Ειδικά Μαθηματικά

Ενότητα 10: Ασκήσεις

Βασίλειος Λουκόπουλος, Επίκουρος Καθηγητής

Τμήμα Φυσικής

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ενότητα 3: Εξισώσεις υπερβολικού τύπου

Παράδειγμα 1 Εξαναγκασμένη ταλάντωση χορδής υπό την επίδραση περιοδικής δυνάμεως ασκουμένης σε όλο το μήκος της χορδής

Η χορδή $0 \le x \le L$ έχει σταθερά άκρα, και η εξωτερική δύναμη ισούται με $F(x,t)=q_0 \sin\omega t$ ανά μονάδα μήκους της χορδής . Ζητείται η εξίσωση της απομακρύνσεως των σημείων της χορδής αν $u(x,0)=0$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0$, $0 \le x \le L$.

Λύση: Η διαφορική εξίσωση της εξαναγκασμένης ταλαντώσεως χορδής υπό την επίδραση εξωτερικής δυνάμεως $F(x,t)=q_0 \sin\omega t$ ανά μονάδα μήκους της χορδής είναι

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t)\,,\ f(x,t)=\frac{F(x,t)}{\rho}\,,\ c^2=\frac{\tau}{\rho} \qquad (2.4.37)$$

Η (2.4.37) είναι μη ομογενής εξίσωση με ομογενείς συνοριακές συνθήκες

$$u(0,t)=0,\ u(L,t)=0\ ,\ t>0\ . \qquad (2.4.38)$$

και με αρχικές συνθήκες $u(x,0)=0,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0\ ,\ 0 \le x \le L$. (2.4.39)

Έστω $\omega \ne \omega_n$, όπου $\omega_n=\frac{nc\pi}{L}, n=1,2,3,...$ είναι η φυσική κυκλική συχνότητα των ταλαντώσεων της χορδής.

Ζητούμε λύση της (2.4.37) υπό μορφή σειράς Fourier

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}U_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L}\,, \qquad (2.4.40)$$

όπου $U_n(t)$ προσδιοριστέα συνάρτηση του χρόνου.

Επί πλέον θεωρούμε ότι η συνάρτηση $f(x,t)=\frac{q_0 \sin\omega t}{\rho}$ εκφράζεται υπό μορφή σειράς Fourier, ως εξής

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L} \Rightarrow F_n(t)=\frac{2}{L}\int_0^L f(x,t)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \qquad (2.4.41)$$

Από την (2.4.40) έχουμε

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\sum_{n=1}^{\infty}U''_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L} \text{ και } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\pi^2}{L^2}U_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L}\ .,$$

όπου οι τόνοι συμβολίζουν παράγωγο ως προς τον χρόνο.

Αντικαθιστούμε τις υπολογισθείσες παραγώγους και την $f(x,t)$ από την (2.4.41) στην (2.4.37) και λαμβάνουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(c^2\frac{n^2\pi^2}{L^2}U_n(t)+U_n''(t)-F_n(t)\right)sin\frac{n\pi x}{L}=0\,.$$

Η εξίσωση αυτή ισχύει εφ' όσον η παράσταση εντός της παρενθέσεως ισούται με το μηδέν. Επομένως

$$U_n''(t)+\omega_n^2U_n(t)=F_n(t)\,. \qquad (2.4.42)$$

Η (2.4.42) είναι η διαφορική εξίσωση της εξαναγκασμένης ταλαντώσεως , στην οποία το $U_n(t)$ συμβολίζει την απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας και το $F_n(t)$ την δύναμη εξαναγκασμού, η οποία υπολογίζεται από την (2.4.41) . Η (2.4.42) δέχεται ως λύση την

$$U_n(t)=U_n^{(I)}(t)+U_n^{(II)}(t)\,, \qquad (2.4.43)$$

όπου $U_n^{(I)}(t)$ είναι η μερική λύση και $U_n^{(II)}(t)$ είναι η λύση της ομογενούς. Προς εύρεση της μερικής λύσεως υπολογίζουμε κατ' αρχάς το $F_n(t)$ από την (2.4.41) , στην οποία θέτουμε $f(x,t)=\frac{q_0}{\rho}sin\,\omega t$. Άρα

$$F_n(t)=\frac{2}{L}\int_0^L f(x,t)\,sin\frac{n\pi x}{L}dx=\Phi_0\,sin\,\omega t$$

όπου $\Phi_0=\frac{2}{L}\int_0^L\frac{q_0}{\rho}sin\frac{n\pi x}{L}dx=-\frac{2q_0}{n\pi\rho}(cos\,n\pi-1)=\frac{4q_0}{(2k+1)\pi\rho}$. Επομένως η (2.4.42) γράφεται

$$U_k''(t)+\omega_k^2U_k(t)=\Phi_0\,sin\,\omega t\,,\ \omega_k=\frac{(2k+1)c\pi}{L},k=0,1,2,3,...\ . \qquad (2.4.44)$$

Ζητούμε μερική λύση της (2.4.44) υπό μορφή

$$U_k^{(I)}(t)=C_k\,sin\,\omega t+D_k\,cos\,\omega t\,, \qquad (2.4.45)$$

όπου C_k,D_k προσδιοριστέες σταθερές. Αντικαθιστούμε την (2.4.45) στην (2.4.44) και ευρίσκουμε

$$D_k=0,C_k=\frac{\Phi_0}{\omega_k^2-\omega^2}\,.$$

Συνεπώς η μερική λύση της (2.4.42) είναι

$$U_k^{(I)}(t)=\frac{\Phi_0}{\omega_k^2-\omega^2}sin\,\omega t\,. \qquad (2.4.46)$$

Η λύση της ομογενούς $U_k''(t)+\omega_k^2U_k(t)=0$ είναι

$$U_k^{(II)}(t)=G_k\,cos\,\omega_k t+H_k\,sin\,\omega_k t\,. \qquad (2.4.47)$$

Επομένως η γενική λύση της (2.4.42) γράφεται

$$U_k(t) = G_k \cos\omega_k t + H_k \sin\omega_k t + \frac{\Phi_0}{\omega_k^2 - \omega^2}\sin\omega t \qquad (2.4.48),$$

οπότε και η γενική λύση της (2.4.37) είναι

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(G_k \cos\omega_k t + H_k \sin\omega_k t + \frac{\Phi_0}{\omega_k^2 - \omega^2}\sin\omega t\right)\sin\frac{(2k+1)\pi x}{L}. \qquad (2.4.49)$$

Στην (2.4.49) εφαρμόζουμε πλέον τις αρχικές συνθήκες $u(x,0) = \varphi(x)$ και $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x)$ και ευρίσκουμε

