1 Ασκήσεις Θερμοδυναμικής

1.1 Βασικές αρχές

1. Οι παρακάτω είναι εκφράσεις για την εντροπία σε διάφορα υδροδυναμικά συστήματα. Εντοπίστε ποιες εκφράσεις δεν είναι φυσικά αποδεκτές και προσδιορίστε ποιες ιδιότητες της εντροπίας δεν ικανοποιούν.

   (α') $S = a(NVU)^{1/3}$.
   (β') $S = bNU/V$.
   (γ') $S = c\sqrt{NU + V^2}$.
   (δ') $S = N \log(U^{3/2} V N^{-5/2})$.
   (ε') $S = \sqrt{NU} exp(-dV/N)$.

   Οι ποσότητες a, b,c,d είναι θετικές σταθερές, U η εσωτερική ενέργεια, V ο όγκος, N ο αριθμός σωματιδίων.

2. Η εντροπία ενός αερίου δίνεται από τη σχέση $S = c(VUN)^{1/3}$, όπου c θετική σταθερά. Ένα απομονωμένο δοχείο είναι χωρισμένο με αδιαβατικό πέτασμα σε δύο περιοχές A και B, ίσων όγκων. Ο αριθμός των μορίων στις δύο περιοχές είναι ίσος, αλλά οι εσωτερικές ενέργειες U_A και U_B διαφέρουν. Αν το πέτασμα γίνει διαθερμικό, πόση θα είναι η εσωτερική ενέργεια σε κάθε μία από τις δύο περιοχές όταν επέλθει η ισορροπία και πόση θα είναι η μεταβολή της συνολικής εντροπίας;

3. Βρείτε τις καταστατικές εξισώσεις για ένα σύστημα με θεμελιώδη εξίσωση

   $$S = \frac{UV}{N} - \frac{N^3}{UV}.$$

   Γράψτε την εξίσωση της πίεσης $P = f(T, v)$. Δείξτε ότι η θερμοκρασία είναι θετική. Προσδιορίστε τη μορφή των αδιαβατικών καμπυλών στο επίπεδο $P - v$.

4. Βρείτε την θεμελιώδη εξίσωση για αέριο που περιγράφεται από την καταστατική εξίσωση $P = \gamma U/V$, όπου γ θετική σταθερά και ο αριθμός σωματιδίων N δε διατηρείται.

5. Βρείτε τη θεμελιώδη εξίσωση για αέριο που περιγράφεται από τις καταστατικές εξισώσεις $U = \frac{3}{2}PV$, $T = bu^{1/2}v^{-1/3}$,όπου b θετική σταθερά, $u = U/N, v = V/N$.

6. Μονατομικό ιδανικό αέριο σε θερμικά μονωμένο δοχείο όγκου V αφήνεται να εκτονωθεί έως ότου να καταλάβει όγκο $V' > V$. Βρείτε το λόγο της τελικής πίεσης προς την αρχική, της τελικής θερμοκρασίας προς την αρχική και υπολογίστε τη μεταβολή της εντροπίας.

7. Η Γη λαμβάνει από τον Ήλιο ενέργεια με ισχύ P υπό μορφή φωτονίων στο ορατό μέρος του φάσματος, την οποία επανεκπέμπει υπό μορφή φωτονίων στο υπέρυθρο. Θεωρώντας ότι και στις δύο περιπτώσεις η ακτινοβολία είναι θερμική με θερμοκρασίες T_Γ (Γης) και T_H (Ηλίου) αντίστοιχα, βρείτε το ρυθμό μεταβολής της εντροπίας της Γης. Είναι θετικός ή αρνητικός;

8. Δίνεται η θεμελιώδης εξίσωση για αέριο van der Waals $S = N \log[(v - b)(u + a/v)]$, όπου a, b και γ θετικές σταθερές. Υπολογίστε τους συντελεστές α, κ_T και c_P. (Θα πάρετε ανάπτυγμα γύρω από την έκφραση της εντροπίας για ιδανικό αέριο.)

