάρτηση ημιτόνων.

Εάν θεωρήσουμε την ίδια συνάρτηση $f(x)=x^3-2x^2$, όπως στην προηγούμενη περίπτωση, τότε η περιττή επέκταση της ορίζεται από την σχέση:

$$F_2(x)=\begin{cases} f(x)=x^3-2x^2 & 0<x<2,5 \\ -f(-x)=x^3+2x^2 & -2,5<x<0 \end{cases}$$

και η γραφική της παράσταση είναι:



Παράδειγμα 3.1:

Να αναλυθεί η συνάρτηση

$f(x)=x$ με $0\le x\le 2$,

α) σε σειρά ημιτόνων

β) σε σειρά συνημιτόνων

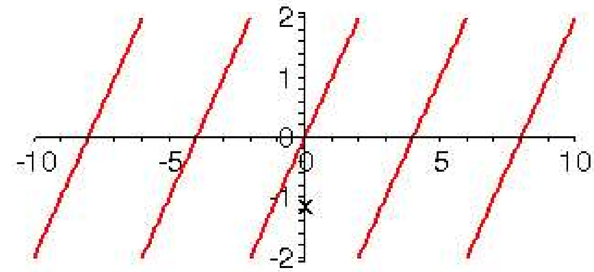
γ) σε σειρά Fourier

Λύση:

α) Κάνουμε περιττή επέκταση της f(x) δηλαδή ορίζουμε την συνάρτηση $F_1(x)$ ως εξής:

$$F_1(x)=\begin{cases} x, & 0<x<2 \\ -(-x) & -2<x<0 \end{cases} \quad \text{ή} \quad F_1(x)=x \text{ για } -2<x<2$$

της οποίας η γραφική παράσταση είναι:



Αναλύουμε σε σειρά Fourier τη νέα αυτή συνάρτηση.

Η περίοδος είναι T=2L=4 επομένως L=2 και επειδή είναι περιττή θα έχουμε

$$\alpha_n=0$$

και

$$\beta_n=\frac{2}{2}\int_0^2 F_1(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx=$$

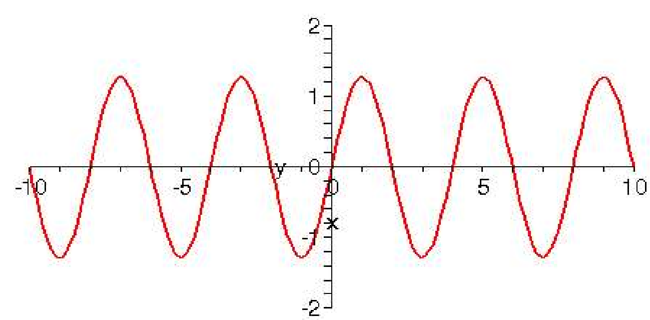
$$=\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\left[\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)-\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_0^2=\frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

Άρα $\forall x\in(0,2)$ έχουμε

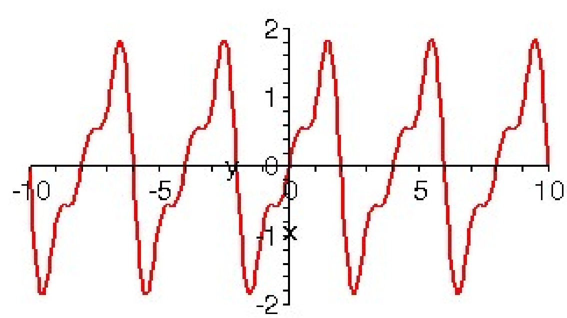
$$x=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}$$

Στη συνέχεια παραθέτουμε τις γραφικές παραστάσεις της αντίστοιχης σειράς Fourier

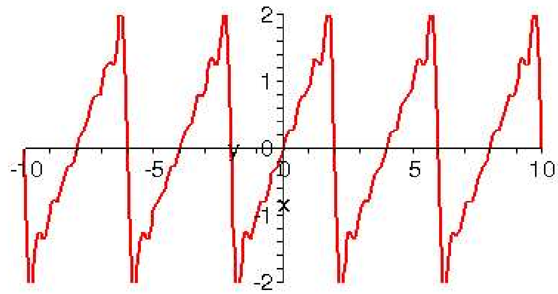
για n=1:



για n=3:

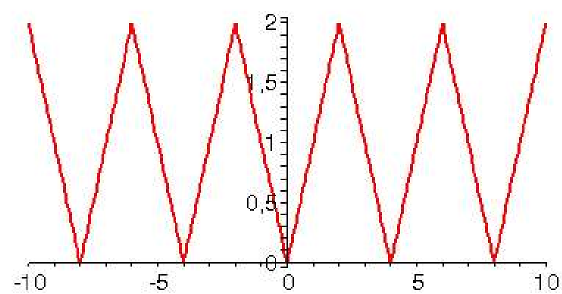


για n=7:



β) Για την άρτια επέκταση ορίζουμε την

$$F_2(x)=\begin{cases} x, & 0<x<2 \\ -x, & -2<x<0 \end{cases}$$



Εδώ επίσης L=2 και επειδή είναι άρτια θα έχουμε

$$\beta_n=0$$

$$\alpha_0=\frac{2}{2}\int_0^2 F_2(x)dx=\int_0^2 xdx=2$$

$$\alpha_n=\frac{2}{2}\int_0^2 F_2(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx=$$

