Ασκήσεις Γενικής Σχετικότητας

14 Δεκεμβρίου 2014

1 Αστέρας νετρονίων

Σχετική θεωρία: στατικές, σφαιρικά συμμετρικές λύσεις των εξισώσεων Einstein, εξίσωση Oppenheimer-Volkoff.

Μια στατική σφαιρικά συμμετρική λύση των εξισώσεων Einstein περιγράφεται από τις εξισώσεις

$$\frac{dm}{dr} = 4r^2\rho \tag{1}$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{(P+\rho)(m+4r^3P)}{r(r-2m)} \tag{2}$$

σε σύστημα μονάδων G = c = 1.

Για να λυθούν οι παραπάνω εξισώσεις πρέπει να δοθεί η καταστατική εξίσωση για την ύλη. Σ' αυτήν την άσκηση θα χρησιμοποιήσετε την καταστατική εξίσωση για ιδανικό αέριο εκφυλισμένων νετρονίων σε θερμοκρασία T =0.

$$\rho = K(\sinh t - t) \tag{3}$$

$$P = \frac{1}{3}K(\sinh t - 8\sinh\ (t/2) + 3t) \tag{4}$$

όπου $K = (m_n^4)/(32^2\hbar^3)$, με m_n τη μάζα του νετρονίου. Η ποσότητα t σχετίζεται με την πυκνότητα σωματιδίων n από τη σχέση

$$n = \frac{8}{3m_n}\sinh^3\frac{t}{4}. \tag{5}$$

1. Είναι χρήσιμο να εργαστείτε σε σύστημα μονάδων όπου $K = \frac{1}{4\pi}$. Υπολογίστε τις βασικές κλίμακες μήκους και μάζας σε αυτό το σύστημα σε km και ηλιακές μάζες αντίστοιχα.

2. Γράψτε το σύστημα διαφορικών εξισώσεων για το m και το t με βάση τα παραπάνω.

3. Το παραπάνω σύστημα θα το επιλύσετε αριθμητικά. Θα χρησιμοποιήσετε ως αρχικές συνθήκες $m(0) = 0$ και $t(0) = t_0$ και θα θεωρήσετε περίπου 20 διαφορετικές τιμές του t_0 μεταξύ $0,5$ και 6. Για κάθε τιμή του t_0 θα βρίσκετε την τιμή $r = R$ όπου η ποσότητα t (και άρα η πυκνότητα) μηδενίζεται. Η τιμή R αντιστοιχεί στην ακτίνα του αστέρα, ενώ η ποσότητα $M := m(R)$ στη μάζα του.

4. Θα παρατηρήσετε ότι υπάρχει μία μέγιστη τιμή μάζας M_{max} που μπορεί να έχει ο αστέρας. Δεν μπορεί να υπάρχει ομαλή λύση των εξισώσεων Einstein για $M > M_{max}$.Εκφράστε την τιμή του M_{max} σε ηλιακές μάζες και την αντίστοιχη ακτίνα σε km.

5. Για δύο διαφορετικές λύσεις με $M \simeq M_{max}$ υπολογίστε αριθμητικά την τιμή του ολικού αριθμού σωματιδίων

$$N = \int_0^R 4r^2 dr \frac{n(r)}{\sqrt{1 - \frac{2m(r)}{r}}}. \tag{6}$$

και την ενέργεια της ύλης

$$E = \int_0^R 4r^2 dr \frac{\rho(r)}{\sqrt{1 - \frac{2m(r)}{r}}}. \tag{7}$$

Σημειώνεται ότι $E > M$, καθώς στην ολική ενέργεια M συνεισφέρει και η «δυναμική ενέργεια» λόγω βαρυτικής αλληλεπίδρασης που παίρνει αρνητικές τιμές. Η τιμή της δυναμικής ενέργειας είναι $M - E$. Βρείτε επίσης ποιο κλάσμα της ενέργειας E αντιστοιχεί στη μάζα ηρεμίας των σωματιδίων (ίσο με Nm_n).

Παρατήρηση: Η μέγιστη μάζα που θα βρείτε είναι αρκετά μικρότερη από τις τιμές που θεωρούνται ρεαλιστικές. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η καταστατική εξίσωση αγνοεί τις πυρηνικές αλληλεπιδράσεις μεταξύ νετρονίων καθώς και το γεγονός ότι ένας πραγματικός αστέρας νετρονίων περιέχει και μικρές ποσότητες πρωτονίων και ηλεκτρονίων. Ωστόσο ακόμα και αυτό το μοντέλο αποδίδει σωστά την τάξη μεγέθους της μάζας και της ακτίνας των αστέρων νετρονίων.

2 Μοντέλο Robertson-Walker με δύο ρευστά

Σχετική θεωρία: λύσεις Robertson Walker

1. Θεωρείστε ένα μοντέλο Robertson-Walker για $k = 1$ και $= 0$, στο οποίο η ύλη αποτελείται από δύο ιδανικά ρευστά με εξισώσεις $P_1 = w_1\rho_1$ και $P_2 = w_2\rho_2$ αντίστοιχα. Θεωρείστε ότι τη χρονική στιγμή $t = t_0$, η σχετική αναλογία των δύο ρευστών δίνεται από το λόγο $= \rho_2(t_0)/\rho_1(t_0)$.

   Μελετήστε τις λύσεις των εξισώσεων Einstein για την περίπτωση $w_1 = 0$ και $w_2 = 1/3$. (Αν δεν υπήρχε η σκοτεινή ενέργεια, μια ρεαλιστική τιμή για το λ θα ήταν της τάξης του 0,01.)