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} G_k \sin\frac{(2k+1)\pi x}{L}, \qquad (2.4.50)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(H_k\omega_k + \frac{\Phi_0\omega}{\omega_k^2 - \omega^2}\right)\sin\frac{(2k+1)\pi x}{L}. \qquad (2.4.51)$$

Αλλά $\varphi(x)=0$ και $\psi(x) = 0$. Συνεπώς $G_k = 0$ και $H_k = -\frac{\Phi_0\omega}{(\omega_k^2 - \omega^2)\omega_k}$. Κατόπιν τούτου η γενική λύση (2.4.49) γράφεται

$$u(x,t)=\frac{4q_0}{\pi\rho}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)(\omega_k^2 - \omega^2)}\left(\sin\omega t - \frac{\omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\right)\sin\frac{(2k+1)\pi x}{L},$$

όπου $\omega_k = \frac{(2k+1)c\pi}{L}, k = 0,1,2,3,...$

Παράδειγμα 2. Εξαναγκασμένη ταλάντωση χορδής υπό την επίδραση αντιστάσεως και περιοδικής δυνάμεως ασκουμένης σε όλο το μήκος της χορδής

Χορδή $0 \le x \le L$ με σταθερά άκρα ταλαντούται υπό την επίδραση αντιστάσεως αναλόγου προς την ταχύτητα και εξωτερικής δυνάμεως $F(x,t)=\Phi(x)\sin\omega t$ ανά μονάδα μήκους της χορδής . Ζητείται η εξίσωση της απομακρύνσεως των σημείων της χορδής αν $u(x,0) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$, $0 \le x \le L$.

Λύση: Η διαφορική εξίσωση του κύματος είναι η

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2b\frac{\partial u}{\partial t} + f(x,t),\ f(x,t) = \frac{F(x,t)}{\rho},\ c^2 = \frac{\tau}{\rho}. \qquad (2.4.52)$$

Η (2.4.52) είναι μη ομογενής εξίσωση με ομογενείς συνοριακές συνθήκες

u(0,t)=0, u(L,t)=0 , $t > 0$ (2.4.53)

και με αρχικές συνθήκες $u(x,0)=0,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0\ ,\ 0\le x\le L\ .$ (2.4.54)

Η κυκλική συχνότητα των ελευθέρων ταλαντώσεων της χορδής απουσία αντιστάσεων είναι $\omega_n=\dfrac{n c\pi}{L}, n=1,2,3,...$

.

Ζητούμε λύση της (2.4.52) υπό μορφή σειράς Fourier

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}U_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L}\ , \tag{2.4.55}$$

όπου $U_n(t)$ προσδιοριστέα συνάρτηση του χρόνου. Η (2.4.55) πληροί τις συνοριακές συνθήκες (2.4.53) Επίσης οι αρχικές συνθήκες (2.4.54) εκφράζονται πλέον συναρτήσει της $U_n(t)$ ως εξής:

$$u(x,0)=\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}U_n(0)\sin\frac{n\pi x}{L}\ , \tag{2.4.56}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}U_n'(0)\sin\frac{n\pi x}{L}\ . \tag{2.4.57}$$

Έστω ότι η συνάρτηση $f(x,t)$ εκφράζεται υπό μορφή σειράς Fourier, ως εξής

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L}\Rightarrow F_n(t)=\frac{2}{L}\int_0^L f(x,t)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\ . \tag{2.4.58}$$

Από την (2.4.55) έχουμε

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty}U_n'(t)\sin\frac{n\pi x}{L}\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\sum_{n=1}^{\infty}U_n''(t)\sin\frac{n\pi x}{L}\ \text{ και }\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\pi^2}{L^2}U_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L}\ ,$$

όπου οι τόνοι συμβολίζουν παράγωγο ως προς τον χρόνο.

Αντικαθιστούμε τις υπολογισθείσες παραγώγους και την $f(x,t)$ από την (2.4.58) στην (2.4.52) και λαμβάνουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(c^2\frac{n^2\pi^2}{L^2}U_n(t)+2bU_n'+U_n''(t)-F_n(t)\right)\sin\frac{n\pi x}{L}=0\ .$$

Η εξίσωση αυτή ισχύει εφ’ όσον η παράσταση εντός της παρενθέσεως ισούται με το μηδέν. Επομένως

$$U_n''(t)+2bU_n'+\omega_n^2U_n(t)=F_n(t)\ . \tag{2.4.59}$$

Η (2.4.59) είναι η διαφορική εξίσωση της εξαναγκασμένης ταλαντώσεως με απόσβεση , στην οποία το $U_n(t)$ συμβολίζει την απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας και το $F_n(t)$ την δύναμη εξαναγκασμού, η οποία υπολογίζεται από την (2.4.58) . Η (2.4.59) δέχεται ως λύση την

$$U_n(t)=U_n^{(I)}(t)+U_n^{(II)}(t)\ , \tag{2.4.60}$$

όπου $U_n^{(I)}(t)$ είναι η μερική λύση και $U_n^{(II)}(t)$ είναι η λύση της ομογενούς. Προς εύρεση της μερικής λύσεως υπολογίζουμε κατ' αρχάς το $F_n(t)$ από την (2.4.58), στην οποία θέτουμε $f(x,t)=\frac{\Phi(x)}{\rho}\sin\omega t$. Άρα

$$F_n(t)=\frac{2}{L}\int_0^L f(x,t)\sin\frac{n\pi x}{L}dx=\Phi_0\sin\omega t\ ,$$

όπου με Φ_0 συμβολίζουμε το ολοκλήρωμα $\frac{2}{L}\int_0^L\frac{\Phi(x)}{\rho}\sin\frac{n\pi x}{L}dx$, το οποίο είναι πλέον σταθερά ποσότητα.

Επομένως η (2.4.59) γράφεται

$$U_n''(t)+2bU_n'+\omega_n^2U_n(t)=\Phi_0\sin\omega t\ . \tag{2.4.61}$$

Ζητούμε μερική λύση της (2.4.61) υπό μορφή

$$U_n^{(I)}(t)=C_n\sin\omega t+D_n\cos\omega t\ , \tag{2.4.62}$$

όπου C_n, D_n προσδιοριστέες σταθερές. Αντικαθιστούμε την (2.4.62) στην (2.4.61) και ευρίσκουμε

$$D_n=-\frac{2b\omega\Phi_0}{(\omega_n^2-\omega^2)^2+4b^2\omega^2},C_n=\frac{\Phi_0(\omega_n^2-\omega^2)}{(\omega_n^2-\omega^2)^2+4b^2\omega^2}\ .$$

Συνεπώς η μερική λύση της (2.4.59) είναι

$$U_n^{(I)}(t)=\frac{\Phi_0}{(\omega_n^2-\omega^2)^2+4b^2\omega^2}\left[(\omega_n^2-\omega^2)\sin\omega t-2b\omega\cos\omega t\right]. \tag{2.4.63}$$