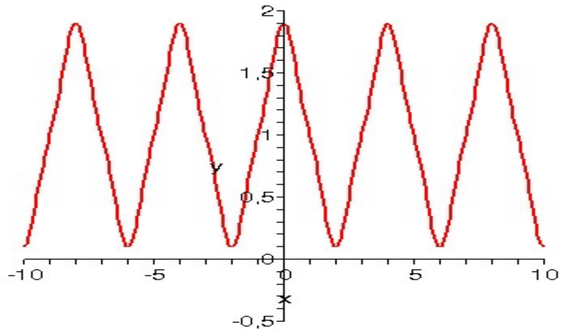
$$=\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\left[\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)-\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_0^2=\frac{4}{n^2\pi^2}\left[\cos(n\pi)-1\right]=\frac{4}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

Άρα $\forall x\in(0,2)$ θα ισχύει η σχέση

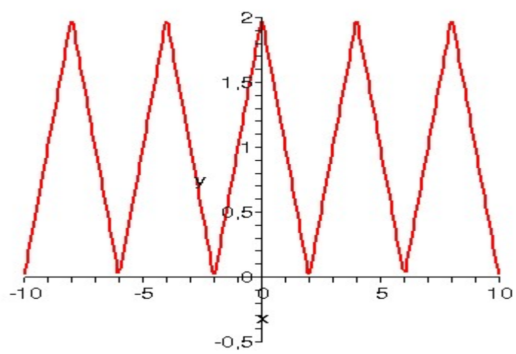
$$x=1+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\quad ή\quad x=1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2}$$

Στη συνέχεια παραθέτουμε τις γραφικές παραστάσεις της αντίστοιχης σειράς Fourier

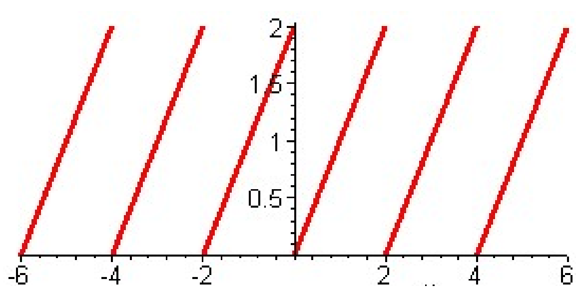
για n=3:



για n=17:



γ) Εδώ το διάστημα ορισμού είναι το $\left(0,2\right)$ άρα T=2L=2 και έτσι L=1, οι συντελεστές είναι



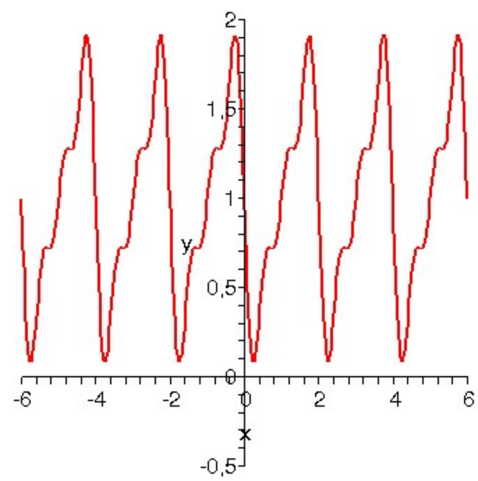
$$\alpha_0 = \int_0^2 \mathrm{x}\,\mathrm{dx} = 2,$$

$$\alpha_n = \int_0^2 \mathrm{x}\cos\left(\mathrm{n}\,\pi\,\mathrm{x}\right)\mathrm{dx} = 0 \quad \text{και} \quad \beta_n = \int_0^2 \mathrm{x}\sin\left(\mathrm{n}\,\pi\,\mathrm{x}\right)\mathrm{dx} = -\frac{2}{\mathrm{n}\,\pi}$$

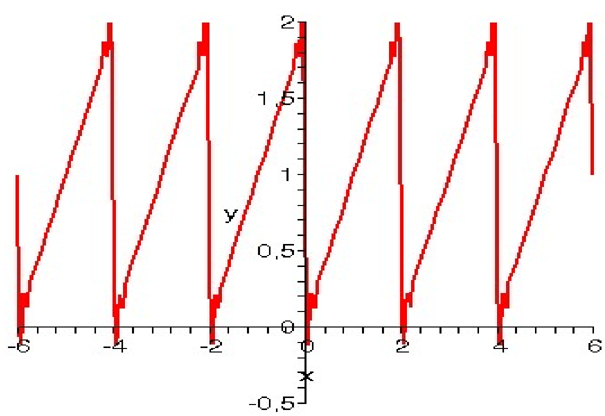
Άρα $\forall x \in (0,2)$

$$x = 1 - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(n\pi x\right)$$

Στη συνέχεια παραθέτουμε τις γραφικές παραστάσεις της αντίστοιχης σειράς Fourier για n=3:



για n=15:



Θεώρημα 3.1: Αν η συνάρτηση $f\left(x\right)$ πληροί τις συνθήκες Dirichlet στο διάστημα $\left[-L, L\right]$, τότε η σειρά Fourier που αντιστοιχεί σ' αυτή μπορούμε να την ολοκληρώσουμε όρο προς όρο σε κάθε

υποδιάστημα $\left[-L,x\right]$ του $\left[-L,L\right]$ και η σειρά που προκύπτει συγκλίνει στην συνάρτηση $\int_{-L}^{x} f(t)dt$ για κάθε $x\in\left[-L,L\right]$.