9. Υλικό έχει συντελεστή διαστολής

   $$\alpha = \frac{1}{Pv} + \frac{b}{vT^2}$$

και ισόθερμη συμπιεστότητα

$$\kappa_T = \frac{1}{v}\left(Tf(P) + \frac{c}{P}\right)$$

όπου b και c σταθερές. Υπολογίστε τη συνάρτηση $f(P)$. Βρείτε την καταστατική εξίσωση του συστήματος.

1.2 Αρχή μέγιστου έργου

1. Μονατομικό ιδανικό αέριο σε κατάσταση (N_0, V_0, T_0) οδηγείται σε κατάσταση διπλάσιου όγκου και ίδιας θερμοκρασίας. Αν είναι διαθέσιμη θερμική δεξαμενή θερμοκρασίας $\frac{1}{2}T_0$, βρείτε το μέγιστο έργο που μπορεί να παραχθεί. Επαναλάβετε το ίδιο ερώτημα αν αντί για θερμική δεξαμενή είναι διαθέσιμη θερμική πηγή με θερμοχωρητικότητα $C(T) = C_0 + bT$, όπου C_0 και b θετικές σταθερές.

2. Δύο σώματα έχουν την ίδια θερμοχωρητικότητα C και θερμοκρασίες T_1 και T_2. Βρείτε το μέγιστο παραγόμενο έργο για μια διαδικασία στην οποία καταλήγουν να έχουν την ίδια θερμοκρασία. Ποια είναι η μέγιστη θερμοκρασία στην οποία μπορούν να ισορροπήσουν;

3. Σύστημα έχει σταθερή θερμοχωρητικότητα C και είναι αρχικά σε θερμοκρασία T_0. Αν είναι διαθέσιμη θερμική δεξαμενή θερμοκρασίας T_δ, πόσο είναι το μέγιστο παραγόμενο έργο όταν το σύστημα ψύχεται στη θερμοκρασία της δεξαμενής;

4. Έχουμε δύο θερμοδυναμικά συστήματα που περιγράφονται από τις καταστατικές εξισώσεις $u = bT, P = avT$. Τα συστήματα έχουν τον ίδιο αριθμό μορίων και κοινό μοριακό όγκο v_0, αλλά διαφορετικές θερμοκρασίες T_1 και T_2. Φέρονται σε κατάσταση κοινής θερμοκρασίας T_f και μοριακού όγκου v_f. Υπολογίστε το μέγιστο παραγόμενο έργο και την τιμή της T_f.

1.3 Άλλες κατανομές

1. Γράψτε την ελεύθερη ενέργεια Helmholtz για αέριο φωτονίων ξεκινώντας από την καταστατική του εξίσωση.

2. Η ελεύθερη ενέργεια Helmholtz ενός συστήματος δίνεται από τη σχέση $F = -NT \log(1 + e^{-\epsilon/T})$, όπου ϵ θετική σταθερά. Γράψτε τη θεμελιώδη εξίσωση στην αναπαράσταση εντροπίας.

3. Θερμοδυναμικό σύστημα ικανοποιεί τις καταστατικές εξισώσεις $u = 3/2Pv, P = bvT^4$, όπου b θετική σταθερά. Βρείτε τη θεμελιώδη εξίσωση για την εντροπία, την ελεύθερη ενέργεια Gibbs και την ελεύθερη ενέργεια Helmholtz.

4. Αέριο έχει καταστατικές εξισώσεις $U = PV$ και $T^3 = b\frac{U^2}{NV}$, όπου b θετική σταθερά. Το αέριο βρίσκεται σε αρχική θερμοκρασία T_0 και πίεση P_0 και υπόκειται σε διαδικασία Joule-Thomson με τελική πίεση P_f. Υπολογίστε την τελική θερμοκρασία T_f.