Η ομογενής εξίσωση

$$U_n''(t)+2bU_n'+\omega_n^2U_n(t)=0 \tag{2.4.64}$$

έχει χαρακτηριστική εξίσωση την $\rho^2+2b\rho+\omega_n^2=0$. Οι ρίζες της χαρακτηριστικής είναι

$$\rho_{1,2}=-b\pm\sqrt{b^2-\omega_n^2}\ .$$

Έστω $\widehat{\omega}_n=\sqrt{b^2-\omega_n^2}$ και $\breve{\omega}_n=\sqrt{\omega_n^2-b^2}$. Κατά συνέπεια η λύση της (2.4.64) είναι

$$T=\begin{cases} e^{-bt}\left(A_2\cosh\widehat{\omega}_n t+B_2\sinh\widehat{\omega}_n t\right), b>\omega_n ......(\alpha)\\ e^{-bt}(A_3t+B_3), b=\omega_n ....(\beta)\\ e^{-bt}\left(A_4\cos\breve{\omega}_n t+B_4\sin\breve{\omega}_n t\right), b<\omega_n ....(\gamma)\end{cases}. \tag{2.4.65}$$

Όλες οι λύσεις (2.4.65) δίδουν $T\to 0$ όταν $t\to\infty$. Στις περιπτώσεις (2.4.65α,β) τα σημεία της χορδής δεν εκτελούν αρμονική ταλάντωση. Στην περίπτωση (2.4.65γ) η χορδή ταλαντούται αρμονικά και η λύση της (2.4.64) είναι

$$U_n^{(II)}(t)=e^{-bt}\left(A_n\cos\breve{\omega}_n t+B_n\sin\breve{\omega}_n t\right).$$

Επομένως η λύση της (2.4.59) παρέχεται από την ακόλουθο σχέση

$$U_n(t) = \frac{\Phi_0}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}\left[(\omega_n^2 - \omega^2)\, sin\,\omega t - 2b\omega\, cos\,\omega t\right] + e^{-bt}\left(A_n\, cos\,\breve{\omega}_n t + B_n\, sin\,\breve{\omega}_n t\right).$$

Άρα η εξίσωση του κύματος (2.4.55) γράφεται

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-bt}\left(A_n cos\breve{\omega}_n t + B_n sin\breve{\omega}_n t\right) sin\frac{n\pi x}{L} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_0}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}\left[(\omega_n^2 - \omega^2) sin\omega t - 2b\omega cos\omega t\right] sin\frac{n\pi x}{L} \end{aligned} \qquad (2.4.66)$$

Στην (2.4.66) εφαρμόζουμε πλέον τις αρχικές συνθήκες (2.4.54) και ευρίσκουμε

$$A_n = \frac{2b\omega\Phi_0}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}, B_n = \frac{A_n}{\breve{\omega}_n} - \frac{\Phi_0\omega(\omega_n^2 - \omega^2)}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}. \qquad (2.4.67)$$

Ενότητα 4: Η συνάρτηση δ

Παράδειγμα 1.

Να ευρεθεί η εξίσωση των ταλαντώσεων χορδής μήκους L με ακλόνητα άκρα στις θέσεις $x = 0, x = L$, αν στο σημείο x_0 ασκείται καθέτως προς την χορδή δύναμη $P(t) = F_0\, cos\,\omega t$, $-\infty < t < \infty$

Το πρόβλημα περιγράφεται από τις διαφορικές εξισώσεις (2.6.9) και (2.6.11) Αναζητούμε λύση της μορφής.

$$u_1(x,t) = X_1(x)\, cos\,\omega t,\ 0 \le x \le x_0,$$

για την πρώτη και

$$u_2(x,t) = X_2(x)\, cos\,\omega t,\ x_0 \le x \le L$$

για την δεύτερη. Κατ’ αυτόν τον τρόπο λαμβάνουμε τις κανονικές διαφορικές εξισώσεις

$$X_1'' + \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2 X_1 = 0,\ 0 \le x \le x_0 \qquad (2.6.13)$$

$$X_2'' + \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2 X_2 = 0,\ x_0 \le x \le L, \qquad (2.6.14)$$

με συνοριακές συνθήκες

$$X_1(0)=0\,,\ X_2(L)=0 \tag{2.6.15}$$

και συνθήκες συνεχείας

$$X_1(x_0)=X_2(x_0)\,,\ X_1'(x_0)-X_2'(x_0)=\frac{F_0}{\tau}\,. \tag{2.6.16}$$

Από τις (2.6.13)-(2.6.15) ευρίσκουμε

$$X_1(x)=C\,sin\frac{\omega x}{\alpha}\,,\ X_2(x)=D\,sin\frac{\omega(x-L)}{\alpha}\,. \tag{2.6.17}$$

Εφαρμόζουμε στις (2.6.17) τις συνθήκες (2.6.16) και οπότε προσδιορίζουμε τους συντελεστές C,D. Τελικά

$$u_1(x,t)=\frac{F_0\alpha}{\tau\omega}\frac{sin\frac{\omega(L-x_0)}{\alpha}}{sin\frac{\omega L}{\alpha}}sin\frac{\omega x}{\alpha}cos\,\omega t\,,\ 0\le x\le x_0$$

$$u_2(x,t)=\frac{F_0\alpha}{\tau\omega}\frac{sin\frac{\omega x_0}{\alpha}}{sin\frac{\omega L}{\alpha}}sin\frac{\omega(L-x)}{\alpha}cos\,\omega t\,,\ x_0\le x\le L\,.$$

Ένας άλλος τρόπος λύσεως του προβλήματος στηρίζεται σε τροποποίηση της μεθόδου η οποία αναπτύσσεται στην υποενότητα 2.4α του παρόντος κεφαλαίου. Θεωρούμε ότι η δύναμη κατανέμεται σε στοιχειώδες τμήμα Δx περί την θέση x_0, επί παραδείγματι μεταξύ των σημείων $x=x_0-\varepsilon$ και $x=x_0+\varepsilon$ και στην πορεία της λύσεως θέτουμε $\Delta x\to 0$. Έστω $P(t)$ η δύναμη που δρα στο σημείο x_0 και Η γραμμική πυκνότητα της δύναμης είναι $\frac{P(t)}{2\varepsilon}$, οπότε η (2.6.1) γίνεται

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t)\,,\ f(x,t)=\frac{P(t)}{2\rho\varepsilon} \tag{2.6.13}$$