2. Μελετήστε επίσης την περίπτωση που το πρώτο ρευστό είναι σκόνη (καταστατική εξίσωση $P_1 = 0$) και το δεύτερο αντιστοιχεί στο λεγόμενο αέριο Chaplygin με καταστατική εξίσωση $P_2 = -A/\rho_2, \ > 0$. (Το αέριο Chaplygin έχει προταθεί σαν ένα μοντέλο περιγραφής τόσο της σκοτεινής ύλης όσο και της σκοτεινής ενέργειας.)

Σημείωση. Μελέτη των λύσεων σημαίνει

1. ποιοτική περιγραφή της συμπεριφοράς τους (συστελλόμενη, διαστελλόμενη, επιταχυνόμενη, κοκ)

2. μελέτη της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς στα όρια $\alpha \to 0$ και $\alpha \to \infty$.

3 Γεωδεσιακές σε χωροχρόνο Schwarzschild

Σχετική θεωρία: λύση Schwarzschild, γεωδεσιακές, διατηρήσιμες ποσότητες.

Οι γεωδεσιακές εξισώσεις για ένα σωμάτιο μη-μηδενικής μάζας στο χωροχρόνο Schwarzschild είναι οι εξής.

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + V(l,r) = \epsilon^2, \tag{8}$$

$$V(l,r) = (1 - \frac{2M}{r})(1 + \frac{l^2}{r^2}) \tag{9}$$

όπου ϵ, l η ενέργεια και η στροφορμή ανά μονάδα μάζας αντίστοιχα και τ τ ο ιδιοχρόνος του σωματιδίου. Επίσης ισχύουν οι εξισώσεις

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{l}{r^2} \tag{10}$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{\epsilon}{1 - \frac{2M}{r}} \tag{11}$$

$$\theta = \pi/2. \tag{12}$$

1. Γράψτε τη διαφορική εξίσωση για την τροχιά του σώματος $r = r(\phi)$. Δείξτε ότι αν το περίαστρο (σημείο ελάχιστου r) αντιστοιχεί σε τιμές όπου $M/r <<, 1$, οι τροχιές είναι περίπου κεπλεριανές, εκτός από τη μετάπτωση του περίαστρου.

2. Δείξτε ότι για $l/M \leq 2\sqrt{3}$ δεν υπάρχει περίαστρο και το σώμα διασχίζει τον ορίζοντα $r = 2M$ και ότι για $2\sqrt{3} \leq l/M < 4$ υπάρχουν δέσμιες τροχιές, αλλά όλα τα σωμάτια με $\epsilon > 1$ διασχίζουν τον ορίζοντα. Αναλύστε τις υποπεριπτώσεις για $l/M > 4$.

3. Μελετήστε τις κυκλικές τροχιές και την ευστάθειά τους. Ειδικότερα μελετήστε που καταλήγει ένα σωμάτιο σε ασταθή κυκλική τροχιά όταν αυτή διαταράσσεται.

4. Βρείτε τις εξισώσεις κίνησης ενός φωτονίου και μελετήστε ποιοτικά τη συμπεριφορά των τροχιών. (Μπορείτε να βρείτε τις γεωδεσιακές εξισώσεις από αυτές για σωμάτιο μη μηδενικής μάζας στο όριο $l \to \infty$, $\epsilon \to \infty$, με το λόγο $l/\epsilon = b =$σταθερό. Η ποσότητα b καλείται παράμετρος κρούσης. Εναλλακτικά μπορείτε να βρείτε τις φωτοειδείς γεωδεσιακές της μετρικής.) Ειδικότερα βρείτε τις περιοχές παραμέτρων για τις οποίες το φωτόνιο μπορεί να περιστραφεί γύρω από το άστρο.

4 Interstellar

Στην ταινία Interstellar (C. Nolan, 2014) περιγράφεται μία περιστρεφόμενη μελανή οπή γύρω από την οποία περιστρέφεται ένας πλανήτης, που βρίσκεται υπό καθεστώς υψηλής χρονικής διαστολής. Μερικές ώρες παραμονής στον πλανήτη ισοδυναμούν με 25 χρόνια για μακρινό παρατηρητή. Ο σκοπός της άσκησης είναι να δειχθεί ότι αυτή η περιγραφή ειναι συμβατή με τη Γενική Σχετικότητα.

Η μετρική Kerr περιγράφει μία περιστρεφόμενη μελανή οπή,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right)dt^2 - \frac{4aMr}{\Sigma}\sin^2\theta dt d\phi + \left[r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2 r\sin^2\theta}{\Sigma}\right]\sin^2\theta d\phi^2 + \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 + \Sigma d\theta^2, \quad (13)$$

όπου $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$ και $\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta$. M είναι η μάζα της μελανής οπής και $a = J/M$ όπου J h στροφορμή της μελανής οπής. Ο ορίζοντας γεγονότων βρίσκεται στο $r = M + \sqrt{M^2 - a^2}$.

Στη συνέχεια θα μελετήσετε χρονοειδείς γεωδεσιακές της μετρικής Kerr.

1. Δειξτε ότι για μια χρονοειδή γεωδεσιακή $x^\mu)(\tau)$ οι ακόλουθες ποσότητες είναι σταθερές της κίνησης.

   (α') Ενέργεια ανά μονάδα μάζας: $\epsilon = -g_{t\mu}\dot{x}^\mu$,

   (β') Στροφορμή ανά μονάδα μάζας: $l = g_{\phi\mu}\dot{x}^\mu$

   (γ') Σταθερά Carter: $C = l^2 + cos^2\theta\left[a^2(1-\epsilon^2) + (l/\sin\theta)^2\right]$.