5. Αέριο υπόκειται σε διαδικασία Joule-Thomson από αρχική θερμοκρασία T_0 και πίεση P_0 σε τελική πίεση P_f. Αν ο αρχικός όγκος είναι v_0, βρείτε την τελική θερμοκρασία T_f με δεδομένα ότι: (i) για $T = T_0$, $\kappa_T = \frac{b}{v^2}$, (ii) για $T = T_0$, $\alpha = \alpha_0$, (iii) για $P = P_f, c_P = c_P^0$. Ποια τιμή του T_0 αντιστοιχεί σε αναστροφή;

1.4 Θερμοδυναμικές παράγωγοι

1. Αποδείξτε τις σχέσεις

$$TdS = Nc_v dT + \frac{\alpha T}{\kappa_T} dV, \qquad TdS = Nc_P dT - \alpha V dP.$$

Από τη δεύτερη δείξτε ότι

$$c_P = c_v + \frac{Tv\alpha^2}{\kappa_T}. \tag{1}$$

2. Δείξτε ότι $\kappa_s/\kappa_T = c_v/c_P$.

3. Κάντε αναγωγή των παραγώγων $(\partial h/\partial v)_T$ και $(\partial s/\partial f)_P$.

4. Δείξτε ότι

$$\left(\frac{\partial c_v}{\partial v}\right)_T = T\left(\frac{\partial^2 P}{\partial T^2}\right)_v.$$

5. Δείξτε ότι

$$\left(\frac{\partial c_P}{\partial P}\right)_T = -Tv\left[\alpha^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial T}\right)_P\right].$$

Υπολογίστε αυτήν την ποσότητα για σύστημα που ικανοποιεί την καταστατική εξίσωση $P(v+b/T^2) = T$, όπου b θετική σταθερά.

6. Δείξτε η μεταβολή της ενθαλπίας για εκτόνωση ενός αερίου από αρχικό ειδικό όγκο v σε τελικό ειδικό όγκο $v + \delta v$ είναι

$$\delta H = \frac{P - (c_P - Pv\alpha)}{c_P\kappa_T - Tv\alpha^2}\delta v$$

7. Κάντε αναγωγή της παραγώγου $(\partial \mu/\partial v)_s$.

1.5 Μεταβάσεις φάσης

1. Υγρό βράζει σε θερμοκρασία 105^oC στην κορυφή ενός βουνού και σε θερμοκρασία 95^oC στη βάση του. Αν η λανθάνουσα θερμότητα του είναι $1kcal/mol$, πόσο είναι το ύψος του βουνού;

2. Υγρό βρίσκεται σε δοχείο όγκου V_0, υπό πίεση P_0 και θερμοκρασία T_0. Θερμαίνεται υπό σταθερό όγκο ώστε να διπλασιαστεί η πίεση του. Περιγράφοντας τους ατμούς ως ιδανικό αέριο, και θεωρώντας τον όγκο της υγρής φάσης πολύ μικρότερο από αυτόν της αέριας, βρείτε το λόγο του τελικού προς τον αρχικό αριθμό μορίων σε αέρια φάση.

3. Δείξτε ότι για μεταβολές κατά μήκος της καμπύλης συνύπαρξης, η ειδική θερμότητα ενός ατμού $c_\sigma = c_P – \ell/T$, όπου ℓ η λανθάνουσα θερμότητα. Για επαρκώς μικρές θερμοκρασίες το c_σ μπορεί να γίνει αρνητικό. Τι σημαίνει αυτό φυσικά;

4. Υπολογίστε το συντελεστή διαστολής α_σ κατά μήκος της καμπύλης συνύπαρξης.

5. Η ειδική ενέργεια Helmholtz ενός συστήματος στη στερεά φάση δίνεται από τη σχέση $f = \frac{A}{Tv^3}$, ενώ στην υγρή από τη σχέση $f = -BTv^4$, όπου A και B θετικές σταθερές. Υπολογίστε τις αντίστοιχες ειδικές ενέργειες Gibbs. Ποια είναι η σχέση των ειδικών όγκων των δύο φάσεων στο σημείο μετάβασης; Υπολογίστε την κλίση της καμπύλης συνύπαρξης.

