2ο φυλλάδιο ασκήσεων Διαφορικής Γεωμετρίας για το μάθημα Γενικής Σχετικότητας

Μετρικές, συνδέσεις, καμπυλότητες

1. Θεωρείστε την επιφάνειας υπερβολοειδούς S που ορίζεται από την εξίσωση

$$x^2 + y^2 - z^2 = a^2 \tag{1}$$

για $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.

(α') Βρείτε την επαγομενη μετρική (από τη μετρική του $\mathbf{R}^3$ στο S).

(β') Βρειτε τις γεωδεσιακές του S (με την αφινική παραμετροποίηση).

2. Θεωρείστε τη γενικότερη δυνατή μετρική σε δύο διαστάσεις,

$$ds^2 = g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + 2g_{12}dx^1dx^2. \tag{2}$$

(α') Επιχειρηματολογήστε ότι πάντα μπορειτε να διαλέξετε συντεταγμένες x και y (συναρτήσεις των x^1, x^2) ώστε τοπικά να ισχυει ότι $ds^2 = f(x, y)(dx^2 + dy^2)$, για κάποια συνάρτηση f.

(β') Δείξτε ότι $R_{abcd} = K(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc})$, για κάποια συνάρτηση K.

3. Θεωρείστε τη διδιάστατη πολλαπλότητα H, με σημεία (x, y), όπου $y > 0$. Η H αντιστοιχεί στο άνω μισό του επιπέδου. Ορίζουμε τη μετρική Πουανκαρέ

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}. \tag{3}$$

(α') Γράψτε τις εξισώσεις γεωδεσιακών και βρείτε τις λύσεις τους.

(β') Υπολογίστε την απόσταση μεταξύ δύο σημείων (x_1, y_1) και (x_2, y_2).

(γ') Υπολογίστε το βαθμωτό Ricci και επιβεβαιώστε ότι είναι σταθερό.

4. Ο τόρος είναι μία διδιάστατη πολλαπλότητα που ορίζεται ως υποσύνολο του $\boldsymbol{R}^3$ μέσω των παραμετρικών εξισώσεων $x = (c + a\cos\theta)\cos\phi, y = (c + a\cos\theta)\sin\phi, z = a\sin\theta$, για $\theta, \phi \in [0, 2\pi)$.

(α') Δείξτε ότι η συνήθης μετρική στο $\boldsymbol{R}^3$ επάγει στον τόρο τη μετρική

$$ds^2 = a^2d\theta^2 + (c + a\cos\theta)^2d\phi^2. \tag{4}$$

(β') Δείξτε ότι το εμβαδόν του τόρου είναι $A = 4\pi^2ac$.

(γ') Βρείτε το αντίστοιχο βαθμωτό Ricci.

5. Τετρασδιάστατη πολλαπλότητα έχει μετρική

$$ds^2 = -N(t, \mathbf{x})^2dt^2 + \delta_{ij}dx^idx^i, \tag{5}$$

όπου $i, j = 1, 2, 3$.

(α') Υπολογίστε τα αντίστοιχα σύμβολα Christoffel.

(β') Υπολογίστε τον αντιστοιχο τανυστή Ricci.

6. Η μετρική μιας κυλινδρικά συμμετρικής κοσμικής χορδής είναι

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + A^2r^2d\theta^2 + dz^2 \tag{6}$$

όπου t παράμετρος χρόνου και r, θ, z οι συνήθεις κυλινδρικές συντεταγμένες, ($0 \le \theta \le 2\pi$).

(α') Γράψτε την εξίσωση γεωδεσιακών. Βρείτε τις γεωδεσιακές για r = σταθ., z = σταθ. Καθώς η γωνία θ είναι περιοδική συνάρτηση, μία περιστροφή κατά 2π θα πρέπει να επαναφέρει στο σύστημα στην αρχική του θέση. Δείξτε ότι αυτή η συμπεριφορά σημαίνει ότι στο επίπεδο $r-\theta$ η γεωμετρία που περιγράφει η (6) αντιστοιχεί σε επιφάνειες κώνου με άνοιγμα 2πA.

(β') Βρείτε τον τανυστή Ricci για τη μετρική (6).

7. Έστω q^a οι συντεταγμένες του θεσεογραφικού χώρου Q ενός μηχανικού συστήματος. Η κινητική ενέργεια K εκφράζεται συναρτήσει μίας Ριμάνιας μετρικής $m_{ab}(q)$ στο Q,

$$K = \frac{1}{2} m_{ab}(q) \dot{q}^a \dot{q}^b. \tag{7}$$

Απουσία δυναμικού, οι εξισώσεις Euler-Lagrange αντιστοιχούν σε γεωδεσιακές εξισώσεις ως προς τη μετρική m.

(α') Θεωρείστε Λαγκρανζιανή της μορφής $L = \frac{1}{2} m_{ab}(q) \dot{q}^a \dot{q}^b + A_a(q) \dot{q}^a + V(q)$, όπου A_a μία μονομορφή στο Q (π.χ. μαγνητικό δυναμικό) και V μία συνάρτηση δυναμικού. Γράψτε τις εξισώσεις Euler-Lagrange για αυτή τη Λαγκρανζιανή.

(β') Υπολογίστε τη συζυγη ορμή p_a και την αντίστοιχη Χαμιλτονιανή.

(γ') Θεωρείστε $A_a = 0$. Δείξτε ότι οι εξισώσεις κίνησης αντιστοιχούν σε γεωδεσιακές της μετρικής $[E - V(q)] m_{ij}(q)$ πάνω στην επιφάνεια σταθερής ενεργειας E. (Ο γρηγορότερος τρόπος να το δείξετε είναι συγκρίνοντας τη συνήθη Χαμιλτονιανή για το σύστημα με αυτή που αντιστοιχεί στις παραπάνω γεωδεσιακές.)