Η διαδικασία της λύσεως της (2.6.13) είναι αυτή που περιγράφεται στην υποενότητα 2.4α με την διαφορά ότι στην ανάπτυξη της $f(x,t)$ σε σειρά Fourier σύμφωνα με την σχέση

$$f(x,t)=\frac{P(t)}{2\rho\varepsilon}=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(t)\,sin\frac{n\pi x}{L}\,,$$

η $F_n(t)$ υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα

$$F_n(t)=\frac{2}{L}\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}f(\xi,t)\,sin\frac{n\pi\xi}{L}d\xi=\frac{P(t)}{L\rho\varepsilon}\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}sin\frac{n\pi\xi}{L}d\xi=\frac{2P(t)}{L\rho\varepsilon}\frac{L}{n\pi}sin\frac{n\pi x_0}{L}sin\frac{n\pi\varepsilon}{L}\,.$$

Λαμβάνουμε ακολούθως το όριο της παραστάσεως όταν $\varepsilon\to 0$ και ευρίσκουμε την έκφραση της $F_n(t)$,

$$F_n(t)=\frac{2P(t)}{L\rho}sin\frac{n\pi x_0}{L}\,.$$

Την έκφραση αυτή αντικαθιστούμε στην (2.4.12΄)

$$u^I(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L}{n\pi c}\int_0^t F_n(\tau)\,sin\frac{n\pi c(t-\tau)}{L}\,sin\frac{n\pi x}{L}d\tau \tag{2.4.12΄}$$

από την οποία προσδιορίζουμε την μορφή του κύματος.

Ενότητα 6: Η ομογενής εξίσωση της θερμοκρασίας

Παράδειγμα 1. Κατανομή της θερμοκρασίας σε ράβδο με αδιαβατικά άκρα

Η ράβδος έχει μήκος L και κείται επί του άξονος Ox. Τα άκρα της ράβδου ευρίσκονται στις θέσεις (x=0),(x=L) και οι συνθήκες σε αυτά είναι

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} = 0\ . \tag{3.3.14}$$

Ζητείται η κατανομή της θερμοκρασίας συναρτήσει του χρόνου αν κατά την στιγμή t=0 η θερμοκρασία της ράβδου στην θέση x είναι

$$u(x,0) = \varphi(x)\ . \tag{3.3.15}$$

Η διαφορική εξίσωση προς επίλυση είναι η (3.3.1) με ομογενείς συνοριακές συνθήκες τις (3.3.14) και με αρχική συνθήκη την (3.3.15). Για την λύση του προβλήματος χρησιμοποιούμε την μέθοδο των χωριζομένων μεταβλητών, οπότε καταλήγουμε στην σχέση

$$\alpha^2 \frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = -p^2\ ,\ p \neq 0 \tag{3.3.16}$$

όπου p πραγματικός αριθμός. Από τις (3.3.16) ευρίσκουμε τις λύσεις

$$X = a\,cos\frac{px}{\alpha} + b\,sin\frac{px}{\alpha}, T = ce^{-p^2 t}\ .$$

Άρα

$$u(x,t) = e^{-p^2 t}\left[A\,cos\frac{px}{\alpha} + B\,sin\frac{px}{\alpha}\right]. \tag{3.3.17}$$

Οι ανεξάρτητες παράμετροι, οι οποίες υπεισέρχονται στην έκφραση (3.3.17) είναι οι A, B και p .Επί της λύσεως αυτής εφαρμόζουμε τις ομογενείς συνοριακές συνθήκες (3.3.14) , οπότε προσδιορίζουμε τις τιμές μερικών εκ των παραμέτρων.

Η συνθήκη $\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0$ δίδει B=0.

Η συνθήκη $\frac{\partial u(L,t)}{\partial x} = 0$ δίδει $sin\frac{pL}{\alpha} = 0 \Rightarrow \frac{p}{\alpha} = \frac{m\pi}{L}$.

Επομένως

$$u_m(x,t) = A_m e^{-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 t} \cos\frac{m\pi x}{L}, m = 0,1,2,\ldots \quad . \tag{3.3.18}$$

Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας, αν η λύση της διαφορικής εξισώσεως είναι η (3.3.18), λύση θα είναι επίσης και η

$$u(x,t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m e^{-\frac{\alpha^2 m^2 \pi^2}{L^2} t} \cos\frac{m\pi x}{L} \, . \tag{3.3.19}$$

Εφαρμόζουμε σε αυτήν την μη ομογενή αρχική συνθήκη $u(x,0) = \varphi(x)$ και έχουμε

$$\varphi(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos\frac{m\pi x}{L} \; .$$

Άρα $$A_m = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x) \cos\frac{m\pi x}{L} dx \, .$$

Τελικά

$$u(x,t) = \frac{1}{L}\int_0^L \varphi(x) dx + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x) \cos\frac{m\pi x}{L} dx \right) e^{-\frac{\alpha^2 m^2 \pi^2}{L^2} t} \cos\frac{m\pi x}{L} \; .$$

Παράδειγμα 2. Κατανομή της θερμοκρασίας σε τοίχο θερμαινόμενο από την μία πλευρική του επιφάνεια

Τοίχος πάχους L με αρχική θερμοκρασία $u(x,0) = 0$ δέχεται στην επιφάνεια $x = 0$ αυτού θερμότητα q ανά μονάδα επιφανείας για $t \geq 0$ ενώ η άλλη επιφάνεια αυτού κρατείται σε σταθερή θερμοκρασία u_0. Να προσδιοριστεί η θερμοκρασία $u(x,t)$ του τοίχου.

Λύση: Ο τοίχος εκτείνεται στην περιοχή $0 \leq x \leq L$ Έστω $u(x,t)$ η θερμοκρασία του. Η διαφορική εξίσωση, η οποία περιγράφει την κατανομή της είναι η

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3.3.20}$$

με συνοριακές συνθήκες

$$-k\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = q \, , \; u(L,t) = u_0 \tag{3.3.21}$$

και με αρχική συνθήκη

$$u(x,0) = 0 \, . \tag{3.3.22}$$

Οι συνοριακές συνθήκες είναι μη ομογενείς. Για να λύσουμε την εξίσωση αυτή θέτουμε

$$u(x,t) = \upsilon(x,t) + w(x)\ . \tag{3.3.23}$$

Η αρχική διαφορική εξίσωση γράφεται

$$\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial \upsilon}{\partial t} = \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2} + \frac{d^2 w}{dx^2}\ . \tag{3.3.24}$$

Ακολούθως απαιτούμε να ισχύουν οι επί μέρους εξισώσεις

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \tag{3.3.25}$$

με συνοριακές συνθήκες

$$w(L,t) = u_0\ ,\ -k\frac{dw(0,t)}{dx} = q \tag{3.3.26}$$

και

$$\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial \upsilon}{\partial t} = \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2} \tag{3.3.27}$$