6. Η ειδική ενέργεια Helmholtz για μια ουσία στη στερεά φάση δίνεται από τη σχέση $f = \frac{A}{T}$, ενώ στην αέρια φάση από τη σχέση $f = \frac{b}{Tv}$, όπου a και b θετικές σταθερές. Γράψτε την ειδική ενέργεια Gibbs για τις δύο φάσεις και προσδιορίστε την καμπύλη συνύπαρξης για την εξάχνωση του στερεού. Προσδιορίστε την ειδική λανθάνουσα θερμότητα ως τη διαφορά στην ενθαλπία μεταξύ των δύο φάσεων πάνω στην καμπύλη συνύπαρξης.

7. Υπολογίστε την πίεση και τη θερμοκρασία στο κρίσιμο σημείο για ένα αέριο που ικανοποιεί την εξίσωση van der Waals.

8. Σε μία συνεχή μετάβαση φάσης ο μοριακός όγκος $v = (\partial g/\partial P)_T$ είναι συνεχής στη μετάβαση από τη μία φάση στην άλλη. Χρησιμοποιώντας αυτήν την ιδιότητα, αποδείξτε το ανάλογο της εξίσωσης Clapeyron για την καμπύλη συνύπαρξης

$$\frac{dP}{dT} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta\kappa_T},$$

όπου $\Delta\alpha$ και $\Delta\kappa_T$ η διαφορά στο συντελεστή θερμικής διαστολής και στη συμπιεστότητα για τις δύο φάσεις αντίστοιχα.

9. Θεωρείστε μαγνητικό σύστημα στο οποίο η μοριακή ενέργεια Gibbs είναι

$$g(\boldsymbol{m}, T) = \frac{1}{2}\mu(T)\boldsymbol{m}^2 + \frac{\lambda}{6!}\boldsymbol{m}^6.$$

Δείξτε ότι η μετάβαση είναι συνεχής και υπολογίστε τους κρίσιμους εκθέτες με τη θεωρία Landau.

10. Φυσικό σύστημα χαρακτηρίζεται από βαθμωτή παράμετρο τάξης ϕ και μοριακή ελεύθερη ενέργεια Gibbs

$$g(T, \phi) = \frac{1}{2}\phi^2 + \frac{a(T)}{3!}\phi^3 + \frac{b(T)}{4!}\phi^4,$$

όπου οι συναρτήσεις $a(T), b() > 0$. Βρείτε τις τιμές των a, b για τις οποίες υπάρχει μετάβαση φάσης και δείξτε ότι αυτή είναι πρώτης τάξης.

2 Ασκήσεις στατιστικής μηχανικής

2.1 Οι βασικές κατανομές

1. Αποδείξτε τον τύπο του Stirling $N! = \sqrt{2\pi N} N^N e^{-N}$. Ξεκινήστε από τη σχέση $N! = \int_0^\infty dx x^N e^{-x}$ και γράψτε $x^N e^{-x} = e^{-F(x)}$. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα στη Γκαουσιανή προσέγγιση, όπου αναπτύσσετε την $F(x)$ γύρω από το ελάχιστο της κρατώντας μόνο τετραγωνικούς όρους.

2. Υπολογίστε την εντροπία Gibbs για σύστημα N κλασικών αρμονικών ταλαντωτών συχνότητας ω σε μία διάσταση χρησιμοποιώντας τη μικροκανονική κατανομή.

3. Έστω σύστημα N διάκριτων βαθμών ελευθερίας s_i που παίρνουν τιμές 0 και 1. Η Χαμιλτόνια του συστήματος είναι $H = \sum_{i=1}^N s_i$ Υπολογίστε τη σχέση της εσωτερικής ενέργειας με τη θερμοκρασία (i) χρησιμοποιώντας τη μικροκανονική κατανομή και (ii) χρησιμοποιώντας την κανονική κατανομή.

4. Εκτιμείστε από την κανονική κατανομή για ιδανικό κλασικό αέριο N μορίων σε όγκο V, τη διακύμανση δN_v του αριθμού των μορίων σε μία περιοχή όγκου $v << V$. Θεωρείστε ότι $N_v >> 1$.

