1ο φυλλάδιο ασκήσεων Διαφορικής Γεωμετρίας για το μάθημα Γενικής Σχετικότητας

Πολλαπλότητες, τανυστές και μορφές

1. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, όπου $f(x, y, z) = (x^2 y, xyz)$.

   (α') Βρείτε το push-forward ως προς την f του εφαπτόμενου διανύσματος $X_p = \frac{\partial}{\partial x}$ στο σημείο $p = (1, 2, 0)$.

   (β') Βρειτε το pull-back ως προς την f της μονομορφής $\omega = udv - v^2 du$ όπου $(u, v) \in \mathbf{R}^2$.

   (γ') Βρείτε το pull-back ως προς την f του τανυστή $g = du \otimes du + dv \otimes dv$.

2. Έστω Σ η επιφάνεια στο $\mathbf{R}^3$ που ορίζεται από τη σχέση

   $$x^2 + y^2 - z^2 = 1. \qquad (1)$$

   Και έστω $i : \Sigma \to \mathbf{R}$ η συνάρτηση εγκλεισμού όπου σε κάθε σημείο $(x, y, z) \in \Sigma$ αντιστοιχεί το ίδιο σημείο $(x, y, x) \in \mathbf{R}$. Επιλέξτε ένα σύστημα συντεταγμένων (u, θ) στο Σ, όπου $x = \cosh u \cos\theta, y = \cosh u \sin\theta, z = \sinh u$. Υπολογίστε τα pull-back στο Σ της μονομορφής $\alpha = zdx + xdy + ydz$ και του τανυστή $g = dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz$ στο $\mathbf{R}^3$.

3. Δείξτε ότι το διανυσματικό πεδιο $\frac{\partial}{\partial x}$ δεν είναι πλήρες στην πολλαπλότητα $\mathbf{R}_+ = (0, \infty)$, ενώ το διανυσματικό πεδίο $x\frac{\partial}{\partial x}$ είναι πλήρες.

4. Έστω $X = y^2 \frac{\partial}{\partial x}$ και $Y = x^2 \frac{\partial}{\partial y}$ δύο διανυσματικά πεδια στο $\mathbf{R}^2$. Δειξτε ότι και τα δύο είναι πλήρη, αλλά το $X + Y$ δεν είναι πλήρες.

5. Θεωρείστε το διανυσματικό πεδιο $X = y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$. Υπολογίστε και σχεδιάστε τις ολοκληρωτικές καμπύλες του X. Έστω $\eta = dx \otimes dx - dy \otimes dy$ Δείξτε ότι $\mathcal{L}_X \eta = 0$. (Το πεδίο γεννά τις λεγομενες *ωθήσεις* των μετασχηματισμών Λόρεντς).

6. Έστω σύστημα συντεταγμένων $(t, x, y, z) \in \mathbf{R}^4$ και $\eta = dt \otimes dt - dx \otimes dx - dy \otimes dy - dz \otimes dz$ η λεγομενη μετρική Μινκόβσκι. Βρείτε τη γενικότερη μορφή του διανυσματικού πεδίου X που ικανοποποεί τη σχέση $\mathcal{L}_X \eta = 0$.

7. Υπολογίστε τις παραγώγους Lie

   (α') ενός συμμετρικού τανυστή $g_{\mu\nu}$,

   (β') ενός αντισυμμετρικού τανυστή $\omega_{\mu\nu}$, και

   (γ') ενός μεικτού τανυστή $A^{\mu}{}_{\nu}$.

8. Αποδείξτε τις ακόλουθες ταυτότητες για την παράγωγο Lie.

   (α') $\mathcal{L}_{fX} Y = f[X, Y] - Y(f)X$, για διανυσματικά πεδια X, Y και συνάρτηση f.

   (β') $\mathcal{L}_{[X,Y]} T = \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y T - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X T$, για διανυσματικά πεδια X, Y και τανυστή T.

9. Δείξτε ότι για κάθε συνάρτηση $f : M \to N$ και για κάθε μορφή ω, η στο N, ισχυουν οι ταυτότητες.

   (α') $d(f^* \omega) = f^* d\omega$

   (β') $f^*(\omega \wedge \eta) = (f^* \omega) \wedge (f^* \eta)$.