με συνοριακές   συνθήκες

$$\upsilon(0,t) = 0, \frac{\partial \upsilon(L,t)}{\partial x} = 0\ . \tag{3.3.28}$$

Η λύση της (3.3.25) που ικανοποιεί τις αντίστοιχες συνθήκες (3.3.26) είναι

$$w = u_0 + \frac{q}{k}(L - x)\ .$$

Η λύση της (3.3.27) η οποία πληροί τις συνοριακές συνθήκες (3.3.28) είναι

$$\upsilon(x,t) = A\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2L}\, e^{-\left(\frac{(2k+1)\alpha\pi}{2L}\right)^2 t}\ ,$$

οπότε η γενική λύση της (3.3.20) είναι

$$u(x,t) = u_0 + \frac{q}{k}(L-x) + \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos\frac{(2k+1)\pi x}{2L}\, e^{-\left(\frac{(2k+1)\alpha\pi}{2L}\right)^2 t}\ . \tag{3.3.29}$$

Στην (3.3.29) εφαρμόζουμε την αρχική συνθήκη $u(x,0) = 0$ και ευρίσκουμε

$$-u_0 - \frac{q}{k}(L-x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos\frac{(2k+1)\pi x}{2L}\ .$$

Από αυτήν υπολογίζονται οι συντελεστές

$$A_k = -\frac{2}{L}\int_0^L \left(u_0 + \frac{q}{k}(L-x)\right)\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2L}\, dx\ .$$

Παράδειγμα 3. Η χρήση της συναρτήσεως δ στον υπολογισμό της θερμοκρασίας ράβδου πεπερασμένου μήκους

Δίδεται ράβδος μήκους L με συνοριακές συνθήκες $u(0,t)=0$, $u(L,t)=0$ και με μηδενική αρχική θερμοκρασία σε όλο το μήκος της . Δίδεται επίσης σημειακή πηγή θερμότητας , η οποία κατά την στιγμή $t=0$ αποθέτει ακαριαία στο σημείο $x=\xi$ της ράβδου ποσό θερμότητας Q . Με τούτο εννοούμε ότι με αρχή την στιγμή $t=0$ αποτίθεται στην ράβδο εντός απειροστού χρονικού διαστήματος dt ποσό θερμότητας Q , το οποίο κατανέμεται σε στοιχειώδες τμήμα $(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)$ αυτής περί την θέση $x=\xi$. Έστω $\varphi(\xi)$ η μεταβολή της θερμοκρασίας του τμήματος $(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)$ στο εν λόγω χρονικό διάστημα. Ορίζουμε την συνάρτηση

$$\delta_\varepsilon(x-\xi)=\begin{cases} 0, 0\le x<\xi-\dfrac{\varepsilon}{2} \\ \dfrac{1}{\varepsilon}, \xi-\dfrac{\varepsilon}{2}\le x\le \xi+\dfrac{\varepsilon}{2} \\ 0, \xi+\dfrac{\varepsilon}{2}<x\le L \end{cases} . \tag{3.3.30}$$

Κατόπιν τούτου μπορούμε να παραστήσουμε την θερμοκρασία οιουδήποτε σημείου της ράβδου με την συνάρτηση

$$\varphi(x)=\frac{Q}{c\rho}\delta_\varepsilon(x-\xi) . \tag{3.3.31}$$

Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την κατανομή της θερμοκρασίας κατά μήκος της ράβδου είναι η

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3.3.32}$$

με συνοριακές συνθήκες

$$u(0,t)=0 , \; u(L,t)=0 . \tag{3.3.33}$$

Η αρχική κατανομή της θερμοκρασίας κατά μήκος της ράβδου παρέχεται από την σχέση

$$u(x,0)=\varphi(x)=\frac{Q}{c\rho}\delta_\varepsilon(x-\xi) \tag{3.3.34}$$

και η παράπλευρος επιφάνεια αυτής είναι θερμικά μεμονωμένη. Η συνάρτηση $u(x,t)$ που ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες είναι

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k \sin\frac{k\pi x}{L}e^{-\frac{k^2\alpha^2\pi^2}{L^2}t} . \tag{3.3.35}$$

Στην τελευταία εφαρμόζουμε την αρχική συνθήκη (3.3.34). Κατά συνέπεια,

$$\varphi(x) = \frac{Q}{c\rho}\delta_\varepsilon(x-\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \, sin\frac{k\pi x}{L} \tag{3.3.36}$$

και από αυτήν προσδιορίζουμε τους συντελεστές Fourier A_k. Καθίσταται φανερό επομένως ότι η μελέτη του προβλήματος οδηγεί στην ανάπτυξη σε σειρά Fourier της συναρτήσεως $\delta_\varepsilon(x-\alpha)$ και στον επακόλουθο υπολογισμό των συντελεστών Fourier A_k. Έχουμε λοιπόν το ανάπτυγμα

$$\delta_\varepsilon(x-\xi) = \frac{c\rho}{Q}\sum_{k=1}^{\infty} A_k \, sin\frac{k\pi x}{L}\,, \tag{3.3.37}$$

οπότε

$$A_k = \frac{2Q}{Lc\rho}\int_{\xi-\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi+\frac{\varepsilon}{2}} \delta_\varepsilon(x-\xi)\, sin\frac{k\pi x}{L}dx = \frac{2Q}{Lc\rho\varepsilon}\int_{\xi-\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi+\frac{\varepsilon}{2}} sin\frac{k\pi x}{L}dx\,.$$

Το αποτέλεσμα της ολοκληρώσεως είναι

$$A_k = \frac{2Q}{Lc\rho}\left[\frac{sin\frac{k\pi\varepsilon}{2L}}{\frac{k\pi\varepsilon}{2L}}\right] sin\frac{k\pi\xi}{L}.$$

Επομένως $\delta_\varepsilon(x-\xi) = \frac{2Q}{Lc\rho}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{sin\frac{k\pi\varepsilon}{2L}}{\frac{k\pi\varepsilon}{2L}}\right] sin\frac{k\pi\xi}{L}\, sin\frac{k\pi x}{L}$.

Όταν το $\varepsilon \to 0$, το $A_k \to \frac{2Q}{Lc\rho} sin\frac{k\pi\xi}{L}$. Αν λοιπόν συμβολίσουμε

$$\delta(x-\xi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(x-\xi)\,,$$

προκύπτει

$$\delta(x-\xi) = \frac{2}{L}\sum_{k=1}^{\infty} sin\frac{k\pi\xi}{L}\, sin\frac{k\pi x}{L}\,. \tag{3.3.38}$$

Τούτο σημαίνει ότι η θερμότητα Q που δίδεται στην ράβδο κατά την στιγμή $t=0$, παρέχεται σε ένα σημείο αυτής, το $x=\xi$. Η συνάρτηση δ είναι παντού μηδενική εκτός από το σημείο $x=\xi$.