5. Ιδανικό αέριο βρίσκεται σε επαφή με δεξαμενή σταθερής θερμοκρασίας T και πίεσης P. Υπολογίστε τη ροπή συσχετισμού $\langle \delta E \delta V \rangle$.

6. Δείξτε ότι $\langle (\delta E)^3 \rangle = T^4 (\partial C_v / \partial T)_v + 2T^3 C_v$. Υπολογίστε αυτήν την έκφραση για ιδανικό αέριο N μονατομικών μορίων.

7. Για κάθε κατανομή πιθανοτήτων $p(n)$ ορίζουμε την εντροπία Shannon της ως $S = -\sum_n p(n) \log p(n)$. Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange για να δείξετε τα ακόλουθα.

   (α') Λαμβάνοντας υπόψη τη συνθήκη $\sum_n p(n) - 1 = 0$, δείξτε ότι για καταστάσεις με σταθερή ενέργεια , η εντροπία Shannon μεγιστοποιείται για τη μικροκανονική κατανομή.

   (β') Δείξτε ότι για δεδομένη μέση ενέργεια $\langle E \rangle = \sum_n p(n) E_n$, η εντροπία Shannon μεγιστοποιείται για την κανονική κατανομή.

   (γ') Δείξτε ότι για δεδομένη μέση ενέργεια $\langle E \rangle$ και μέσο αριθμό σωματιδίων $\langle N \rangle$, η εντροπία Shannon μεγιστοποιείται για τη μεγάλη κανονική κατανομή

8. Συμβολίζουμε ως δ_c τις διακυμάνσεις ως προς την κανονική κατανομή και ως δ_g τις διακυμάνσεις ως προς τη μεγάλη κανονική κατανομή. Δείξτε ότι

$$(\delta_g E)^2 - (\delta_c E)^2 = (\delta_g N)^2 [(\partial U / \partial N)_T]^2.$$

   (Για τη μεγάλη κανονική κατανομή είναι βολικό να χρησιμοποιήσει κανείς την ποσότητα α = βμ ως θερμοδυναμική μεταβλητή, αντί για το χημικό δυναμικό μ.)

2.2 Εφαρμογές των κατανομών

1. Υλικό αποτελείται από N_A άτομα τύπου A και άτομα τύπου B. Τα άτομα τύπου A έχουν δυνατές τιμές ενέργειας 0 και ϵ, ενώ τα άτομα τύπου B δυνατές τιμές ενέργειας 0 και 2ϵ. Βρείτε την ελεύθερη ενέργεια Helmholtz του συστήματος και το C_v.

2. Θεωρείστε ένα αέριο N μονοδιάστατων ανεξάρτητων αναρμονικών ταλαντωτών,όπου ο καθένας έχει Χαμιλτονιανή $H = \frac{1}{2m} p^2 + \lambda x^4$. Δείξτε ότι $c_v = \frac{3}{4}$.

3. Υπολογίστε την ελεύθερη ενέργεια Helmholtz και το c_v ενός συστήματος N κλασικών διατομικών μορίων. Η Χαμιλτόνια για κάθε μόριο είναι

$$H = \frac{1}{2m}(\boldsymbol{p}_1^2 + \boldsymbol{p}_2^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)^2,$$

   όπου m η μάζα του κάθε ατόμου και ω η συχνότητα ταλάντωσης.

4. Άλας αποτελείται από N ιόντα με μαγνητική ροπή $\pm\mu_B$ και βρίσκεται εντός μαγνητικού πεδίου B_0 σε επαφή με θερμική δεξαμενή θερμοκρασίας T_0. Αν η ένταση του πεδίου διπλασιαστεί ισόθερμα, πόση θερμότητα λαμβάνει το σύστημα από τη δεξαμενή; Αν η ένταση του πεδίου υποδιπλασιαστεί αδιαβατικά, ποια είναι η τελική θερμοκρασία;