2. Εξετάστε τις γεωδεσιακές στο ισημερινό επίπεδο $\theta = \pi/2$. Δείξτε ότι ικανοποιούν την εξίσωση

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + V_{eff}(r) = \frac{\epsilon^2 - 1}{2}, \quad (14)$$

   όπου

$$V_{eff}(r) = -\frac{M}{r} + \frac{l^2 - a^2(\epsilon^2 - 1)}{2r^2} - \frac{M(l - a\epsilon)^2}{r^3}. \quad (15)$$

3. Δείξτε ότι οι κυκλικές τροχιές $r = R$ στο ισημερινό επίπεδο ($dr/d\tau = 0$, $\partial_r V_{eff}(R) = 0$) αντιστοιχούν σε λύσεις της εξίσωσης

$$MR^2 - [l^2 - a^2(\epsilon^2 - 1)]R + 3M(l - a\epsilon)^2 = 0. \quad (16)$$

4. Οι ευσταθείς λυσεις ικανοποιούν τη σχέση $\partial_r^2 V_{eff}(R) \geq 0$. Η ισότητα επιτυγχάνεται για την τελευταία ευσταθή τροχιά ISS (Innermost Stable Orbit). Υπολογίστε την ISS, και δειξτε ότι για την ακραία μελανή οπή όπου $a = M$

$$\epsilon = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad l = \frac{2M}{\sqrt{3}}, \qquad R = M. \quad (17)$$

   Παρατηρούμε ότι η ISS αντιστοιχει σε κίνηση πάνω στον ορίζοντα όπου $g_{00} = 0$, οπότε για τροχιές κοντά στην ISS η χρονική διαστολή μπορει να γίνει απροσδιόριστα μεγάλη. Άρα, το σενάριο του Interstellar ειναι συμβατό με τη γεωμετρία Kerr.

5 Αέριο φωτονίων υπό βαρυτική αλληλεπίδραση

Σχετική θεωρία: στατικές, σφαιρικά συμμετρικές λύσεις των εξισώσεων Einstein, εξίσωση Oppenheimer-Volkoff.

Μια στατική σφαιρικά συμμετρική λύση των εξισώσεων Einstein περιγράφεται από τις εξισώσεις

$$\frac{dm}{dr} = 4r^2\rho \tag{18}$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{(P+\rho)(m+4r^3P)}{r(r-2m)} \tag{19}$$

σε σύστημα μονάδων G = c = 1.

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Oppenheimer-Volkoff μελετήστε ένα αέριο φωτονίων μέσα σε ένα κουτί ακτίνας R. Η καταστατική εξίσωση είναι $P = 1/3\rho$, ενώ η θερμοκρασία του αερίου δίνεται από το νόμο Stefan-Boltzmann $\rho = \sigma T^4$.

1. Οι συνοριακές συνθήκες για αυτό το σύστημα είναι $m(0) = 0$ και $m(R) = M$, όπου η συνολική ενέργεια του αερίου. Οι εξισώσεις απλοποιούνται αν χρησιμοποιήσετε τις μεταβλητές $\xi = \log(r/R)$, $u = 2m/r$ και $v = 4\pi r^2\rho$ και παίρνουν τη μορφή ενός δισδιάστατου δυναμικού συστήματος. Μελετήστε ποιοτικά τη λύση που αντιστοιχεί στις παραπάνω συνθήκες και σχεδιάστε την αντίστοιχη καμπύλη στο επίπεδο u-v.

2. Λύστε τις εξισώσεις αριθμητικά, κάντε γραφική παράσταση του $u(R) = 2M/R$ ως συνάρτηση του $v(R)$ και υπολογίστε τη μέγιστη τιμή του λόγου $u(R)$ για την οποία μπορεί να υπάρξει λύση.

3. Η πυκνότητα εντροπίας του αερίου φωτονίων είναι $s = b\rho^{3/4}$ και άρα η συνολική εντροπία ισούται με

   $$S = b\int_0^R \frac{4r^2dr}{\sqrt{1-2m/r}}\rho^{3/4} \tag{20}$$

   Είναι χρήσιμο να χρησιμοποιήσουμε μονάδες όπου $\sigma = 1$, οπότε $b = 4/3$.

   Δείξτε ότι για τις λύσεις των εξισώσεων κίνησης η εντροπία είναι ίση με

   $$S = \frac{1}{6}(4\pi)^{1/4}\frac{v(R)+\frac{3}{2}u(R)}{v(R)^{1/4}\sqrt{1-u(R)}}. \tag{21}$$

   (Υπόδειξη: παραγωγίστε την Εξ. (22) ως προς R και χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Oppenheimer-Volkoff δείξτε ότι η παράγωγος αντιστοιχεί στην ποσότητα που ολοκληρώνεται στην Εξ. (21).

4. Αποδείξτε τον πρώτο νόμο της θερμοδυναμικής για το σύστημα, στη μορφή

   $$\delta M = T_*\delta S - P(4R^2)\delta R, \tag{22}$$

   όπου $P = P(R)$ η πίεση στο τοίχωμα του δοχείου και $T_* = T(R)\sqrt{1-2M/R}$ η θερμοκρασία όπως μετριέται από έναν παρατηρητή στο άπειρο.

6 Το σύμπαν του G'odel

Το σύμπαν του Godel περιγράφεται από τη μετρική

$$ds^2 = -(dt + e^x dz)^2 + dx^2 + dy^2 + \frac{1}{2}e^{2x}dz^2. \tag{23}$$

1. Δείξτε ότι η μετρική (24) είναι λύση των εξισώσεων Einstein για έναν τανυστή ενέργειας-τάσης που αντιστοιχεί σε συνδυασμό σκόνης (ιδανικό ρευστό με $P = 0$) και κοσμολογικής σταθεράς.

2. Δείξτε ότι τα διανυσματικά πεδία ∂_t, ∂_y, ∂_z, $\partial_x - z\partial_z$ και $-2e^{-x}\partial_t + z\partial_x + (e^{-2x} - \frac{1}{2}z^2)\partial_z$ είναι Killing. Αυτό σημαίνει ότι η ομάδα ισομετριών είναι πενταδιάστατη. Το σύμπαν του G'odel αποτελεί ομοιογενή λύση των εξισώσεων Einstein.