Από τις (3.3.36) και (3.3.38) διαπιστώνουμε ότι

$$\frac{Q}{c\rho}\frac{2}{L}\sum_{k=1}^{\infty} sin\frac{k\pi\xi}{L}\, sin\frac{k\pi x}{L} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \, sin\frac{k\pi x}{L}\,.$$

Άρα

$$A_k = \frac{2Q}{L\rho c} \sin\frac{k\pi\xi}{L} . \qquad (3.3.39)$$

Επομένως η (3.3.35) γίνεται

$$u(x,t) = \frac{2Q}{L\rho c} \sum_{k=1}^{\infty} \sin\frac{k\pi\xi}{L} \sin\frac{k\pi x}{L} e^{-\frac{k^2\alpha^2\pi^2}{L^2}t} . \qquad (3.3.40)$$

Η (3.3.40) συμφωνεί με την (3.3.12) και δίδει κατά την στιγμή t την θερμοκρασία του σημείου x της ράβδου $0 \le x \le L$ όταν κατά την στιγμή $t = 0$ αποτίθεται στο σημείο $x = \xi$ της ράβδου ακαριαία από θερμική πηγή θερμότητα Q.

Αν η θερμότητα που παρέχεται ακαριαία κατά την στιγμή $t = 0$ χορηγείται σε ολόκληρη την ράβδο και η αρχική κατανομή της θερμοκρασίας δίδεται από την συνάρτηση $u(x,0) = \varphi(x)$, η θερμοκρασία του σημείου x της ράβδου κατά την στιγμή t δίδεται από το ολοκλήρωμα της (3.3.40) ως προς την μεταβλητή ξ με όρια $(0,L)$,

$$u(x,t) = \frac{2}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^L \varphi(\xi) \sin\frac{k\pi\xi}{L} d\xi \right) \sin\frac{k\pi x}{L} e^{-\frac{k^2\alpha^2\pi^2}{L^2}t} . \qquad (3.3.41)$$

Ενότητα 8: Εξισώσεις ελλειπτικού τύπου

Παράδειγμα 1.Τετραγωνική πλάκα με πλευρά μήκους L και με θερμικά μεμονωμένες τις επιφάνειες αυτής, έχει τις τρεις εκ των πλευρών της σε θερμοκρασία 0 C^o και την τέταρτη σε θερμοκρασία U. Ζητείται η κατανομή της θερμοκρασίας επ' αυτής.

Οι συνοριακές συνθήκες που διέπουν το πρόβλημα είναι

$$u(0,y) = 0 , u(L,y) = 0 , u(x,0) = 0 , u(x,L) = U . \qquad (4.1.2)$$

Θα λύσουμε την εξίσωση του Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ με την μέθοδο των χωριζομένων μεταβλητών. Προς τούτο θέτουμε στην διαφορική αυτή εξίσωση $u = X(x)Y(y)$ οπότε παίρνουμε

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -p^2 .$$

Επομένως έχουμε προς λύση τις εξισώσεις

$$X'' + p^2 X = 0, Y'' - p^2 Y = 0 ,$$

όπου p είναι η σταθερά του χωρισμού των μεταβλητών. Οι λύσεις αυτών είναι

$$X = A\cos px + G\sin px, Y = C\cosh py + D\sinh py\,. \tag{4.1.3}$$

Κατά συνέπεια

$$u(x,y) = XY = (A\cos px + G\sin px)(C\cosh py + D\sinh py)\,.$$

Η συνθήκη $u(0,y)=0$ δίδει $A=0$. Επίσης η συνθήκη $u(x,0)=0$ δίδει $C=0$. Τέλος η συνθήκη $u(L,y)=0$ δίδει $pL = m\pi$, όπου $m = 0,1,2,3,...$. Θέτουμε $B = GD$. Άρα η λύση γράφεται

$$u_m(x,y) = B_m \sin\frac{m\pi x}{L}\sinh\frac{m\pi y}{L} \tag{4.1.4}$$

και σύμφωνα με το αξίωμα της επαλληλίας η γενική λύση του προβλήματος είναι η ακόλουθος

$$u(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin\frac{m\pi x}{L}\sinh\frac{m\pi y}{L}\,. \tag{4.1.5}$$

Εφαρμόζουμε στην (4.1.5) την συνθήκη $u(x,L)=U$, οπότε η (4.1.5) δίδει

$$U = \sum_{m=1}^{\infty} (B_m \sinh m\pi)\sin\frac{m\pi x}{L}\,. \tag{4.1.6}$$

Ακολούθως από τις συνθήκες ορθογωνιότητας, οι οποίες δίδονται στη υποενότητα 1.8 ,υπολογίζουμε τους συντελεστές B_m.

$$B_m \sinh m\pi = \frac{2}{L}\int_0^L U\sin\frac{m\pi x}{L}dx = \frac{2U}{m\pi}(1-\cos m\pi)\,. \tag{4.1.7}$$

Συνεπώς

$$u(x,y) = \frac{2U}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1-\cos m\pi}{m\sinh m\pi}\sin\frac{m\pi x}{L}\sinh\frac{m\pi y}{L}\,. \tag{4.1.8}$$

Και επειδή το $1-\cos m\pi$ είναι διάφορο του μηδενός για περιττές μόνο τιμές του m, γράφουμε

$$u(x,y) = \frac{4U}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi x}{L}\sinh\frac{(2n+1)\pi y}{L}}{(2n+1)\sinh(2n+1)\pi}\,.$$

Παράδειγμα 2. Δύο επάλληλες πλάκες καταλαμβάνουν την περιοχή του χώρου, η οποία ορίζεται από τα επίπεδα $y=0, y=b$ και $x=0$. Η μια πλάκα συνίσταται από υλικό θερμικής αγωγιμότητας k_1 και τα όριά της κατά μήκος του άξονος Oy είναι $0 \le y \le h$ και η άλλη συνίσταται από υλικό θερμικής αγωγιμότητας k_2 και τα όριά της είναι $h \le y \le b$. Να προσδιοριστεί η θερμοκρασία ισορροπίας .

Δίδεται ότι οι επιφάνειες $y=0, y=b$ ευρίσκονται σε θερμοκρασία μηδέν και η επιφάνεια $x=0$ σε θερμοκρασία U .