***Θεώρημα* 3.2:** Αν η συνάρτηση $f\left(x\right)$ πληροί τις συνθήκες Dirichlet στο διάστημα $\left[-L,L\right]$ και επιπλέον είναι συνεχής, όταν επεκταθεί περιοδικά, $\forall x\in\left[-L,L\right]$ τότε μπορούμε να παραγωγίσουμε όρο προς όρο τη σειρά Fourier της $f\left(x\right)$ και η σειρά που προκύπτει συγκλίνει προς την συνάρτηση $\frac{d}{dx}f\left(x\right)$ με την προϋπόθεση ότι ισχύουν οι συνθήκες Dirichlet.

***Θεώρημα* 3.3 (*Parseval*)** Αν η σειρά Fourier μιας συνάρτησης $f\left(x\right)$ συγκλίνει ομοιόμορφα $\forall x\in\left[-L,L\right]$ τότε $\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}[f(x)]^2\,dx=\frac{\alpha_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha^2{}_n+\beta^2{}_n).$

Ασκήσεις:

1. α) Να αναλυθούν κατά Fourier οι συναρτήσεις

$f\left(x\right)=x$ και $g\left(x\right)=x^2$ για $-\pi\le x\le\pi$

β) Να δειχθεί ότι $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

γ) και ότι $x\left(\pi-x\right)\left(\pi+x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n^3}$

Λύση: Και για τις δύο συναρτήσεις ισχύουν οι συνθήκες Dirichlet. Η περίοδος είναι $T=2\pi$ έτσι $L=\pi$.

α) Η συνάρτηση $f\left(x\right)$ είναι περιττή άρα

$$\alpha_n=0,\quad \left(n=0,1,2,\cdots\right) \text{ και}$$

$$\beta_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin\left(nx\right)dx=\left(-1\right)^{n+1}-\frac{2}{n},\qquad \left(n=1,2,\cdots\right)$$

Για $x=\pi$ ή $x=-\pi$ έχουμε

$$\frac{\lim\limits_{x\to-\pi^+}x+\lim\limits_{x\to\pi^-}x}{2}=0$$

Άρα $$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} \qquad \forall x \in [-\pi, \pi]$$

β) Επειδή ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος 3.1, ολοκληρώνουμε την ανωτέρω σχέση ως προς *x* και έχουμε

$$\int_{-\pi}^{x} x\mathrm{dx} = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\int_{-\pi}^{x}\frac{\sin nx}{n}\mathrm{dx} \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{\pi^2}{2} = -2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}\left[\cos nx - (-1)^n\right] \qquad \Rightarrow$$

$$x^2 - \pi^2 = 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2} - 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \qquad \Rightarrow \quad x^2 = \pi^2 - 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$$

και επειδή $$\frac{\alpha_0}{2} = \pi^2 - 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \qquad (1)$$

θα έχουμε $$x^2 = \frac{\alpha_0}{2} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2} \qquad (2)$$

που είναι το ανάπτυγμα Fourier της συνάρτησης $g(x)=x^2$ με $-\pi\le x\le\pi$.

Ο σταθερός όρος α_0 δίνεται επίσης από την σχέση

$$\alpha_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx = \frac{2}{\pi}\frac{\pi^3}{3} = \frac{2\pi^2}{3} \qquad (3)$$

Από τις (1) και (3) προκύπτει

$$\pi^2 - 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{3} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

έτσι η σειρά (2) παίρνει την μορφή

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$$

γ) Αν την ανωτέρω σχέση την γράψουμε ως

$$x^2 - \frac{\pi^2}{3} = 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$$

και την ολοκληρώσουμε στο $[-\pi, x]$ (*οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 3.1 ισχύουν*) έχουμε

$$\int_{-\pi}^{x}\left[x^2-\frac{\pi^2}{3}\right]dx=4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\int_{-\pi}^{x}\frac{\cos nx}{n^2}dx \qquad \Rightarrow$$

$$\left[\frac{x^3}{3}-\frac{\pi^2}{3}x\right]_{-\pi}^{x}=4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^3}\left[\sin nx\right]_{-\pi}^{x} \Rightarrow$$

$$\frac{x^3}{3}-\frac{\pi^2}{3}x+\frac{\pi^3}{3}-\frac{\pi^3}{3}=4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx+\sin n\pi}{n^3} \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{3}x(x-\pi)(x+\pi)=4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n^3} \qquad \Rightarrow \qquad x(\pi-x)(\pi+x)=12\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n^3}$$

2. Να εφαρμοστεί η ταυτότητα του Parseval στη συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0<x<2 \\ -x, & -2<x<0 \end{cases}$$

για να υπολογιστεί το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.