3. Δείξτε ότι το διάνυσμα ∂_t είναι εφαπτομενο σε γεωδεσιακές, αλλά δεν υπάρχουν επιφάνειες στο οποίο είναι κάθετο. Αυτό σημαίνει ότι οι κοσμογραμμές των σωματιδίων της σκόνης συστρέφονται μεταξύ τους.

4. Στην εξίσωση (24) παρατηρούμε ότι η συντεταγμένη y δεν αναμιγνύεται με τις υπόλοιπες. Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε χωρίς να χάνουμε τη γενικότητα την τρισδιάστατη μετρική που αντιστοιχεί σε y = σταθερό. Γράψτε την τρισδιάστατη αυτή μετρική ως προς τις συντεταγμένες r, ϕ, τ, όπου

$$e^x = \cosh(2r) + \sinh(2r)\cos\phi, \tag{24}$$
$$ze^x = \sqrt{2}\sinh(2r)\sin\phi, \tag{25}$$
$$\frac{1}{2}\phi + \frac{1}{2\sqrt{2}}(t - 2\tau) = \tan^{-1}(e^{-2r}\tan\phi/2). \tag{26}$$

   Δείξτε ότι στις παραπάνω συντεταγμένες η τρισδιάστατη μετρική γίνεται

$$ds^2 = 4\left[-d\tau^2 + dr^2 - (\sinh^4 r - \sinh^2 r)d\phi^2 - 2\sqrt{2}\sinh^2 r d\phi d\tau\right]. \tag{27}$$

5. Δείξτε ότι το διάνυσμα ∂_ϕ είναι χωροειδές για $r < r_c = ln(1+\sqrt{2})$, φωτοειδές για $r = r_c$ και χρονοειδές για $r > r_c$. Δεδομένου ότι το φ είναι μεταβλητή γωνίας, οι ολοκληρωτικές καμπύλες του φ είναι κλειστές, άρα για $r > r_c$ ορίζουν κλειστές χρονοειδείς καμπύλες. Δηλαδή δυνατές κοσμογραμμές για φυσικά σώματα που επιστρέφουν στο παρελθόν. Καθώς η μετρική του Godel είναι ομοιογενής, ο άξονας r = 0 δεν είναι ξεχωριστός και αυτή η συμπεριφορά υπάρχει γύρω από οποιοδήποτε σημείο του χώρου. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν από κάθε σημείο του χωροχρόνου περνούν κλειστές χρονοειδείς καμπύλες.

6. Παρατηρούμε ότι τα διανύσματα ∂_ϕ και ∂_τ είναι Killing στην Εξ. (28). Λαμβάνοντας αυτό υπόψη μελετήστε τη συμπεριφορά φωτοειδών γεωδεσιακών που ξεκινούν από τον άξονα $r = 0$. Δείξτε ότι απομακρύνονται μέχρι μία ανώτατη τιμή του r και στη συνέχεια επιστρέφουν και ξανασυναντούν τον άξονα $r = 0$ μια μεταγενέστερη χρονική στιγμή. Αυτό σημαίνει ότι ο παρατηρητής στο $r = 0$ θα δει τα φωτεινά σήματα τα οποία ο ίδιος εξέπεμψε σα να έχουν «ανακλαστεί».

7 Μετρική του Vaidya για ακτινοβολώντα αστέρα

Μία σφαιρικά συμμετρική μετρική που αντιστοιχεί σε ένα σφαιρικό σώμα που ακτινοβολεί είναι η μετρική του Vaidya

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m(u)}{r}\right) du^2 - 2dudr + r^2 d\Omega^2. \tag{28}$$

1. Δείξτε ότι το διανυσματικό πεδίο ∂_u είναι φωτοειδές και ότι στην περίπτωση $m(u) =$σταθ., η μετρική (29) είναι ισομετρική με τη Schwarzschild.
2. Υπολογίστε τον τανυστή Ricci που αντιστοιχεί στην (29) και μέσω των εξισώσεων Einstein βρείτε τον αντίστοιχο τανυστή ενέργειας-τάσης $T_{\mu\nu}$.
3. Θεωρείστε παρατηρητή κινούμενο ακτινικά με ακτινική ταχύτητα $U = dr/d\tau$. Βρείτε το διάνυσμα u_μ της 4-ταχύτητας. Ορίζοντας ως $q = u^\mu u^\nu T_{\mu\nu}$ την πυκνότητα ενέργειας ως προς αυτόν τον παρατηρητή, δείξτε ότι

$$q = -\frac{1}{4\pi r^2}\frac{dm/du}{(U+\gamma)^2}), \tag{29}$$

   όπου $\gamma = [1 + U^2 - 2m(u)/r]^{-1}$. Καθώς η πυκνότητα ενέργειας πρέπει να είναι θετική, συμπεραίνουμε ότι η λύση είναι φυσική μόνο αν $dm/du < 0$, δηλαδή αν η «μάζα» ελαττώνεται λόγω της ακτινοβολίας.
4. Δείξτε ότι η επιφάνεια $r = 2m(u)$ είναι χωροειδής και άρα κανένα φυσικό σωμάτιο, κινούμενο σε χρονοειδείς ή φωτοειδείς καμπύλες δεν μπορεί να βρεθεί σε αυτή.
5. Γράψτε τις γεωδεσιακές εξισώσεις που αντιστοιχούν στην (29). . Δείξτε επίσης ότι η ενέργεια ανά μονάδα μάζας ϵ οριζόμενη ως $\epsilon m = -p_\mu(\partial_u)^\mu$ ενός σωματιδίου που κινείται σε γεωδεσιακές μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση $d\epsilon/d\tau = 4\pi r q$.
6. Χρησιμοποιώντας τη μετρική Vaidya για να περιγράψουμε έναν αστέρα που ακτινοβολεί, ορίζουμε τη φωτεινότητά του αστέρα ως $L = 4r^2 q$, υπολογισμένο στο όριο $r \to \infty$ και $U = 0$ (στατικό παρατηρητή στο άπειρο). Χρησιμοποιώντας τις τιμές για τη μάζα του Ήλιου και τη φωτεινότητά του εκτιμείστε την τάξη μεγέθους του ρυθμού μεταβολής ενέργειας για μια γεωδεσιακή τροχιά αντίστοιχη τη Γης.

