

Εξετάσεις Κβαντική Φυσική 2

Σεπτέμβριος 2018

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

Όνοματεπώνυμο:

Εξάμηνο:

Αριθμός μητρώου:

Μέρος Α

Απαντήστε στα παρακάτω ερωτήματα πολλαπλής επιλογής. Κάθε ορθή απάντηση είναι +0,4 μονάδες, μέχρι δύο λάθος απαντήσεις δεν αφαιρείται βαθμός, για κάθε λανθασμένη πάνω από δύο αφαιρούνται 0,15 μονάδες, δεν προσθαφαιρείται βαθμός για μη απάντηση.

1. $\int_0^{\infty} dx \delta(x^3 + 1) f(x) =$

(α') $\frac{1}{3} f(1)$

(β') $\frac{1}{3} [f(1) + f(-1)]$

(γ') $\frac{1}{3} [f(1) - f(-1)]$

(δ') $\frac{1}{3} f(-1)$

(ε') 0

2. Ποια από τις παρακάτω κυματοσυναρτήσεις είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη στο R ;

(α') $\psi(x) = e^{-x^3}$

(β') $\psi(x) = \frac{1}{e^x + 1}$

(γ') $\psi(x) = \cosh(1/x)$

(δ') $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|+1}}$

(ε') $\psi(x) = \frac{\tanh x}{x}$

3. Σύστημα δύο κιούμπι προετοιμάζεται σε κατάσταση $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0, 0\rangle + i|1, 1\rangle)$. Και στα δύο κιούμπι γίνεται μέτρηση του τελεστή $\hat{A} = \mathbf{n} \cdot \hat{\sigma}$, για $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$. Ποια η πιθανότητα να δώσουν και οι δύο μετρήσεις τιμή +1;

(α') 0

(β') $\frac{1}{12}$

(γ') $\frac{5}{12}$

(δ') $\frac{7}{12}$

(ε') 1

4. Το διάνυσμα Μπλοχ που αντιστοιχεί στην κατάσταση $\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ είναι

- (α') $(\frac{2}{5}, 0, -\frac{1}{3})$
 (β') $(0, -\frac{2}{5}, -\frac{1}{3})$
 (γ') $(\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{3})$
 (δ') $(0, \frac{2}{5}, \frac{1}{3})$
 (ε') $(\frac{1}{5}, 0, \frac{1}{3})$

5. Κιούμπιτ προετοιμάζεται σε κατάσταση $|1\rangle$. Του γίνονται 20 διαδοχικές μετρήσεις του $\hat{\sigma}_1$. Ποια η πιθανότητα να δώσουν και οι 20 τιμή -1 ;

- (α') 0
 (β') $\frac{1}{2}$
 (γ') $(\frac{1}{2})^{20}$
 (δ') $1 - (\frac{1}{2})^{20}$
 (ε') $\frac{1}{20}$

6. Για σύνθεση στροφορμών, $\underline{3} \otimes \underline{3} \otimes \underline{3} =$

- (α') $\underline{2} \oplus \underline{3} \oplus \underline{3} \oplus \underline{5} \oplus \underline{7} \oplus \underline{7}$.
 (β') $\underline{1} \oplus \underline{3} \oplus \underline{3} \oplus \underline{3} \oplus \underline{5} \oplus \underline{5} \oplus \underline{7}$.
 (γ') $\underline{1} \oplus \underline{3} \oplus \underline{5} \oplus \underline{7} \oplus \underline{11}$.
 (δ') $\underline{3} \oplus \underline{5} \oplus \underline{5} \oplus \underline{7} \oplus \underline{7}$.
 (ε') $\underline{2} \oplus \underline{5} \oplus \underline{8} \oplus \underline{12}$.

7. Έστω \hat{T} ο τελεστής αντιστροφής χρόνου και $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 0\rangle + i|3, 1\rangle)$ όπου $|\ell, m_\ell\rangle$ ιδιοδιανύσματα της τροχιακής στροφορμής. Ισχύει ότι $\hat{T}|\psi\rangle =$

- (α') $-\frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 0\rangle + i|3, 1\rangle)$
 (β') $\frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 0\rangle + i|3, 1\rangle)$
 (γ') $-\frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 0\rangle + i|3, -1\rangle)$
 (δ') $\frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 0\rangle - i|3, -1\rangle)$
 (ε') $-\frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 0\rangle - i|3, -1\rangle)$

8. Στην προσέγγιση κεντρικού πεδίου για το άτομο του ψευδαργύρου (Zn, $Z = 30$), η ενέργεια Φέρμι αντιστοιχεί σε ποια ενεργειακή στάθμη $E_{n,\ell}$;

- (α') $E_{3,1}$
 (β') $E_{3,2}$
 (γ') $E_{4,0}$
 (δ') $E_{4,1}$
 (ε') $E_{5,0}$

Το άτομο δεν αποτελεί εξαίρεση του κανόνα δόμησης.

