

Εξετάσεις Κβαντική Φυσική 2

12 Σεπτεμβρίου 2016

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

1. Οι παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ή λάθος; Απαντήστε δίνοντας και μία όσο το δυνατόν συνοπτικότερη τεκμηρίωση. (6 × 0,3)

(α') $\delta(\sinh x) = \delta(x)$.

(β') Το γινόμενο δύο μοναδιαίων τελεστών είναι πάντα μοναδιαίος τελεστής.

(γ') Μια ορθοκανονική βάση σε ένα σύστημα 6 κιούμπιτ αποτελείται από 36 διανύσματα.

(δ') Η κυματοσυνάρτηση του ατόμου του ${}^6\text{Li}$ είναι πλήρως αντισυμμετρική ως προς τα 9 φερμιόνια που την αποτελούν.

(ε') Σύστημα δύο ηλεκτρονίων με αντισυμμετρική χωρική κυματοσυνάρτηση έχει ολικό σπιν $s = 1$.

(στ') Αν το ηλεκτρόνιο είχε σπιν 1 και όλα τα άλλα ήταν ίδια, τα άτομα θα ήταν μεγαλύτερα.

2. Απαντήστε στα παρακάτω ερωτήματα. (4 × 0,4)

(α') Με τι ισούται το $(\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2 \hat{\sigma}_3)^{2016}$;

(β') Συμμετρικός στερεός στροφέας χαρακτηρίζεται από Χαμιλτονιανή

$$\hat{H} = \frac{1}{2I_1}(\hat{\ell}_1^2 + \hat{\ell}_2^2) + \frac{1}{2I_3}\hat{\ell}_3^2,$$

όπου $\hat{\ell}_i$ οι τελεστές της τροχιακής στροφορμής και I_i οι ροπές αδράνειας ως προς τους κύριους άξονες. Ποιες είναι οι ιδιοτιμές της \hat{H} ;

(γ') Τρία σωμάτια έχουν κβαντικούς αριθμούς στροφορμής $j_1 = \frac{1}{2}$, $j_2 = 1$ και $j_3 = \frac{7}{2}$. Ποιες είναι οι δυνατές τιμές της ολικής στροφορμής του συστήματος;

(δ') Γράψτε την ηλεκτρονιακή δομή του ατόμου του Αντιμονίου (Sb) με $Z = 51$ στην προσέγγιση τροχιακών (δεν αποτελεί εξαίρεση του κανόνα σύνθεσης).

3. Απαντήστε στα παρακάτω ερωτήματα. (5 × 0,6)

(α') Θεωρείστε τον τελεστή Σρέντινγκερ $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$ σε μία διάσταση, για $V(x) = \alpha/(x^2 + 1) + \beta x^2$, όπου α και β σταθερές. Συμπληρώστε με ναι ή όχι τον παρακάτω πίνακα για το φάσμα του \hat{H} ανάλογα με τις τιμές των α και β , γράφοντας και μία πολύ σύντομη εξήγηση.

Συνθήκη	Συνεχές φάσμα	Διακριτό φάσμα
$\alpha > 0, \beta > 0$		
$\alpha < 0, \beta > 0$		
$\alpha > 0, \beta = 0$		
$\alpha < 0, \beta = 0$		

(β') Γράψτε το διάνυσμα Μπλοχ που αντιστοιχεί στην κατάσταση $\hat{\rho} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 5 \end{pmatrix}$.

- (γ') Σε κιούμπιτ με αρχική κατάσταση $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}i|1\rangle$ γίνονται διαδοχικές μετρήσεις πρώτα του $\hat{\sigma}_1$ και μετά του $\hat{\sigma}_3$. Ποια η πιθανότητα η πρώτη να δώσει τιμή +1 και η δεύτερη +1;
- (δ') Δείξτε ότι σε ένα σύστημα δύο σωματιδίων με σπιν $s = 0$, η σχετική στροφορμή μπορεί να πάρει μόνο άρτιες τιμές του κβαντικού αριθμού ℓ .
- (ε') Θεωρείστε σύστημα τριών μονοδιάστατων (φερμιονικών) αρμονικών ταλαντωτών με σπιν $s = \frac{1}{2}$. Προσδιορίστε τις 4 χαμηλότερες ενεργειακές στάθμες, την ενέργειά τους και το βαθμό εκφυλισμού τους.

4. Απαντήστε στα παρακάτω ερωτήματα. (4 × 0, 9)

- (α') Ξεκινώντας από τη σχέση αβεβαιότητας Μάντελσταμ-Ταμ

$$\Delta H \Delta A \geq \frac{1}{2} \left| \left\langle \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \right\rangle \right|,$$

θεωρείστε ως \hat{A} τον προβολικό τελεστή $|\phi\rangle\langle\phi|$ και δείξτε ότι ο χρόνος ημιζωής τ της κατάστασης $|\phi\rangle$ ικανοποιεί τη σχέση $\tau \Delta H \geq \frac{\pi}{4}$.

- (β') Σε σύστημα δύο κιούμπιτ, υπολογίστε το γινόμενο $\langle\psi|\hat{\sigma}_1 \otimes \hat{\sigma}_2|\psi\rangle$, για $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0, 1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|1, 0\rangle$.
- (γ') Θεωρείστε ιδανικό αέριο N ηλεκτρονίων ($s = \frac{1}{2}$) σε μονοδιάστατο κουτί μήκους L και με περιοδικές συνοριακές συνθήκες.
- Δείξτε ότι η συνάρτηση αριθμού καταστάσεων είναι $\Omega(\epsilon) = \frac{2L}{\pi} \sqrt{2m\epsilon}$, όπου m η μάζα του ηλεκτρονίου.
 - Δείξτε ότι η ενέργεια Φέρμι είναι $\epsilon_F = \frac{\pi^2 N^2}{8mL^2}$.
 - Υπολογίστε την ενέργεια της θεμελιώδους κατάστασης του συστήματος.
- (δ') Θεωρείστε αναρμονικό ταλαντωτή με Χαμιλτονιανή $\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \lambda\hat{x}^4$. Χρησιμοποιώντας μία Γκαουσιανή δοκιμαστική συνάρτηση $\psi(x) = (2\pi b)^{-1/4} e^{-\frac{x^2}{4b}}$, εκτιμήστε την ενέργεια της θεμελιώδους του στάθμης, χρησιμοποιώντας τη θεωρία των μεταβολών.