<u>*Λύση*</u>: Αναλύουμε την $f(x)$ κατά Fourier και βρίσκουμε ότι

$$f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n-1\right]\cos\frac{n\pi x}{2}$$

άρα $\alpha_0=2,\quad \alpha_n=4\frac{\left[(-1)^n-1\right]}{n^2\pi^2}$ και $\beta_n=0$, $(n=1,2,\cdots).\,(-1)^n-1$

Η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα (*γιατί;*) άρα

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\{f(x)\}^2\,dx=2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16\left[(-1)^n-1\right]^2}{n^4\pi^4}$$

το πρώτο μέλος της σχέσης αυτής δίνει

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}x^2dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{2}x^2dx=-\frac{1}{2}\frac{(-2)^3}{3}+\frac{1}{2}\frac{2^3}{3}=\frac{8}{3}$$

άρα
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[(-1)^n-1\right]^2}{n^4\pi^4}=\frac{1}{24}$$

η οποία για $n=2k+1$ γίνεται

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4}{(2k+1)^4}=\frac{\pi^4}{24} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$$

Αν την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ την γράψουμε ως

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^4}$$

τότε λόγω των ευρεθέντων αποτελεσμάτων έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{96}+\frac{1}{16}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} \qquad ή \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{96}+\frac{1}{16}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

Απ' όπου προκύπτει ότι

$$\left(1-\frac{1}{16}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{96} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$$

4. Μιγαδική μορφή των σειρών Fourier

Αν μια συνάρτηση f(x) ορισμένη στο διάστημα [-L, L] αναλυθεί σε σειρά Fourier τότε για κάθε σημείο συνέχειας έχουμε

$$f(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\alpha_n\cos\frac{n\pi x}{L}+\beta_n\sin x\frac{n\pi x}{L}\right\}$$

Την έκφραση αυτή μπορούμε λόγω των σχέσεων

$$\cos\frac{n\pi x}{L}=\frac{1}{2}\left[e^{i\frac{n\pi x}{L}}+e^{-i\frac{n\pi x}{L}}\right] \qquad \sin\frac{n\pi x}{L}=\frac{1}{2i}\left[e^{i\frac{n\pi x}{L}}-e^{-i\frac{n\pi x}{L}}\right]$$

να την γράψουμε σε μια άλλη μορφή η οποία ονομάζεται μιγαδική μορφή.

Μετά την αντικατάσταση των τελευταίων σχέσεων στην σειρά Fourier της συνάρτησης έχουμε

$$f(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2}(\alpha_n-i\beta_n)e^{i\frac{n\pi x}{L}}+\frac{1}{2}(\alpha_n+i\beta_n)e^{-i\frac{n\pi x}{L}}\right\}$$

Τους νέους συντελεστές των εκθετικών συναρτήσεων της ανωτέρω σχέσης τους συμβολίζουμε ως εξής

$$c_n=\frac{1}{2}(\alpha_n-i\beta_n) \quad και \quad c_{-n}=\frac{1}{2}(\alpha_n+i\beta_n)=c_n^*, \quad (n=1, 2, \cdots)$$

και χρησιμοποιώντας τους ορισμούς των συντελεστών α_n, β_n παίρνουμε

$$c_n = \frac{1}{2}(\alpha_n - i\beta_n) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\left(\cos\frac{n\pi x}{L} - i\sin\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{L}}dx$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(\alpha_n + i\beta_n) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\left(\cos\frac{n\pi x}{L} + i\sin\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{i\frac{n\pi x}{L}}dx$$

οι σχέσεις αυτές για $n = 0$ δίνουν

$$c_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx = \frac{\alpha_0}{2}$$

Επομένως η σειρά Fourier γράφεται

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n e^{i\frac{n\pi x}{L}} + c_{-n}e^{-i\frac{n\pi x}{L}}\right)$$

ή με πιο σύντομη μορφή

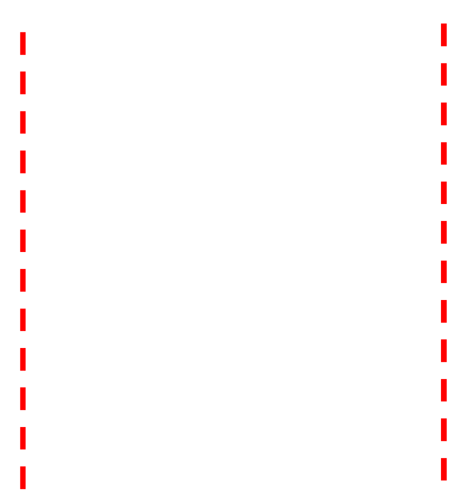
$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{L}} \quad \text{με} \quad c_n = \frac{1}{2}(\alpha_n - i\beta_n) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{i\frac{n\pi x}{L}}dx \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

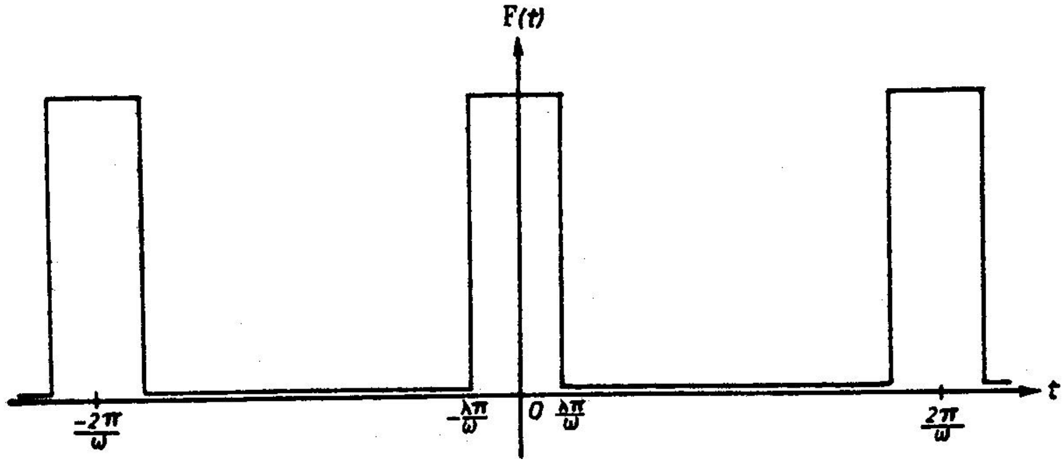
η οποία ονομάζεται μιγαδική μορφή της σειράς Fourier της συνάρτησης f(x).