5. Υλικό αποτελείται από N μη-αλληλεπιδρώντες στερεούς στροφείς, όπου ο καθένας έχει ιδιοτιμές ενέργειας $E_{\ell m} = \ell(\ell+1)\epsilon$, όπου ϵ θετική σταθερά. Υπολογίστε τη συνάρτηση επιμερισμού του συστήματος και το C_v. Στο όριο χαμηλών θερμοκρασιών θεωρείστε ότι μόνο η βασική και η πρώτη διεγερμένη στάθμη συνεισφέρουν, ενώ για υψηλές θερμοκρασίες χρησιμοποιείστε την εξίσωση Euler-MacLaurin

$$\sum_{j=0}^{\infty} f(j) = \int_0^{\infty} f(x) + \frac{1}{2}f(0) - \frac{1}{12}f'(0) + \frac{1}{720}f'''(0) + \ldots$$

6. Θεωρείστε αέριο N ατόμων υδρογόνου. Υπολογίστε τη συνεισφορά στο C_v από τις εσωτερικές του καταστάσεις, οι οποίες αντιστοιχούν σε ενέργειες $E_n = -\epsilon_0/n^2$, με εκφυλισμό $2n^2$ και n = 1, 2 ...., όπως στην παραπάνω άσκηση.

7. Υπολογίστε το C_v για ένα σύστημα N ανεξαρτήτων κλασικών αναρμονικών ταλαντωτών σε μία διάσταση με Χαμιλτόνια $H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m^2x^2 + \lambda x^4$, σε πρώτη τάξη ως προς λ. Επαναλάβετε τον υπολογισμό για N ανεξάρτητους κβαντικούς αναρμονικούς ταλαντωτές με ιδιοτιμές ενέργειας $E_n = (n+1/2)\hbar\omega + \kappa(n+1/2)^2$, όπου κ θετική σταθερά.

8. Υπολογίστε το C_v για ένα αέριο N υπερσχετικιστικών κλασικών ελεύθερων σωματιδίων σε 3 διαστάσεις με Χαμιλτόνια για το καθένα $H = |\boldsymbol{p}|$.

9. Πολυμερές μακρομόριο αποτελείται από αλυσίδα N μονομερών. Τα μονομερή μπορούν να βρεθούν στην κατάσταση α, οπότε έχουν μήκος a και ενέργεια ϵ_α , ή στην κατάσταση β, οπότε έχουν μήκος b και ενέργεια ϵ_β. Η ολική ενέργεια είναι το άθροισμα των ενεργειών των μονομερών συν έναν όρο LX, όπου L είναι το συνολικό μήκος του μακρομορίου και X η τάση στα άκρα του. Βρείτε τη σχέση μεταξύ του μέσου μήκους του μορίου $\langle L\rangle$ και της τάσης X. Αναπτύσσοντας κατά Taylor, γράψτε μία σχέση της μορφής $\langle L\rangle = L_0 + kX$ και προσδιορίστε τις σταθερές L_0 και k.

10. Κλασικό ιδανικό αέριο βρίσκεται σε δοχείο στο οποίο υπάρχουν N_0 σημεία απορρόφησης, κάθε ένα από τα οποία μπορεί να απορροφήσει ένα μόριο του αερίου. Η ενέργεια ενός απορροφημένου μορίου είναι ίση με $-\epsilon$, όπου $\epsilon > 0$. Εκφράστε την πτητικότητα $z = exp(\beta\mu)$ του αερίου ως συνάρτηση της πίεσης και της θερμοκρασίας. Υπολογίστε το μέσο αριθμό $\langle N\rangle$ των απορροφημένων μορίων.

2.3 Κβαντικά ιδανικά αέρια

1. Υπολογίστε την ενέργεια Fermi για σχετικιστικό αέριο με Χαμιλτόνια $H = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$ για $T = 0$. Γράψτε αναλυτική έκφραση για $m = 0$. Στη συνέχεια βρείτε την εξάρτηση του c_v από τη θερμοκρασία στο όριο χαμηλών θερμοκρασιών $T << mc^2$.