8 Κυλινδρική κοσμική χορδή

Η μετρική μιας κυλινδρικά συμμετρικής κοσμικής χορδής είναι

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + A^2 r^2 d\theta^2 + dz^2 \tag{30}$$

όπου t παράμετρος χρόνου και r, θ, z οι συνήθεις κυλινδρικές συντεταγμένες, ($0 \leq \theta \leq 2\pi$).

1. Γράψτε την εξίσωση γεωδεσιακών. Βρείτε τις γεωδεσιακές για r = σταθ., z = σταθ. Καθώς η γωνία θ είναι περιοδική συνάρτηση, μία περιστροφή κατά 2π θα πρέπει να επαναφέρει στο σύστημα στην αρχική του θέση. Δείξτε ότι αυτή η συμπεριφορά σημαίνει ότι στο επίπεδο ρ-θ η γεωμετρία που περιγράφει η (31) αντιστοιχεί σε επιφάνειες κώνου με άνοιγμα 2πA.

2. Βρείτε τον τανυστή Ricci για τη μετρική (31). Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Einstein, βρείτε τον τανυστή τάσης-ενέργειας $T_{\mu\nu}$ που αντιστοιχεί στη μετρική (31). Ειδικότερα, δείξτε ότι οι μόνες μη-μηδενικές συνιστώσες του $T_{\mu\nu}$ είναι οι $T_{rr} = -T_{tt} = \frac{\mu}{r}\delta(r)$, όπου $\mu = \frac{1-A}{4A}$. Αυτό σημαίνει ότι ο τανυστής τάσης-ενέργειας μηδενίζεται παντού εκτός από την ευθεία r = 0, όπου εμφανίζει έναν απειρισμό που αντιστοιχεί σε ένα νήμα απείρου μήκους και γραμμική πυκνότητα ενέργειας ανάλογη του μ.

3. Η ευθεία r = 0 αντιστοιχεί σε μοναδικότητα του χωροχρόνου που είναι αρκετά ομαλή (καλείται κωνική μοναδικότητα). Προσδιορίστε τις χρονεοειδεις και φωτοειδείς γεωδεσιακές της (31) και εξετάστε τη συμπεριφορά τους γύρω από το r = 0. Δείξτε ότι δεν εμφανίζουν κάποια παθολογική συμπεριφορά.

9 Η κοσμολογία Lemaitre-Tolman-Bondi

Θεωρείστε γενική σφαιρικά συμμετρική μετρική

$$ds^2 = -dt^2 + X^2(t,r)dr^2 + A^2(r,t)d\Omega^2. \tag{31}$$

Παρατηρήστε ότι ειδική περίπτωση αυτής της μετρικής είναι η Robertson-Walker, όταν $X(r,t) = \alpha(t)/\sqrt{1-kr^2}, A(r,t) = \alpha(t)r$.

1. Βρείτε τον τανυστή Ricci για τη μετρική (32).

2. . Γράψτε τις εξισώσεις Einstein για ύλη που αντιστοιχεί σε σκόνη, $T_{\mu\nu} = -\delta^0_\mu\delta^0_\nu\rho(r,t)$. Δείξτε ότι μία από τις εξισώσεις Einstein συνεπάγεται ότι $(r,t) = C(r)A'(r,t)$ για κάποια συνάρτηση $C(r)$.

3. Ορίζοντας $k(r) = 1 - 1/C^2(r)$, δείξτε ότι οι λύσεις των εξισώσεων Einstein αντιστοιχούν σε μετρικές

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{A(r,t)^2}{1-k(r)}dr^2 + A^2(r,t)d\Omega^2 \tag{32}$$

όπου

$$\frac{\dot{A}^2 + k(r)}{A^2} + \frac{2A\dot{A}\dot{A}' + k'(r)}{AA'} = 8\pi\rho \qquad \dot{A}^2 + 2\ddot{A} + k(r) = 0 \tag{33}$$

4. Δείξτε ότι οι εξισώσεις (34) οδηγούν στην εξίσωση επιτάχυνσης (που γενικεύει αυτήν των χωροχρόνων Robertson-Walker)

$$\frac{2\ddot{A}}{3A} + \frac{\ddot{A}'}{3A'} = -\frac{4\pi}{3}\rho. \tag{34}$$

Η ύπαρξη ενός επιπλέον όρου σε σχέση με την αντίστοιχη εξίσωση για χωροχρόνο Roberton Walker σημαίνει ότι μπορεί να υπάρχει φαινόμενη επιταχυνόμενη διαστολή ακόμα και απουσία σκοτεινής ενέργειας.