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1) ΑΚΟΛΟΥΘΙΑ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΠΑΛΜΩΝ

Ας υποθέσουμε ότι κάθε παλμός έχει μοναδιαίο πλάτος έτσι ώστε το γράφημα των ορθογωνίων παλμών να είναι όπως στο παρακάτω σχήμα:





Η συνάρτηση F(t) ορίζεται σε μια πλήρη περίοδο (-λπ/ω, (2—λ)π/ω) από την σχέση:

$$F(t)=\begin{cases}1 & -\dfrac{\lambda\pi}{\omega}<t<\dfrac{\lambda\pi}{\omega}\\[2mm] 0 & \dfrac{\lambda\pi}{\omega}<t<(2-\lambda)\dfrac{\pi}{\omega}\end{cases}$$

Θέλουμε να αναπτύξουμε την συνάρτηση F(t) σε σειρά Fourier. Εδώ έχουμε:

$$x_0=-\frac{\lambda\pi}{\omega}\quad\text{και}\quad 2L=\left(\frac{2\pi}{\omega}-\frac{\lambda\pi}{\omega}\right)-\left(-\frac{\lambda\pi}{\omega}\right)=\frac{2\pi}{\omega}\;\Rightarrow\; L=\frac{\pi}{\omega}$$

και $$x_0+2L=-\frac{\lambda\pi}{\omega}+\frac{2\pi}{\omega}=(2-\lambda)\frac{\pi}{\omega}$$

Οι αντίστοιχοι συντελεστές είναι:

$$\alpha_n=\frac{\omega}{\pi}\int_{-\lambda\pi/\omega}^{(2-\lambda)\pi/\omega}F(t)\cos(n\omega t)\,dt=\frac{\omega}{\pi}\int_{-\lambda\pi/\omega}^{\lambda\pi/\omega}\cos(n\omega t)\,dt=\begin{cases}2\lambda & n=0\\[2mm] \dfrac{2\sin(n\lambda\pi)}{n\pi} & n\neq 0\end{cases}$$

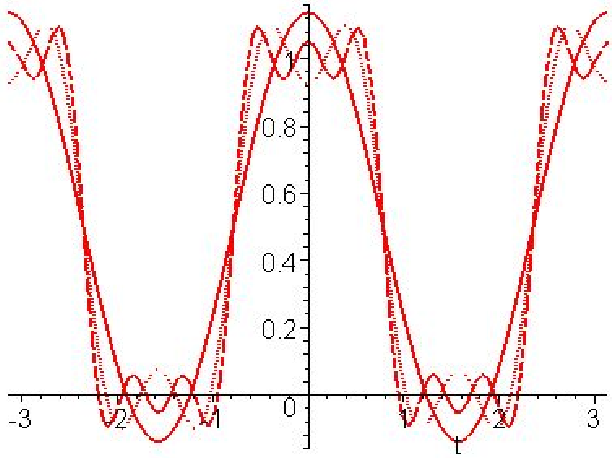
Οι συντελεστές $\beta_n=0\ \ \forall n$.

Τελικά η σειρά Fourier για την F(t) είναι:

$$F(t)=\lambda\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\lambda\pi)}{n\lambda\pi}\cos(n\omega t)\right)$$

Παρατηρούμε ότι όλες οι αρμονικές είναι σε φάση ή σε αντίθετη φάση, (όταν το sin(nλπ) είναι αρνητικό), η μια με την άλλη.

Η θεμελιώδης αρμονική είναι $2\dfrac{\sin(\lambda\pi)}{\pi}\cos(\omega t)$.



Εάν θέσουμε λ=1/2 και παραλείψουμε όλους τους όρους εκτός από τον σταθερό όρο και τον θεμελιώδη, τότε έχουμε την πρώτη προσέγγιση για την F(t), δηλ.

$$F1 := \frac{1}{2} + \frac{2\cos(\omega t)}{\pi}$$

Η δεύτερη προσέγγιση ισούται με την πρώτη διότι ο τρίτος όρος είναι μηδέν.

Η τρίτη προσέγγιση είναι:

$$F3 := \frac{1}{2} + \frac{2\cos(\omega t)}{\pi} - \frac{2}{3}\,\frac{\cos(3\,\omega t)}{\pi}$$

Ομοίως η τέταρτη ισούται με την τρίτη, και τελικά η πέμπτη προσέγγιση είναι:

$$F5 := \frac{1}{2} + \frac{2\cos(\omega t)}{\pi} - \frac{2}{3}\,\frac{\cos(3\,\omega t)}{\pi} + \frac{\frac{2}{5}\cos(5\,\omega t)}{\pi}$$

Οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις δίνονται στο παρακάτω σχήμα:

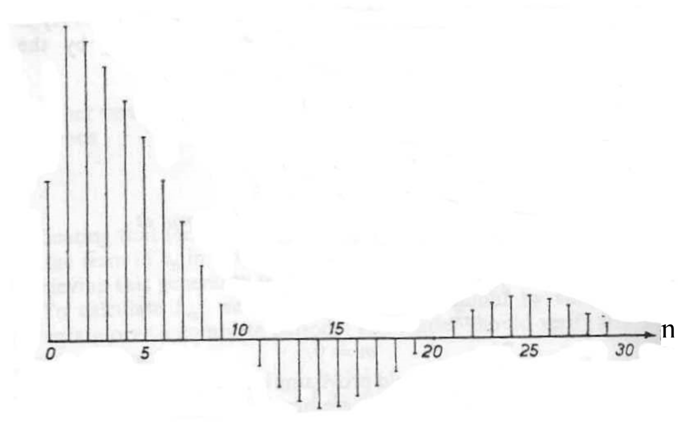
Η προσέγγιση $F_1(t)$ παριστάνεται από την συνεχή γραμμή.

