3ο φυλλάδιο ασκήσεων Γενικής Σχετικότητας
Κοσμολογικοί και σφαιρικά συμμετρικοί χωρόχρονοι

1. Θεωρείστε ένα σύμπαν Ρόμπερτσον-Γουώκερ που περιέχει ακτινοβολία, σκόνη και κοσμολογική σταθερά Λ.

   (α') Δείξτε ότι η πυκνότητα ενέργειας ρ και η πίεση P δίνονται από τις εξισώσεις

   $$\rho(t) = \rho_{m0}\frac{a_0^3}{a^3} + \rho_{r0}\frac{a_0^4}{a^4} \quad P = \frac{1}{3}\rho_{r0}\frac{a_0^4}{a^4}, \tag{1}$$

   όπου ρ_{m0} η πυκνότητα ενέργειας σκόνης σήμερα, ρ_0 η πυκνότητα ενέργειας ακτινοβολίας σήμερα και a_0 ο παράγοντας κλίμακας σήμερα.

   (β') Ορίστε τις αδιάστατες ποσότητες $x = a/a_0$ και $\tau = t/a_0$. Δείξτε ότι οι εξισώσεις Ρόμπερτσον-Γουόκερ γράφονται ως

   $$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x) = -k, \tag{2}$$

   όπου η τελεία σημαίνει παράγωγος ως προς το τ και

   $$V(x) = -\frac{\mu}{x} - \frac{\nu}{x^2} - \lambda x^2, \tag{3}$$

   όπου $\mu = 8\pi\rho_{m0}a_0^2 > 0, \nu = 8\pi\rho_{r0}a_0^2 > 0, \lambda = \frac{1}{3}\Lambda a_0^2$, είναι αδιάστατες ποσότητες.

   (γ') Οι λύσεις των εξισώσεων Ρόμπερτσον-Γουώκερ εξαρτώνται από τις τιμές του k και το πρόσημο του λ που καθορίζει τη μορφή του δυναμικού. Μελετήστε ποιοτικά τις λύσεις των εξισώσεων, και σχηματίστε έναν πίνακα με τη συμπεριφορά του x για $\tau \to 0$ και $\tau \to \infty$ για όλες τις δυνατές τιμές των k και λ.

   (δ') Εξετάστε αναλυτικά την περίπτωση $k = 1$, $\lambda > 0$.

2. Οι γεωδεσιακές στο χωροχρόνο Σβάρτσιλντ ικανοποιούν την εξίσωση

   $$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + V(r) = \frac{1}{2}\epsilon^2, \tag{4}$$

   όπου $V(r) = \frac{1}{2}\kappa - \kappa\frac{M}{r} + \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{M\ell^2}{r^3}$, $\kappa = 1$ για χρονοειδείς και $\kappa = 0$ για φωτοειδείς καμπύλες.

   Βρείτε τις γεωδεσιακές που αντιστοιχούν σε κύκλο ($r =$ σταθ.) και προσδιορίστε πότε είναι ευσταθείς. Ποια είναι η μικρότερη δυνατή ακτίνα ευσταθούς τροχιάς;

3. Θεωρείστε χρονοειδείς γεωδεσιακές στο χωροχρόνο Σβάρτσιλντ.

   (α') Δείξτε ότι αν το περίαστρο (σημείο ελάχιστου r) αντιστοιχεί σε τιμές όπου $M/r \ <<, 1$, οι τροχιές είναι περίπου κεπλεριανές.

   (β') Δείξτε ότι για $\ell/M \leq 2\sqrt{3}$ δεν υπάρχει περίαστρο και το σώμα διασχίζει τον ορίζοντα $r = 2M$ και ότι για $2\sqrt{3} \leq \ell/M < 4$ υπάρχουν δέσμιες τροχιές, αλλά όλα τα σωμάτια με $\epsilon > 1$ διασχίζουν τον ορίζοντα.

   (γ') Αναλύστε τις υποπεριπτώσεις για $\ell/M > 4$.

4. Δείξτε ότι για κάθε σωμάτιο (όχι απαραίτητα σε ελεύθερη πτώση) που βρίσκεται στην περιοχή II του χωροχρόνου Σβάρτσιλντ η συντεταγμένη r ελαττώνεται με ρυθμό που ικανοποιεί $|dr/d\tau| \geq \sqrt{2M/r - 1}$. Από αυτό αποδείξτε ότι ο μέγιστος χρόνος ζωής ενός παρατηρητή στην περιοχή II είναι ίσος με πM. (Εκτιμήστε την τάξη μεγέθους για μια αστρική μελανή οπή και για μια υπερβαρέα μελανή οπή.)

5. Μελετήστε αστέρα μάζας M και ακτίνας R με σταθερή πυκνότητα ρ.

   (α') Υπολογίστε την ενέργεια σύνδεσης.

   (β') Λύστε την εξίσωση Οπενχάιμερ-Βολκόφ και βρείτε την εξίσωση για την πίεση

   $$\frac{3P+\rho}{P+\rho} = C\sqrt{1-\frac{8\pi\rho r^3}{3}}, \tag{5}$$

   όπου C σταθερά.

   (γ') Η σταθερά C γράφεται συναρτήσει της κεντρικής πίεσης P_0 παίρνοντας συνοριακές συνθήκες στο $r=0$ ή συναρτήσει του R παίρνοντας συνοριακές συνθήκες στο $r=R$. Δείξτε ότι

   $$R^2 = \frac{3}{8\pi\rho}\left[1-\left(\frac{\rho+P_0}{\rho+3P_0}\right)^2\right]. \tag{6}$$

   (δ') Αποδείξτε ότι

   $$R^2 \leq \frac{1}{3\pi\rho} \qquad M^2 \leq \frac{16}{243\pi\rho}. \tag{7}$$