5. Δείξτε ότι η εξίσωση για τις φωτοειδείς ακτινικές ($d\phi = d\theta = 0$) γεωδεσιακές είναι

$$\frac{dt}{du} = \pm \frac{dr}{du} \frac{A'}{\sqrt{1 - k(r)}}, \tag{35}$$

όπου u μια αφινική παράμετρος. Οι λύσεις της (36) με αρνητικό πρόσημο αντιστοιχούν σε εισερχόμενες γεωδεσιακές. Θεωρείστε δύο τέτοιες γεωδεσιακές που αντιστοιχούν σε συναρτήσεις $t(u)$ και $t(u) + \lambda(u)$, όπου $\lambda(u) << t(u)$. Δείξτε ότι σε πρώτη τάξη ως προς $\lambda(u)$,

$$\frac{d\lambda}{du} = -\frac{dr}{du} \frac{A'}{\sqrt{1 - k(r)}} \lambda. \tag{36}$$

Ορίζοντας τη μετατόπιση προς το ερυθρό $z(u) = [\lambda(0) - \lambda(u)]/\lambda(0)$ δείξτε ότι

$$\frac{dz}{du} = \frac{dr}{du} \frac{A'(a + z)}{\sqrt{1 - k(r)}}. \tag{37}$$

6. Δείξτε ότι η εξίσωση (3) συνεπάγεται ότι

$$\frac{\dot{A}^2}{A^2} = \frac{F(r) - k(r)A}{A^3}, \tag{38}$$

όπου $F(r)$ τυχαία συνάρτηση του r που προσδιορίζεται από τις συνοριακές συνθήκες. Το γεγονός ότι υπάρχει μία συνάρτηση $F(r)$ που δεν προσδιορίζεται άμεσα έχει ως συνέπεια ότι το μοντέλο μπορεί να ταιριάξει με οποιοδήποτε παρατηρησιακό σύνολο δεδομένων για κατάλληλη επιλογή του $F(r)$. Αυτό καταδεικνύει ότι η ύπαρξη σκοτεινής ενέργειας δεν είναι αναπόφευκτη συνέπεια των παρατηρησιακών δεδομένων, αλλά εξαρτάται από το πλαίσιο αναφοράς εντός του οποίου αυτά ερμηνεύονται, δηλαδή από την υπόθεση ομοιογένειας και ισοτροπίας του σύμπαντος.

10 Βαρυτικά επίπεδα κύματα

Σχετική θεωρία: γραμμικοποίηση των εξισώσεων Einstein, βαρυτικά κύματα.

Η πρόβλεψη της σχετικότητας για την ύπαρξη βαρυτικών κυμάτων δεν προκύπτει μόνο από τη μελέτη της γραμμικοποιημένης θεωρίας. Υπάρχουν και ακριβείς λύσεις των εξισώσεων Einstein με κυματική συμπεριφορά. Μια γενική μετρική που περιγράφει βαρυτικά κύματα είναι η εξής

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 - dudv + (x, y, u)du^2 \tag{39}$$

για κάποια συνάρτηση H(x,y,u). Για H = 0, η μετρική (40) αντιστοιχεί σε χωροχρόνο Minkowski όπου $u = t + z, v = t–z$. Μετρικές της μορφής (40) καλούνται pp-waves (plane-fronted waves with parallel rays).

1. Υπολογίστε τον τανυστή Ricci για την (40) και δείξτε ότι οι εξισώσεις Einstein στο κενό δίνουν

$$\partial_x^2 H + \partial_y^2 H = 0, \tag{40}$$

δηλαδή η συνάρτηση H είναι αρμονική ως προς τη εξάρτηση της από τις μεταβλητές x, y. Η επιλογή $H(x, y, u) = b(u)(x^2 - y^2) + 2c(u)xy$ αντιστοιχεί σε επίπεδα βαρυτικά κύματα. Όντως, για αυτή την επιλογή η συνάρτηση H γραφεται στη μορφή Re$(z^2 A(u)e^{i\theta(u)})$ και σε αντιστοιχία με τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα , το βαρυτικό κύμα (40) προσδιορίζεται από μία μεταβλητή πλάτους A(u) και μία γωνία $\theta(u)$ που δίνει την κατεύθυνση της πόλωσης.

2. Γράφοντας τις εξισώσεις Killing για τα επίπεδα βαρυτικά κύματα, δείξτε ότι υπάρχουν 5 ανεξάρτητα διανύσματα Killing: το ∂_v και 4 διανύσματα της μορφής

$$X = p(u)\partial_x + q(u)\partial_y - 2[x\dot{p}(u) + y\dot{q}(u)]\partial_v \tag{41}$$

για τα 4 ζεύγη (p, q) που αντιστοιχούν σε 4 γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του συστήματος εξισώσεων

$$\ddot{p} = -b(u)p + c(u)q \qquad \ddot{q} = b(u)q - c(u)p \tag{42}$$

3. Θεωρείστε την ειδική περίπτωση ενός βαρυτικού παλμού, όπου οι συναρτήσεις $b(u), c(u)$ που προσδιορίζουν το κύμα μηδενίζονται εκτός του διαστήματος $[0,]$, δηλαδή για $u < 0$ και για $u > T$ ο χωροχρόνος είναι Minkowski. Έστω ένα σωμάτιο αρχικά ακίνητο στο επίπεδο x-y, δηλαδή η κοσμογραμμή του δίνεται από τις συντεταγμένες $(\tau, x_0, y_0, 0)$, όπου τ ο ιδιοχρόνος. Διαλέγουμε την αρχή του χρόνου έτσι ώστε $\tau = 0$ όταν $u = 0$, δηλαδή όταν το κύμα πέφτει πάνω στο σώμα. Γράψτε τις γεωδεσιακές εξισώσεις για το σώμα κινούμενο στο βαρυτικό κύμα. Θα δείτε ότι $u(\tau) = \kappa\tau$ για σταθερά κ που μπορεί, χωρίς απώλεια γενικότητας, να θεωρηθεί ίση με 1. Θα καταλήξετε ότι οι εξισώσεις κίνησης στο επίπεδο x-y αντιστοιχούν στις εξισώσεις (43).