9. Ηλεκτρόνιο βρίσκεται σε κατάσταση με $\ell = 6, m_\ell = 6$ και $m_s = -\frac{1}{2}$. Η πιθανότητα η μέτρησή της ολικής στροφορμής να δώσει $j = \frac{9}{2}$ ισούται με

$$(\alpha') \frac{1}{11}$$

$$(\beta') \frac{1}{13}$$

$$(\gamma') 0$$

$$(\delta') \frac{10}{11}$$

$$(\epsilon') \frac{12}{13}$$

10. Σύστημα αποτελείται από 4 φερμιονικούς αρμονικούς ταλαντωτές συχνότητας ω και σπιν $s = \frac{1}{2}$. Η 4η ενεργειακή στάθμη έχει εκφυλισμό $g =$

$$(\alpha') 12$$

$$(\beta') 14$$

$$(\gamma') 16$$

$$(\delta') 18$$

$$(\epsilon') 20$$

11. Ένα σωματίο με σπιν $s = \frac{1}{2}$ που κινείται σε δύο διαστάσεις έχει ιδιοτιμές της ενέργειας $\epsilon_n = an_1 + n_2^{3/2}$ (σε αδιάστατες μονάδες), όπου $a > 0$ και $n_1, n_2 = 0, 1, 2, \dots$. Η συνάρτηση αριθμού καταστάσεων $\Omega(\epsilon)$ στο όριο του συνεχούς είναι

$$(\alpha') \frac{4\sqrt{\epsilon}}{a}$$

$$(\beta') \frac{2\epsilon^2}{3a}$$

$$(\gamma') \frac{6\epsilon^{5/3}}{5a}$$

$$(\delta') \frac{2\epsilon^{7/5}}{a}$$

$$(\epsilon') \frac{4\epsilon^{5/4}}{5a}$$

12. Έστω ότι έχουμε ένα σύστημα από $N \gg 1$ φερμιόνια όπως αυτό που περιγράφεται στο παραπάνω ερώτημα. Η ενέργεια E_0 της θεμελιώδους κατάστασης του συστήματος είναι ανάλογη του

$$(\alpha') N$$

$$(\beta') N^{3/2}$$

$$(\gamma') N^{7/6}$$

$$(\delta') N^{8/5}$$

$$(\epsilon') N^{9/4}$$

Μέρος Β'

1. Σωματίο σε μία διάσταση βρίσκεται εντός δυναμικού $V(x) = \frac{a}{|x|} + bx^2$.

Για $a > 0, b = 0$, ο τελεστής Σρέντινγκερ στην ευθεία

..... διακριτό φάσμα με εκφυλισμό

..... συνεχές φάσμα με εκφυλισμό

Για $a > 0, b > 0$, ο τελεστής Σρέντινγκερ στην ευθεία

..... διακριτό φάσμα με εκφυλισμό

..... συνεχές φάσμα με εκφυλισμό

Συμπληρώστε τα σωστά ή / και διαγράψτε από τις παραπάνω προτάσεις. (0,4)

2. Συμπληρώστε ορθά τις παρακάτω προτάσεις. (3x0,2)

(α') Το άθροισμα δύο προβολικών τελεστών προβολικός τελεστής

.....

(β') Το γινόμενο τριών αντιγραμμικών τελεστών

.....τελεστής

(γ') Αν $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$, τότε υπάρχει μία συνάρτηση f έτσι ώστε $\hat{B} = f(\hat{A})$, εφόσον.....

.....

3. Ένα μποζόνιο δεν μπορεί να αποτελείται μόνο από φερμιόνια. Σωστό ή λάθος; Τεκμηριώστε συνοπτικά. (0,4)

4. Η μαγνητική ροπή του ηλεκτρονίου είναι ανάλογη της ολικής του στροφορμής. Σωστό ή λάθος; Τεκμηριώστε συνοπτικά. (0,4)

5. Πόσους κόμβους έχει η ακτινική ιδιοσυνάρτηση του τελεστή Σρέντινγκερ στις 3 διαστάσεις για σφαιρικά συμμετρικό δυναμικό, αν $n = 4$ και $\ell = 2$; Τεκμηριώστε συνοπτικά και σχεδιάστε ενδεικτικά τη γραφική της. (0,4)

Μέρος Γ'

1. Σύστημα δύο ουδέτερων σωματιδίων με σπιν $s = \frac{1}{2}$ και ίσους γυρομαγνητικούς λόγους γ βρίσκεται εντός σταθερού μαγνητικού πεδίου \mathbf{B} . Η συνολική Χαμιλτονιανή του συστήματος είναι $\hat{H} = -\gamma \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{S}}_1 - \gamma \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{S}}_2 + a \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2$, όπου a είναι σταθερά. (α) Υπολογίστε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα της \hat{H} . (β) Υπολογίστε την πιθανότητα μία μέτρηση του συνολικού σπιν πάνω στη θεμελιώδη κατάσταση του συστήματος να δώσει τιμή που αντιστοιχεί σε $s = 1$. (1)

2. Χρησιμοποιείστε τη θεωρία μεταβολών για να εκτιμήσετε την ενέργεια της θεμελιώδους κατάστασης ενός σωματιδίου στην ημιευθεία $x > 0$ κάτω από δυναμικό $V(x) = ax^4$, όπου $a > 0$. (1)

3. Ξεκινώντας από τη σχέση αβεβαιότητας Μάντελσταμ-Ταμ

$$\Delta H \Delta A \geq \frac{1}{2} \left| \left\langle \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \right\rangle \right|$$

αποδείξτε τη σχέση $\Delta H \tau \geq \frac{\pi}{4}$ μεταξύ της αβεβαιότητας ΔH στην ενέργεια μιας ασταθούς κατάστασης $|\psi\rangle$ και του χρόνου τ ημιζωής της. (Υπόδειξη: Θέστε $\hat{A} = |\psi\rangle\langle\psi|$.) (1)