

Εξετάσεις Κβαντική Φυσική 2

8 Ιουνίου 2016

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

1. Οι παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ή λάθος; Απαντήστε δίνοντας και μία όσο το δυνατόν συνοπτικότερη τεκμηρίωση. ($7 \times 0,3$)

(α') Η συνάρτηση $\psi(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}$ είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη.

(β') $\delta(x^4 - 1) = \frac{1}{4}\delta(x - 1)$

(γ') Το γινόμενο δύο προβολικών τελεστών είναι πάντα προβολικός τελεστής.

(δ') Το σπιν ενός σύνθετου σωματίου μπορεί να μεταβληθεί από $s = \frac{1}{2}$ σε $s = 1$ αν διεγερθούν εσωτερικοί βαθμοί ελευθερίας του.

(ε') Υπάρχουν 99 τρόποι με τους οποίους μπορούν να κατανεμηθούν 99 φερμιόνια σε 100 καταστάσεις.

(στ') Σε σύστημα δύο ηλεκτρονίων με συνολικό σπιν $s = 0$, η χωρική κυματοσυνάρτηση είναι συμμετρική.

(ζ') Η μέση απόσταση ενός ηλεκτρονίου από τον πυρήνα σε άτομο με ατομικό αριθμό Z εμφανίζει περιοδικότητα ως προς το Z σύμφωνα με τον περιοδικό πίνακα των στοιχείων.

2. Απαντήστε στα παρακάτω ερωτήματα. ($6 \times 0,6$)

(α') Θεωρήστε τον τελεστή Σρέντινγκερ $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$ για σωματίο σε μία διάσταση. Για κάθε δυναμικό από τα ακόλουθα, προσδιορίστε αν ο \hat{H} έχει διακριτό φάσμα, συνεχές φάσμα ή και τα δύο και αιτιολογήστε συνοπτικά.

i. $V(x) = g/(x^2 + a^2)^2$,

ii. $V(x) = -g/(x^2 + a^2)^2$,

iii. $V(x) = g(x^2 + a^2)^2$,

όπου $g > 0$ και a σταθερά με διαστάσεις μήκους.

(β') Γράψτε το διάνυσμα Μπλοχ που αντιστοιχεί στην κατάσταση $\hat{\rho} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix}$.

(γ') Υπολογίστε τη σφαιρική αρμονική $Y_{21}(\theta, \phi)$ χρησιμοποιώντας αυξητικούς και μειωτικούς τελεστές για την τροχιακή στροφορμή και κανονικοποιείστε την.

(δ') Εξηγήστε γιατί δεν περιμένουμε να υπάρχουν καταστάσεις επαλληλίας ακέραιας και ημι-ακέραιας ολικής στροφορμής.

(ε') Θεωρήστε σύστημα τεσσάρων μονοδιάστατων (φερμιονικών) αρμονικών ταλαντωτών με σπιν $s = \frac{1}{2}$. Προσδιορίστε τις 3 χαμηλότερες ενεργειακά στάθμες, την ενέργειά τους και το βαθμό εκφυλισμού τους.

(στ') Θεωρήστε το άτομο του Τεχνητίου (Tc) με $Z = 43$. Γράψτε την ηλεκτρονιακή του δομή στην προσέγγιση τροχιακών (δεν αποτελεί εξαίρεση του κανόνα σύνθεσης). Έστω $E_{n,\ell}$ είναι οι ιδιοτιμές της Χαμιλτονιανής ενός ηλεκτρονίου στην προσέγγιση κεντρικού πεδίου για το Tc. Εκφράστε την ενέργεια ιονισμού (του εξώτερου ηλεκτρονίου) και την ενέργεια Φέρμι του ατόμου μέσω των $E_{n,\ell}$.

3. Απαντήστε στα παρακάτω ερωτήματα. ($4 \times 0, 8$)

(α') Σύστημα δυο κιούμπι προετοιμάζεται σε κατάσταση $|\psi\rangle = \frac{1}{2}|1, 1\rangle + i\frac{\sqrt{3}}{2}|0, 0\rangle$. Και στα δύο κιούμπι γίνεται μέτρηση του $\hat{\sigma}_1$. Βρείτε την πιθανότητα και οι δύο μετρήσεις να δώσουν τιμή -1 .

(β') Για ένα κιούμπι ορίζουμε τον τελεστή αντιστροφής στο χρόνο ως

$$\hat{\mathbb{T}} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_2^* \\ c_1^* \end{pmatrix}.$$

Δείξτε ότι (i) ο $\hat{\mathbb{T}}$ είναι αντιγραμμικός, (ii) $\hat{\mathbb{T}}^\dagger = -\hat{\mathbb{T}}$, (iii) $\hat{\mathbb{T}}^2 = -\hat{1}$ και (iv) $\hat{\mathbb{T}}^\dagger \hat{\sigma}_1 \hat{\mathbb{T}} = -\hat{\sigma}_1$.

(γ') Ηλεκτρόνιο βρίσκεται σε κατάσταση με κβαντικούς αριθμούς $l = 3$, $m_l = -3$, $m_s = \frac{1}{2}$. Ποια είναι η πιθανότητα η μέτρηση της ολικής στροφορμής του να αντιστοιχεί σε $j = \frac{7}{2}$;

(δ') Έστω $\hat{H} = \hat{T} + \hat{V}$, όπου $\hat{T} = \frac{1}{2m}\mathbf{p}^2$ ο τελεστής κινητικής ενέργειας για σωματίο στις 3 διαστάσεις και $\hat{V} = V(\hat{\mathbf{r}})$ ο τελεστής δυναμικού. Δείξτε ότι για κάθε ιδιοδιάνυσμα $|\psi\rangle$ του \hat{H}

$$\langle \psi | 2\hat{T} - \hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla V(\hat{\mathbf{r}}) | \psi \rangle = 0.$$

4. Θεωρείστε ένα άτομο με Z ηλεκτρόνια στην προσέγγιση που αγνοείται η αλληλεπίδραση μεταξύ ηλεκτρονίων. Επιλέγουμε σύστημα μονάδων, έτσι ώστε η ενέργεια ενός ηλεκτρονίου εντός του δυναμικού του πυρήνα να είναι $E_n = -Z^2/n^2$, όπου $n = 1, 2, \dots$ και ο βαθμός εκφυλισμού είναι $g_n = 2n^2$. Θεωρείστε το όριο μεγάλου Z , ώστε να έχει νόημα η προσέγγιση συνεχούς.

(α') Δείξτε ότι η συνάρτηση αριθμού καταστάσεων είναι $\Omega(\epsilon) = \frac{2Z^3}{3|\epsilon|^{3/2}}$.

(β') Δείξτε ότι η ενέργεια Φέρμι είναι $\epsilon_F = -(2Z^2/3)^{2/3}$.

(γ') Υπολογίστε την ενέργεια της θεμελιώδους κατάστασης του ατόμου.

(1,1)