Η προσέγγιση $F_3(t)$ παριστάνεται από την γραμμή με τελείες.

Η προσέγγιση $F_5(t)$ παριστάνεται από την εστιγμένη γραμμή.

Η αρμονική συνιστώσα της F(t) τάξεως n έχει πλάτος $2\lambda\frac{\sin(n\lambda\pi)}{n\lambda\pi}$

Το παρακάτω διάγραμμα δείχνει τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται το πλάτος συναρτήσει της τάξεως n.



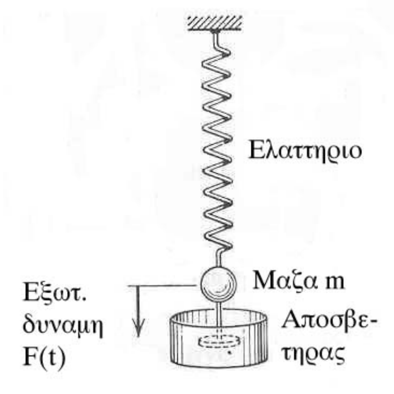
Ένα τέτοιο διάγραμμα αναφέρεται σαν το **φάσμα** της F(t)

2) ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Οι σειρές Fourier έχουν σπουδαίες εφαρμογές στις διαφορικές εξισώσεις. Ας μελετήσουμε ένα γνωστό και ενδιαφέρον πρόβλημα των συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Γνωρίζουμε ότι η εξαναγκασμένη ταλάντωση ενός σώματος μάζας m που είναι συνδεδεμένο μ' ένα ελατήριο σταθεράς k περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση:

$$my'' + cy' + ky = F(t) \qquad (1)$$

όπου c είναι σταθερά απόσβεσης και t ο χρόνος. Εάν η εξωτερική δύναμη F(t) είναι μια συνάρτηση ημιτόνου ή συνημιτόνου, η λύση είναι μια αρμονική ταλάντωση της οποίας η συχνότητα συμπίπτει με την συχνότητα της εξωτερικής δύναμης. Θα δούμε τώρα ότι εάν η F(t) δεν είναι ημίτονο ούτε συνημίτονο αλλά μια άλλη τυχαία περιοδική συνάρτηση, τότε η λύση θα είναι επαλληλία αρμονικών ταλαντώσεων, που περιέχουν την συχνότητα της εξωτερικής δύναμης F(t) καθώς και πολλαπλάσια αυτής. Εάν μια από αυτές τις συχνότητες είναι κοντά στην συχνότητα συντονισμού του συστήματος, τότε αυτή η ταλάντωση μπορεί να είναι το κύριο μέρος της ανταπόκρισης του συστήματος στην εξωτερική δύναμη. Ας δούμε ένα τυπι-

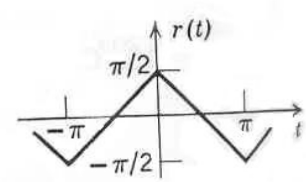


κό παράδειγμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με μη ημιτονοειδή εξωτερική δύναμη.

Ας θεωρήσουμε ότι η εξωτερική δύναμη F(t) είναι της μορφής:

$$F(t) = \begin{cases} t + \dfrac{\pi}{2} & \text{για} \quad -\pi < t < 0 \\ -t + \dfrac{\pi}{2} & \text{για} \quad 0 < t < \pi \end{cases} \qquad F(t+2\pi) = F(t)$$



Αναλύουμε την δύναμη F(t) σε σειρά Fourier:

$$F(t) = \frac{4}{\pi}\left(\cos t + \frac{1}{3^2}\cos 3t + \frac{1}{5^2}\cos 5t + \ldots + \frac{1}{n^2}\cos nt + \ldots\right) \quad n=1, 3, 5, \cdots \qquad (3)$$

και θεωρούμε τον γενικό όρο $\frac{4}{n^2\pi}\cos nt$.

Λύνουμε την διαφορική εξίσωση:

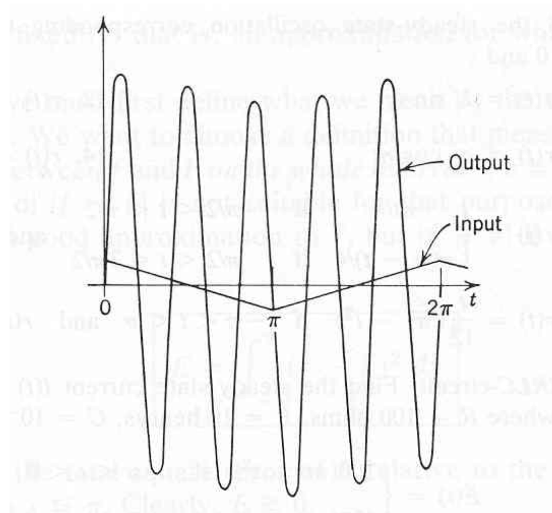
$$my'' + cy' + ky = \frac{4}{n^2\pi}\cos nt \quad n=1, 3, 5,\cdots \qquad (4)$$