2. Η πυκνότητα καταστάσεων ενός φερμιονικού σωματιδίου είναι $g(E) = D$, όπου D θετική σταθερά και Ε>0. Θεωρείστε ιδανικό αέριο τέτοιων σωματιδίων. Υπολογίστε την ενέργεια Fermi για $T = 0$ και το c_v για χαμηλή θερμοκρασία.

3. Η Χαμιλτονιανή που περιγράφει ένα ηλεκτρόνιο εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ έχεις ιδιοτιμές

$$E_{n,j} = \frac{2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}n^2 + (j + \frac{1}{2})\frac{eB}{mc},$$

όπου έχουμε θεωρήσει περιοδικές συνοριακές συνθήκες με περίοδο L, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, $j = 0, 1, 2, \ldots$. Οι παραπάνω ενεργειακές στάθμες είναι εκφυλισμένες με βαθμό εκφυλισμού

$$g = \frac{eB}{2\pi\hbar c}L^2. \qquad (2)$$

Υπολογίστε τη μαγνήτιση στο όριο υψηλών θερμοκρασιών $z \to 0$ και από αυτή τη μαγνητική επιδεκτικότητα χ_T.

4. Ηλεκτρόνιο σε μαγνητικό πεδίο B έχει ενέργεια $\pm\mu_B B$, ανάλογα με το αν η μαγνητική του ροπή είναι παράλληλη ή αντιπαράλληλη στο πεδίο. Υπολογίστε τη μεγάλη συνάρτηση επιμερισμού για N ηλεκτρόνια παρουσία μαγνητικού πεδίου όταν T = 0, και γράψτε τη μαγνήτιση M ως συνάρτηση του B. Υπολογίστε τη μαγνητική επιδεκτικότητα στο όριο ασθενούς πεδίου.

5. Θεωρείστε d-διάστατο πλέγμα Debye, στο οποίο τα φωνόνια χαρακτηρίζονται από σχέση διασκεδασμού $\omega(\boldsymbol{k}) = c|\boldsymbol{k}|^r$, όπου c θετική σταθερά και $r > 1$. Βρείτε την εξάρτηση του c_v από τη θερμοκρασία στο όριο χαμηλών θερμοκρασιών.

6. Υπολογίστε τη μεγάλη συνάρτηση επιμερισμού για ιδανικό αέριο Bose σε δύο διαστάσεις. Δείξτε ότι δεν υπάρχει συμπύκνωση Bose-Einstein.

7. Η πυκνότητα καταστάσεων ενός μποζονικού σωμάτιου είναι $g(E) = aE^2$, όπου a θετική σταθερά και Ε > 0. Θεωρείστε ιδανικό αέριο από τέτοια σωμάτια και υπολογίστε την κρίσιμη θερμοκρασία για συμπύκνωση Bose-Einstein.

8. Θεωρείστε ένα αέριο Bose του οποίου τα μόρια έχουν επιπλέον δύο εσωτερικές καταστάσεις 0 και 1, με ενέργεια 0 και Δ αντίστοιχα. Υποθέτοντας ότι $\Delta >> T$, υπολογίστε την κρίσιμη θερμοκρασία για συμπύκνωση Bose-Einstein.

2.4 Συστήματα αλληλεπιδρώντων σωμάτιων

1. Γράψτε την καταστατική εξίσωση μη-ιδανικού αερίου στη δεύτερη τάξη virial για το ενδομοριακό δυναμικό του Sutherland

$$V(r) = \begin{cases} \infty & r < a \\ -U_0\left(\frac{a}{r}\right)^6 & r \geq a \end{cases}$$

όπου a είναι η ακτίνα ενός μορίου και θεωρούμε ότι $U_0 << T$.

2. Υπολογίστε τους συντελεστές virial b_2 και b_3 για αέριο σκληρών σφαιρών ακτίνας a ($V(r) = 0$ για $r > a$, $V(r) = \infty$ για $r < a$). Γράψτε την καταστατική εξίσωση συμπεριλαμβάνοντας όρους ως και τον τρίτο συντελεστή virial.