Λύση. Η διαφορική εξίσωση της κατανομής της θερμοκρασίας είναι

$$\nabla\cdot(k\nabla u)=0, \tag{4.1.18}$$

όπου

$$k=\begin{cases}k_1, 0\le y\le h\\ k_2, h\le y\le b\end{cases}$$

με συνοριακές συνθήκες

$$u(0,y)=U,\ u(x,0)=0,\ u(x,b)=0.$$

Επειδή η θερμική αγωγιμότητα k του μέσου είναι κατά τμήματα συνεχής , χωρίζουμε το πρόβλημα σε δύο επί μέρους προβλήματα, ένα για έκαστο υλικό. Εντός εκάστης πλάκας η θερμοκρασία πληροί την εξίσωση $\nabla^2 u_1=0$, $\nabla^2 u_2=0$.

Επίσης, λόγω της συνεχείας των συναρτήσεων της θερμοκρασίας και της αγωγής της θερμότητας κατά μήκος μιας γραμμής , η οποία τέμνει την διαχωριστική επιφάνεια των πλακών, επί της διαχωριστικής επιφανείας ισχύει

$$u_1(x,h)=u_2(x,h),\ k_1\frac{\partial u_1(x,h)}{\partial n}=k_2\frac{\partial u_2(x,h)}{\partial n}.$$

Για την επίλυση των εξισώσεων του Laplace θέτουμε

$$u_1(x,y)=X(x)\hat{Y}(y),$$

$$u_2(x,y)=X(x)\breve{Y}(y),$$

και οι συνοριακές συνθήκες γράφονται

$$\hat{Y}(0)=0,\ \breve{Y}(b)=0,\ \hat{Y}(h)=\breve{Y}(h),\ k_1\frac{d\hat{Y}(h)}{dy}=k_2\frac{d\breve{Y}(h)}{dy}.$$

Καταλήγουμε συνεπώς στις εξισώσεις $X''-p^2X=0$, $\hat{Y}''+p^2\hat{Y}=0$, $\breve{Y}''+p^2\breve{Y}=0$ (4.1.19)

Επιλύοντες την $\nabla^2 u_1=0$ και εφαρμόζοντες την συνθήκη $\hat{Y}(0)=0$ λαμβάνουμε

$$\hat{Y}=B_1\sin py. \tag{4.1.20}$$

Όσον αφορά στην εξίσωση $X''-p^2X=0$, η λύση , η οποία παραμένει πεπερασμένη όταν $x\to\infty$ είναι

$$X=Ae^{-px}.$$

Για την επίλυση της $\nabla^2 u_2=0$ θέτουμε $y^*=b-y$ και ευρίσκουμε τελικά

$$\breve{Y} = B_2 \sin py^* = B_2 \sin p(b-y)\,. \qquad (4.1.21)$$

Από τις (4.1.20) και (4.1.21)και κατόπιν εφαρμογής της συνοριακής συνθήκης $\widehat{Y}(h) = \breve{Y}(h)$ συμπεραίνουμε

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{\sin p(b-h)}{\sin ph}\,.$$

Επομένως

$$\widehat{Y} = \frac{\sin py}{\sin ph}\ ,\ \breve{Y} = \frac{\sin p(b-y)}{\sin p(b-h)}\,. \qquad (4.1.22)$$

Τέλος από την (4.1.22) και την συνθήκη $k_1 \frac{d\widehat{Y}(h)}{dy} = k_2 \frac{d\breve{Y}(h)}{dy}$ οδηγούμεθα στην υπερβατική εξίσωση

$$k_1 \tan p(b-h) + k_2 \tan ph = 0\,. \qquad (4.1.23)$$

Έστω $p_1, p_2, \ldots, p_n$ οι θετικές ιδιοτιμές της (4.1.23)και $\widehat{Y}_1, \widehat{Y}_2, \ldots, \widehat{Y}_n$, $\breve{Y}_1, \breve{Y}_2, \ldots, \breve{Y}_n$ οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις, οι οποίες παράγονται από τις σχέσεις (4.1.22). Η γενική λύση της (4.1.18) γράφεται

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-p_n x} Y_n\ , \qquad (4.1.24)$$

όπου

$$Y_n = \begin{cases} \widehat{Y}_n = \dfrac{\sin p_n y}{\sin p_n h}, 0 \le y \le h \\ \breve{Y}_n = \dfrac{\sin p_n (b-y)}{\sin p_n (b-h)}, h \le y \le b \end{cases}.$$

Από την θεωρία της ορθογωνιότητας των ιδιοσυναρτήσεων γνωρίζουμε ότι στο γενικό πρόβλημα συνοριακών τιμών η συνθήκη της ορθογωνιότητας των ιδιοσυναρτήσεων περιέχει την συνάρτηση βάρους . Στο παρόν παράδειγμα η συνάρτηση βάρους είναι η τιμή k_i της θερμικής αγωγιμότητας των πλακών , όπως προκύπτει από τις (4.1.19), οι οποίες γράφονται ως $\frac{d}{dy}\left[k_i Y_n'\right] + \left[p^2 k_i Y_n\right] = 0$. Κατά συνέπεια και η ιδιοσυνάρτηση Y_n μεταβάλλεται στο διάστημα ολοκληρώσεως $(0,b)$ η δε τιμή της εξαρτάται από την τιμή της σταθεράς k στα διαστήματα $(0,h)$ και (h,b). Η συνθήκη ορθογωνιότητας για τις ιδιοσυναρτήσεις Y_n γράφεται

$$\left\| Y^2 \right\| = \int_0^b w(y) Y_i Y_j dy = \int_0^h k_1 \widehat{Y}_n^2 dy + \int_h^b k_2 \breve{Y}_n^2 dy\,.$$

Από αυτήν την σχέση και χρησιμοποιώντας την (4.1.23) ευρίσκουμε

$$\left\| Y^2 \right\| = \frac{k_1 h}{2 \sin^2 p_n h} + \frac{k_2 (b-h)}{2 \sin^2 p_n (b-h)}\,.$$

Εν συνεχεία εφαρμόζουμε στην (4.1.24) την συνοριακή συνθήκη $u(0,y) = U$ και υπολογίζουμε τους συντελεστές A_n .

$$A_n = \frac{U}{\left\|Y^2\right\|}\left(\int_0^h k_1 \widehat{Y}_n dy + \int_h^b k_2 \breve{Y}_n dy\right) .$$

Τελικά

$$A_n = \frac{U}{\left\|Y^2\right\| p_n}\left(\frac{k_1}{\sin p_n h} + \frac{k_2}{\sin p_n (b-h)}\right).$$

Παράδειγμα 3. Να υπολογιστεί η κατανομή της θερμοκρασίας στην κατάσταση ισορροπίας σε κύλινδρο ακτίνας α και ύψους L , στον οποίο η άνω βάση $z = L$ ευρίσκεται σε θερμοκρασία $\varphi(r)$ ενώ όλες οι άλλες επιφάνειες έχουν θερμοκρασία μηδέν. Να γίνει εφαρμογή για $\varphi(r) = T_0$.