της οποίας ο μη ομογενής όρος είναι ο γενικός όρος της σειράς (3). Η λύση της διαφορικής εξισώσεως (4), κατά τα γνωστά, είναι:

$$y_n(t) = c_1 \exp\left(\frac{-c+\sqrt{c^2-4km}}{2m}t\right) + c_2 \exp\left(\frac{-c-\sqrt{c^2-4km}}{2m}t\right) +$$

$$+\frac{4\left(k-n^2m\right)}{\pi n^2 D}\cos\left(nt\right)+\frac{4n}{\pi n^2 D}\sin\left(nt\right) \quad \text{με} \quad D=(k-n^2m)^2+c^2n^2 \qquad (5)$$

Από την λύση παρατηρούμε ότι με την πάροδο του χρόνου οι εκθετικοί όροι τείνουν στο μηδεν, (όταν c^2-4mk>0)[3], και οι όροι που επικρατούν είναι οι τριγωνομετρικοί. Άρα η «σταθερά λύση» για την $y_n(t)$ θα είναι:



$$y_n(t)=A_n\cos nt+B_n\sin nt \qquad (6)$$

όπου

$$A_n=\frac{4\left(k-n^2m\right)}{\pi n^2 D}, \qquad B_n=\frac{4n}{\pi n^2 D} \qquad (7)$$

Επειδή η διαφορική εξίσωση είναι γραμμική, η σταθερή λύση θα είναι:

$$y=y_1+y_3+y_5+\cdots \qquad (8)$$

όπου τα y_n δίνονται από την σχέση (6).

Τα πλάτη των ταλαντώσεων είναι:

$$C_n=\sqrt{A_n{}^2+B_n{}^2}=\frac{4}{n^2\pi D}\sqrt{\left(k-n^2m\right)^2+n^2} \qquad (9)$$

Εάν στην εξίσωση (1) θέσουμε m = 1 (gr), c = 0.02 (gr/sec), και k = 25 (gr/sec^2), τότε $D=(25-n^2)^2+0.02n^2$. και μπορούμε να υπολογίσουμε αριθμητικά τα πλάτη:

C_1=0,0530

C_3=0,0088

C_5=0,5100

C_7=0,0011

C_9=0,0003

[3] Στην περίπτωση που c^2-4mk<0 τότε οι χαρακτηριστικές ρίζες της διαφορικής εξίσωσης είναι μιγαδικές και επομένως αντί για εκθετικά θα έχουμε τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

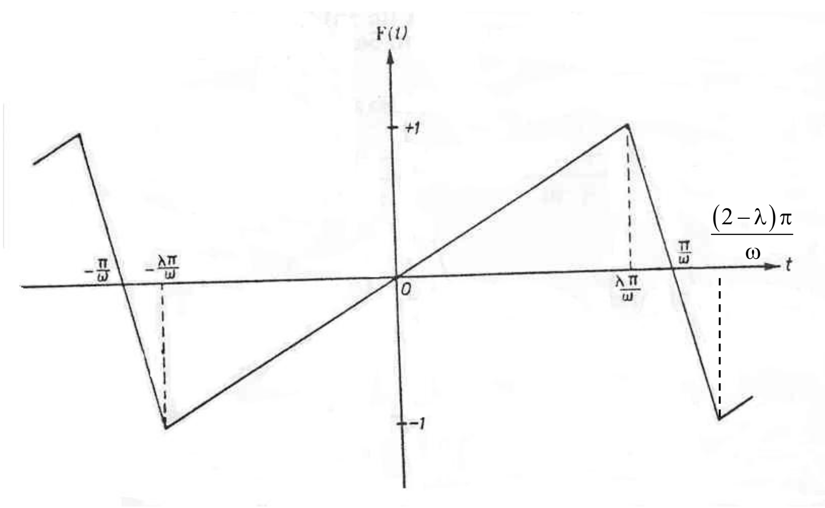
Για n=5 το D παίρνει την ελάχιστη τιμή, ο παρονομαστής του C_5 είναι αρκετά μικρός, έτσι ώστε να μπορούμε να θεωρήσουμε τον όρο y_5 κυρίαρχο σε σχέσει με τους άλλους στη σειρά (8). Αυτό σημαίνει ότι η σταθερά λύση, δηλαδή η σταθερά κίνηση είναι σχεδόν αρμονική ταλάντωση της οποίας η συχνότητα είναι το πενταπλάσιο της συχνότητας της εξωτερικής δύναμης.