3. Γράψτε το συντελεστή Joule-Thomson $(\partial T/\partial P)_H$ συναρτήσει του δεύτερου συντελεστή virial $a_2(T)$. Υπολογίστε εκπεφρασμένα το συντελεστή Joule-Thomson για δυναμικό της μορφής

$$V(r) = \begin{cases} \infty & r < a \\ -\epsilon & a \le r < b \\ 0 & b \ge b \end{cases},$$

όπου a, b, ϵ θετικές σταθερές.

4. Θεωρείστε το μοντέλο του Ising τροποποιημένο έτσι ώστε οι μεταβλητές s_i να παίρνουν συνεχείς τιμές στο διάστημα $[-1, 1]$. Υπολογίστε την κρίσιμη θερμοκρασία στη θεωρία μέσου πεδίου. 5. Στο μοντέλο του Heisenberg για το σιδηρομαγνητισμό με κλασικά σπιν, η Χαμιλτόνια είναι της μορφής

$$H = -\mu \boldsymbol{B} \cdot \sum_i \boldsymbol{S}_i - g \sum_{i,j,\text{γείτονες}} \boldsymbol{S}_i \cdot \boldsymbol{S}_i, \tag{3}$$

όπου τα S είναι μοναδιαία διανύσματα. Βρείτε την κρίσιμη θερμοκρασία για αυτό το σύστημα χρησιμοποιώντας τη θεωρία μέσου πεδίου.

5. Θεωρείστε το μοντέλο του Ising στις δύο διαστάσεις με μία μετατροπή της θεωρίας μέσου πεδίου, όπου βρίσκετε το ενεργό πεδίο σε δύο γειτονικά σπιν αντί για ένα, αντικαθιστώντας τη μέση τιμή για τα υπόλοιπα. Υπολογίστε την κρίσιμη θερμοκρασία.

6. Στο μοντέλο του πλεγματικού αερίου, τα μόρια ενός αερίου μπορούν να βρεθούν μόνο στις κορυφές ενός κυβικού πλέγματος ακμής a. Σε κάθε κορυφή μπορεί να υπάρξει το πολύ ένα μόριο. Το δυναμικό αλληλεπίδρασης δύο γειτονικών μορίων είναι ίσο με $-\epsilon$ αν βρίσκονται σε γειτονική σημεία του πλέγματος. Δείξτε ότι η συνάρτηση επιμερισμού της μεγαλοκανονικής κατανομής για αυτό το μοντέλο είναι ισοδύναμη της κανονικής κατανομής για το μοντέλο του Ising.

7. Θεωρείστε το μοντέλο του Ising με δυνάμεις μεγάλης εμβέλειας, όπου ο πίνακας αλληλεπίδρασης $\mathcal{J}_{ij}$ είναι σταθερός για όλα τα i και j και ίσος με $-\lambda/N$, όπου N σταθερά. Απουσία μαγνητικού πεδίου η Χαμιλτόνια γράφεται $H = -\frac{\lambda}{2N}\Sigma^2$, όπου$\Sigma = \sum_i s_i$. Χρησιμοποιώντας τη σχέση $e^{a^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2+2ax}$, δείξτε ότι η συνάρτηση επιμερισμού γράφεται ως

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \left[2\cosh\left(\sqrt{\frac{2\beta\lambda}{N}} x \right) \right]^N. \tag{4}$$

Κάντε την κατάλληλη αλλαγή μεταβλητών ώστε να φέρετε το παραπάνω ολοκλήρωμα στη μορφή $\int dy e^{-Nf(y)}$, και υπολογίστε το στο όριο μεγάλου N. Σ' αυτό το όριο μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο σελλοειδούς σημείου: αναπτύσσετε το $f(y)$ γύρω από το ελάχιστο του και κρατάτε μόνο τετραγωνικούς όρους. Δείξτε ότι υπάρχει πάντα αυθόρμητη μαγνήτιση (ανεξάρτητα διάστασης ή είδους πλέγματος) και υπολογίστε την κρίσιμη θερμοκρασία.