Λύση. Η διαφορική εξίσωση της κατανομής της θερμοκρασίας στην κατάσταση ισορροπίας είναι

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 . \qquad (4.3.9)$$

Οι συνοριακές συνθήκες , οι οποίες διέπουν το πρόβλημα είναι

$$u(r,L) = \varphi(r) ,\ u(r,0) = 0 ,\ u(\alpha,z)=0 .$$

Από την (4.3.9) με την μέθοδο των χωριζομένων μεταβλητών παίρνουμε την σχέση

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + \frac{Z''}{Z} = 0 \quad ,$$

οπότε

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} = -\frac{Z''}{Z} = -p^2$$

και επομένως

$$Z'' - p^2 Z = 0 \ \text{και}\ r^2 R'' + rR' + p^2 r^2 R = 0 .$$

Η πρώτη εξ αυτών έχει λύση

$$Z = a \cosh pz + b \sinh pz$$

και λόγω της συνοριακής συνθήκης $u(r,0)=0$ προκύπτει $a=0$, Επομένως

$$Z = b\,sinh\,pz \quad .$$

Η δεύτερη έχει λύση

$$R = CJ_0(pr) + GY_0(pr) \ .$$

Επειδή η Y_0 παρουσιάζει ασυνέχεια στο σημείο $r=0$, πρέπει $G=0$. Επίσης για $r=\alpha$ είναι $u(\alpha,z)=0$.

Συνεπώς $J_0(p\alpha)=0$. Η εξίσωση αυτή έχει k θετικές ρίζες, τις $p_k\alpha=\lambda_k$, όπου $k=1,2,\ldots$. Η λύση της (4.3.9) είναι επομένως

$$u_k(r,z) = A_k J_0\left(\frac{\lambda_k r}{\alpha}\right) sinh\left(\frac{\lambda_k z}{\alpha}\right)$$

και η γενική λύση είναι

$$u(r,z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k J_0\left(\frac{\lambda_k r}{\alpha}\right) sinh\left(\frac{\lambda_k z}{\alpha}\right) \quad .$$

Στην σχέση αυτή εφαρμόζουμε την συνθήκη $u(r,L)=\varphi(r)$ και παίρνουμε

$$\varphi(r) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k J_0\left(\frac{\lambda_k r}{\alpha}\right) sinh\left(\frac{\lambda_k L}{\alpha}\right)$$

οπότε

$$A_k\, sinh\left(\frac{\lambda_k L}{\alpha}\right) = \frac{2}{\alpha^2 J_1^2(\lambda_k)} \int_0^{\alpha} r J_0\left(\frac{\lambda_k r}{\alpha}\right)\varphi(r)dr \ .$$

Όταν $\varphi(r)=T_0$ η συνοριακή συνθήκη γίνεται

$$T_0 = \sum_{k=1}^{\infty} A_k J_0\left(\frac{\lambda_k r}{\alpha}\right) sinh\left(\frac{\lambda_k L}{\alpha}\right).$$

Εν συνεχεία στις εκφράσεις των συντελεστών A_k αλλάζουμε την μεταβλητή από r σε $r^* = \dfrac{r}{\alpha}$ και τα όρια της νέας μεταβλητής r^* είναι πλέον $(0,1)$. Συνεπώς η συνοριακή συνθήκη γράφεται

$$T_0 = \sum_{k=1}^{\infty} A_k J_0(\lambda_k r^*)\, sinh\left(\frac{\lambda_k L}{\alpha}\right)$$

και από αυτήν προκύπτει

$$A_k\, sinh\left(\frac{\lambda_k L}{\alpha}\right) = \frac{2T_0}{J_1^2(\lambda_k)} \int_0^1 r^* J_0(\lambda_k r^*)dr^* = \frac{2T_0}{J_1^2(\lambda_k)\lambda_k^2}\Big[r^*\lambda_k J_1(\lambda_k r^*)\Big]_0^1 = \frac{2T_0}{J_1(\lambda_k)\lambda_k} \ .$$

Επομένως

$$u(r,z) = 2T_0 \sum_{k=0}^{1} \frac{1}{J_1(\lambda_k)\lambda_k} \frac{J_0\left(\frac{\lambda_k r}{\alpha}\right) \sinh\left(\frac{\lambda_k z}{\alpha}\right)}{\sinh\left(\frac{\lambda_k L}{\alpha}\right)}$$

Ενότητα 9: Εξισώσεις υπερβολικού τύπου

Οι μόνες κλειστές λύσεις της εξισώσεως του Legendre υπάρχουν για $n = 0,1,2,3,\ldots$.

Παράδειγμα 1. Να ευρεθεί το δυναμικό εντός σφαίρας μοναδιαίας ακτίνας, της οποίας το δυναμικό επιφανείας δίδεται από την σχέση $u(1,\theta,\varphi)=f(\theta)$**.**

Λύση: Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει το πρόβλημα είναι η (4.4.2) . Η εξίσωση αυτή ανάγεται στις επί μέρους εξισώσεις (4.4.3) και (4.4.8) με λύσεις

$$R = Ar^n + Br^{-(n+1)} \text{ και } \Theta = CP_n(\xi) + DQ_n(\xi) \text{ , όπου } \xi = \cos\theta .$$

Η συνάρτηση $Q_n(\xi)$ εμφανίζει ασυνέχεια στα σημεία $\xi = \pm 1$. Συνεπώς θέτομε $D = 0$. Επίσης η λύση καθίσταται άπειρη στο κέντρο της σφαίρας , οπότε θέτομε $B = 0$. Επομένως η λύση της (4.4.2) είναι

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\xi) . \qquad (4.4.10)$$

Η συνοριακή συνθήκη που πρέπει να πληρούται είναι η

$$f(1,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos\theta) . \qquad (4.4.11)$$

Για να υπολογίσομε τους συντελεστές A_n χρησιμοποιούμε την συνθήκη ορθογωνιότητας των πολυωνύμων Legendre, η οποία είναι

$$\int_{-1}^{1} P_n(\xi)P_m(\xi)d\xi = 0 \text{ για } n \neq m , \quad \int_{-1}^{1} P_n(\xi)P_m(\xi)d\xi = \frac{2}{2n+1} \text{ για } n = m .$$

Επομένως πολλαπλασιάζομε τα μέλη της (4.4.11) επί $P_n(\cos\theta)\sin\theta$ και ακολούθως ολοκληρώνομε ως προς θ με όρια τα $(0,\pi)$,οπότε λαμβάνομε

$$\int_0^{\pi} f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \int_0^{\pi} P_n(\cos\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \int_{-1}^{1} P_n(\xi)P_n(\xi)d\xi\,.$$

Άρα

$$A_n = \frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi} f(\theta)P(\cos\theta)\sin\theta d\theta\,.$$