Πρόβλημα: Πως αλλάζουν τα πλάτη του παραδείγματος 1 εάν αλλάξουμε την σταθερά του ελατηρίου και γίνει k=9; Εάν το ελατήριο γίνει ακόμα σκληρότερο και η σταθερά k γίνει 49; Εάν αυξήσουμε την τριβή;

3. ΠΡΙΟΝΩΤΗ ΤΑΣΗ – ΔΟΝΤΙΑ ΤΟΥ ΚΑΡΧΑΡΙΑ- (Κυματομορφή γωνιακής συχνότητας ω), *Saw tooth waveform of angular frequency ω*

Η μεταβολή της τάσεως κατά μήκος του Χ-επιπέδου μιας καθοδικής ακτίνας ενός παλμογράφου έχει την μορφή της κυματομορφής, που μοιάζει με τα δόντια του καρχαρία.
Η F(t) ορίζεται στην περίοδο (-λπ/ω, (2-λ)π/ω) από την εξίσωση:

$$F(t)=\begin{cases}\dfrac{\omega t}{\lambda\pi} & -\dfrac{\lambda\pi}{\omega}\le t\le\dfrac{\lambda\pi}{\omega}\\[2ex] \dfrac{\pi-\omega t}{\pi(1-\lambda)} & \dfrac{\lambda\pi}{\omega}\le t\le\dfrac{(2-\lambda)\pi}{\omega}\end{cases}$$



Οι συντελεστές της αντίστοιχης σειράς Fourier είναι:

$\alpha_n=0$

και

$$\beta_n=\frac{\omega}{\pi}\int_{t=-\lambda\pi/\omega}^{\lambda\pi/\omega}\frac{\omega t}{\lambda\pi}\sin(n\omega t)\,dt+\frac{\omega}{\pi}\int_{t=\lambda\pi/\omega}^{(2-\lambda)\pi/\omega}\frac{\pi-\omega t}{\pi(1-\lambda)}\sin(n\omega t)\,dt=\frac{2\sin(n\lambda\pi)}{\lambda(1-\lambda)n^2\pi^2}$$

Επομένως $\quad F(t)=\dfrac{2}{\lambda(1-\lambda)\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin(n\lambda\pi)\sin(n\omega t)$

Στην περίπτωση που τα δυο ευθύγραμμα τμήματα, που σχηματίζουν ένα δόντι, έχουν το αυτό μήκος, τότε το λ=1/2 και η σειρά γίνεται:

$$F(t)=\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\sin(n\omega t)=\frac{8}{\pi^2}\left(\sin\omega t-\frac{1}{3^2}\sin 3\omega t+\frac{1}{5^2}\sin 5\omega t+\cdots\right)$$

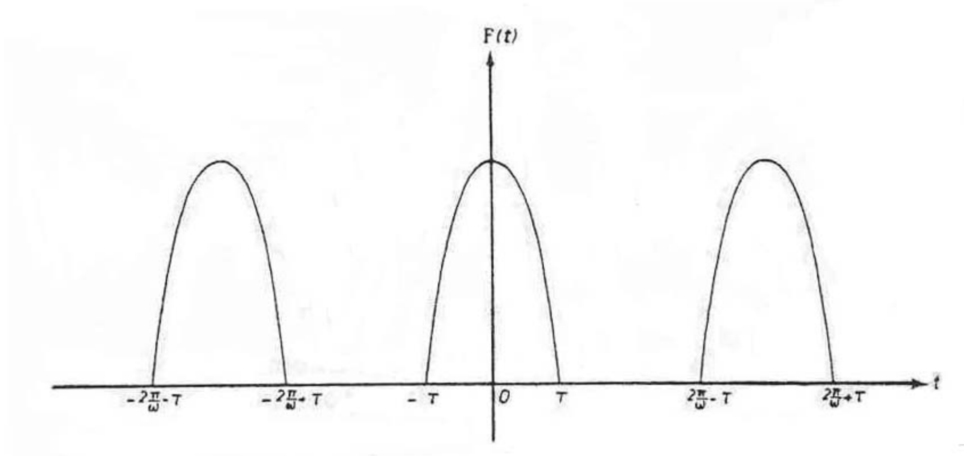
4. ΣΥΡΜΟΣ ΗΜΙΑΝΟΡΘΩΜΕΝΟΥ ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΙΚΟΥ ΣΗΜΑΤΟΣ

(Train of cosine wave peaks)

Η εν λόγω κυματομορφή ορίζεται από την σχέση:

$$F(t)=\begin{cases}0 & \tau<t<\dfrac{2\pi}{\omega}-\tau\\[2mm] \cos(\omega t)-\cos(\omega\tau) & \dfrac{2\pi}{\omega}-\tau<t<\dfrac{2\pi}{\omega}+\tau\end{cases}$$

και έχει την μορφή του παρακάτω σχήματος:



Οι συντελεστές της αντίστοιχης σειράς Fourier είναι:

$$\alpha_n = \frac{\omega}{\pi} \int_{t=\frac{2\pi}{\omega}-\tau}^{\frac{2\pi}{\omega}+\tau} \left(\cos\omega t - \cos\omega\tau\right)\cos\left(n\omega t\right)dt =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\left[\sin\left(\omega\tau\right) - \omega\tau\cos\left(\omega\tau\right)\right] & n = 0 \\ \dfrac{1}{\pi}\left[\omega\tau - \dfrac{1}{2}\sin\left(2\omega\tau\right)\right] & n = 1 \\ \dfrac{1}{n\pi}\left[\dfrac{\sin\left(\left(n-1\right)\omega\tau\right)}{n-1} - \dfrac{\sin\left(\left(n+1\right)\omega\tau\right)}{n+1}\right] & n \neq 0, 1 \end{cases}$$

και $\beta_n=0$

Άρα $\pi F(t)=\sin\omega\tau-\omega\tau\cos\omega\tau+(\omega\tau-1/2\sin2\omega\tau)\cos\omega t$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{\sin\left(\left(n-1\right)\omega\tau\right)}{n-1}-\frac{\sin\left(\left(n+1\right)\omega\tau\right)}{n+1}\right]\cos\left(\omega t\right)$$