4. Θεωρείστε τις ειδικές περιπτώσεις (i) c = 0 και (ιι) b =0. Θεωρείστε ότι το κύμα είναι αρκετά ασθενές ώστε οι μετατοπίσεις του σώματος στο χρονικό διάστημα T που κρατά ο παλμός να είναι πολύ μικρές, οπότε αρκεί να πάρει κανείς μια μικρή διόρθωση στην αρχική θέση. Η παραπάνω προσέγγιση σημαίνει ότι σε μια διαφορική εξίσωση της μορφής $\ddot{x} = \alpha(t)x$, με $x(0) = x_0$ και $\dot{x}(0) = 0$, η προσεγγιστική λύση είναι $x(t) = x_0 + \int_0^t ds \int_0^s ds' \alpha(s')$. Περιγράψτε τις κινήσεις στο επίπεδο x-y που αντιστοιχούν στις περιπτώσεις (ι) και (ιι). Τι ταχύτητα θα έχει το σωμάτιο αφού έχει περάσει το κύμα, σε κάθε περίπτωση; Υποθέστε ότι έχετε πολλά τέτοια σωμάτια αρχικά τοποθετημένα σε κύκλο στο επίπεδο x-y. Πώς θα έχει παραμορφωθεί ο κύκλος όταν θα έχει περάσει το βαρυτικό κύμα;

11 Θερμοδυναμικές ιδιότητες μελανών οπών

Η γενικότερη στάσιμη λύση των εξισώσεων Einstein που αντιστοιχεί σε μελανές οπές είναι η λύση Kerr-Newman, η οποία περιγράφεται από τις εξισώσεις 12.3.1—12.3.3 στο βιβλίο Wald, General Relativity. Οι παράμετροι τη μετρική Kerr-Newman είναι η μάζα M, το ολικό φορτίο Q και η στροφορμή J = Ma. Για ευκολία συμβολισμού το φορτίο που συμβολίζεται ως e στον Wald εδώ θα το γράφουμε ως Q.

1. Υπολογίστε τη μετρική που επάγεται από τη μετρική Kerr-Newman στον ορίζοντα (στην επιφάνεια $r = r_+ = M + (M^2 - a^2 - q^2)^{1/2}, t =$ σταθ.) και δείξτε ότι το εμβαδόν A του ορίζοντα δίνεται από τη λεγόμενη σχέση του Smarr

$$A(, J, Q) = 4\pi \left[2M^2 - Q^2 + 2M^2 \sqrt{1 - \frac{Q^2}{M^2} - \frac{J^2}{M^4}} \right] \tag{43}$$

2. Με δεδομένη τη σχέση του Bekenstein $S = A/4$ για την εντροπία S μίας μελανή οπής, γράψτε τη βασική θερμοδυναμική σχέση (S, J, Q) που δίνει την ενέργεια M ως συνάρτηση τη εντροπία S, της στροφορμής J και του φορτίου Q. Γράψτε τον 1ο θερμοδυναμικό νόμο $dM = TdS + \Omega dJ + \Phi dQ$, προσδιορίζοντας τη θερμοκρασία T, τη γωνιακή συχνότητα Ω και το δυναμικό Φ.

3. Δείξτε ότι $S(\lambda, \lambda^2 J, \lambda Q) = \lambda^2 S(M, J, Q)$ και χρησιμοποιείστε αυτήν την ιδιότητα για να αποδείξετε τη σχέση (ανάλογη της σχέση Euler στη θερμοδυναμική)
$$\frac{1}{2}M = TS + \Omega J + \frac{1}{2}\Phi Q. \tag{44}$$

4. Δείξτε ότι η θερμοχωρητικότητα $C = T(\partial S/\partial T)$ μιας μελανής οπής Kerr-Newman δίνεται από τη σχέση
$$C = \frac{8MTS^3}{J^2 + \frac{1}{4}Q^2 - 8T^2S^3}. \tag{45}$$
Παρατηρείστε ότι η θερμοχωρητικότητα μπορεί να είναι είτε θετική είτε αρνητική ανάλογα με το πρόσημο του παρονομαστή και ότι όταν ο παρονομαστής μηδενίζεται. Δείξτε ότι για μικρές τιμές των J,Q η θερμοχωρητικότητα είναι αρνητική (κάτι που αντιστοιχεί σε μη-ευσταθή θερμοδυναμική ισορροπία) ενώ για μεγάλα J,Q η θερμοχωρητικότητα είναι θετική. Αυτή είναι χαρακτηριστική συμπεριφορά μετάβασης φάσης. Προσδιορίστε το σημείο της μετάβασης στις ειδικές περιπτώσεις (ι) $Q = 0$ και (ιι) $J = 0$.

5. Προσδιορίστε τις μελανές οπές για τις οποίες η θερμοκρασία T = 0 και υπολογίστε την τιμή της εντροπίας τους. Αυτές οι μελανές οπές καλούνται ακραίες (extremal) και είναι η οριακή περίπτωση που μπορεί να εμφανιστεί ορίζοντας. Αν μπορούσαμε να αυξήσουμε το φορτίο ή τη στροφορμή αυτών των οπών, χωρίς να αλλάξουμε τη μάζα θα σχηματίζονταν ένας χωροχρόνο με μία «γυμνή» μοναδικότητα, δηλαδή μία μοναδικότητα που δεν καλύπτεται από ορίζοντα.

   Όπως είδατε, σε αντίθεση με το 3ο θερμοδυναμικό νόμο, όπου $T = 0$ σημαίνει και $S = 0$, η εντροπία των ακραίων μελανών οπών είναι μη-μηδενική. Ωστόσο υπάρχει η άποψη (προερχόμενη από άλλου είδους επιχειρήματα) ότι για αυτές τις μελανές οπές δεν ισχύει η σχέση Bekenstein-Hawking και ότι η εντροπία τους όντως μηδενίζεται.

12 Θερμοδυναμική ευστάθεια μελανής οπής

Θεωρείστε μία προσεγγιστική θερμοδυναμική περιγραφή όπου έχουμε n μελανές οπές Schwarzschild (Q = J = 0) μάζας M σε ένα κουτί όγκου V, όπου συνυπάρχουν με θερμική ακτινοβολία. Αγνοώντας τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των οπών και τη βαρυτική αλληλεπίδραση των φωτονίων η συνολική εντροπία θα είναι
$$S = 4\pi n M^2 + k(VE_r^3)^{1/4}, \tag{46}$$
όπου k μία σταθερά, E_r η ενέργεια της ακτινοβολία. Στη (47) χρησιμοποιήσαμε την εξίσωση για την εντροπία ενός αερίου φωτονίων, όπως στη συνήθη θερμοδυναμική. Γράφοντας την ολική ενέργεια $E = Er + nM$, η (47) γίνεται
$$S(E, n, M) = 4\pi n M^2 + kV^{1/4}(E – nM)^{3/4}. \tag{47}$$

Η αρχή της μέγιστης εντροπίας μας λέει ότι καταστάσεις ισορροπίας αντιστοιχούν σε ολικό μέγιστο της εντροπίας για σταθερή ενέργεια E. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να βρείτε τη λύση της εξίσωσης $\partial S/\partial M = 0$, που αντιστοιχεί στο απόλυτο μέγιστο της S για $0 \leq M \leq E/n$.

1. Δείξτε ότι απαραίτητη προϋπόθεση ύπαρξης καταστάσεων ισορροπίας είναι

$$V \leq \frac{2^{28}\pi^4}{5^5 3^4 k^4}\frac{E^5}{n^4}. \tag{48}$$

   (Για να αποδείξετε την (49) θα φέρετε τη σχέση $\partial S/\partial M$ = 0 στη μορφή που αντιστοιχεί σε εύρεση ρίζας ενός πολυωνύμου και θα μελετήσετε τη συμπεριφορά αυτού. Παρότι το πολυώνυμο είναι 5ης τάξης, η συνθήκη για την ύπαρξη μεγίστου για $0 \leq M \leq E/n$ μπορεί να προσδιοριστεί αναλυτικά.) Βλέπουμε ότι δεν είναι εφικτή η ύπαρξη καταστάσεων ισορροπίας αν ο όγκος του κουτιού είναι αρκετά μεγάλος (εκτός αν n = 0). Παρατηρούμε επίσης ότι η κατάσταση ισορροπίας επιτυγχάνεται πιο εύκολα για δεδομένο όγκο, αν είναι μικρός ο αριθμός των μελανών οπών.

2. Την περασμένη δεκαετία γίνονταν συχνά αναφορές στο ενδεχόμενο δημιουργίας μικροσκοπικών μελανών οπών στους επιταχυντές σωματιδίων. Για να εξετάσει κανείς αυτό το ενδεχόμενο μπορεί να χρησιμοποιήσει την ανισότητα (49). Η (49) είναι γραμμένη σε σύστημα μονάδων $G = c = \hbar = 1$, στο οποίο η σταθερά k είναι της τάξης της μονάδας. Εκτιμείστε την τάξη μεγέθους της διάστασης του δοχείου ($V^{1/3}$) που πρέπει να περιορίσουμε μια μελανή οπή μάζας $M = 10^{-5}g$ (της τάξης της μάζας Planck) , προκειμένου να είναι ευσταθής. (Θεωρείστε ότι $Er << M$.) Εκτιμείστε την τάξη μεγέθους της πυκνότητας ενέργειας της ακτινοβολίας (E_r/V) που απαιτείται για να είναι ευσταθής μια μελανή οπή μάζας $M = 10^{-5}g$ σε ένα δοχείο όγκου $1l$. Συγκρίνετε με την πυρηνική πυκνότητα που είναι της τάξης $10^{14}g/cm^3$.

3. Στη συνέχεια προχωράμε σε μία διαφορετική θεώρηση. Έστω ότι ένα σφαιρικό δοχείο ακτίνας R με πλήρως ανακλαστικά τοιχώματα. Έστω ότι κρατάμε τα σύνορα του κουτιού σε σταθερή θερμοκρασία T_0. Αν το κουτί περιέχει μία σφαιρικά συμμετρική μελανή οπή μάζας M, αυτή θα πρέπει να χαρακτηρίζεται (σε πρώτη προσέγγιση) από θερμοκρασία $T_H = (8\pi M)^{-1}$, για έναν παρατηρητή στο άπειρο. Η θερμοκρασία στα σύνορα του κουτιού τότε προσδιορίζεται από τη λεγομενη σχέση του Tolman, ότι το γινόμενο $T\sqrt{g_{00}}$ είναι σταθερό. Θεωρώντας ότι η μετρική έξω από το κουτί είναι Schwarzshild, δείξτε ότι

$$T_0 = \frac{1}{8\pi M\sqrt{1-2M/R}}. \tag{49}$$

   Για σταθερή θερμοκρασία T_0 και ακτίνα δοχείου R, βρείτε τις δυνατές τιμές της μάζας της μελανής οπής που μπορεί να περιέχεται στο δοχείο. Για κάθε περίπτωση υπολογίστε την ειδική θερμότητα υπό σταθερό όγκο $C = (\partial M/\partial T_0)R$.

   Στη συνήθη θερμοδυναμική, μία φάση είναι θερμοδυναμικά ασταθής αν η ειδική θερμότητα παίρνει αρνητικές τιμές. Υποθέτοντας ότι ισχύει το ίδιο και για μελανές οπές, βρείτε ποιες λύσεις είναι ευσταθείς και τι συνθήκη πρέπει να ικανοποιείται ώστε να υπάρχει θερμοδυναμική ευστάθεια.